

GRONDBEGINSELS

DER

MEETKUNDE

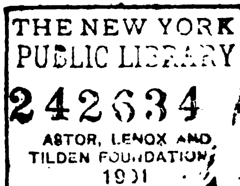
DOOR

J. H. VAN SWINDEN,

HOOGLEERAAR IN DE WYSBEGEERTE, WIS- NATUUR- EN STERREKUNDE TE AMSTERDAM, LID VAN VERSCHEIDEN GELEERDE GENOOTSCHAPPEN.

Te AMSTERDAM,
BY PIETER DEN HENGST.
MDCCXC.

INHOUD.


THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
242634
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATION

IV.

IN OUD.

INHOUD.

WERK.

INHOUD.

II. AF-

INHOUD.

VOOR-

STEENSTRA *Grondbeginsels der Meetkunst.* Leyden 1779. 3de druk: kortheidshalven wordt deeze Schryver enkel door de letter S, of St. aangeweezen.

TACQUET. Zie EUCLIDES.

VIETA, *Opera Mathematica: operâ atque studio Fr. van Schooten; Lugd. Batav.* 1646. Folio.

VIVIANI, *De locis solidis, secunda divinatio geometrica. Florentiae.* 1701. Folio.

WALLIS, *De Algebra Tractatus:* dit boek is in het jaar 1685 in het Engelsch uitgekomen, en in het latyn herdrukt in het 2. deel der *Opera Mathematica* van dien Schryver, Oxford 1693. 3 vol. folio.

WOLF, *Grondbeginsels van alle Mathematische Weetenschappen. Amsterdam.* 1738. 3 deelen in 8°. Wy hebben alleen het eerste deel aangehaald; en de arithmetica met de letter *a*, de geometria met de letter *g* en de *trigonometria* met de letter *t* aangeduid. Kortheidshalven wordt deeze Schryver enkel door de letter W. aangeweezen.

Ook hebben wy nu en dan het latynsche werk van dien Schryver aangehaald: namentlyk

Elementa Matheseos universae. Halae: 1742. 5 deelen in Quarto.

Van de *Sinus-* en *Logarithmus-Tafelen* zyn veele drukken, in alle taalen; de beste zyn:

Tafelen bevattende de Sinussen, Tangenten, en Secanten enz. benevens derzelver Logarithmen, als mede de Logarithmen der gewoone getalen van 1 tot 10,000, door B. J. DOUWES te Amsterdam by G. HULST VAN KEULEN. 1779: in 8°.

En vooral, de grooter Tafels van denzelven, die tot tytel voeren, *Tafelen, behelzende de Sinussen, Tangenten, Secanten, en Sinus versus enz. benevens de vergrootende breedte, als mede de Logarithmen voor alle getallen van* 1 *tot* 100000: *door* B. J. DOUWES. *Te Amsterdam by J. van Keulen en Zoonen.* 1776. 8°.

Deeze zyn geschikt naar de Tafelen van SHERWIN, doch daar de Heer DOUWES goed gevonden heeft in de Tafelen

der Logarithmen van *Sinusſen* enz. de *proportionaale* of *evenreedige* gedeelten wegtelaaten, zyn deeze Tafels veel minder nuttig dan die van SHERWIN welke tot tytel voeren

SHERWIN's *Mathematical Tables: the fourth edition: carefully reviſed and corrected* by WILLIAM GARDINER. London 1761. 8°. denkelyk zyn er zeederd dien tyd nog nieuwe drukken gekomen.

De uitgeſtrektſte en beste Tafels zyn, buiten die van VLAK in 1628 en 1633 te Gouda in Folio gedrukt, doch die thans zeer zeldzaam voorkomen en zeer duur zyn, de groote *Logarithmus Tafels* van GARDINER in 1742 te Londen in 4°. uitgegeeven: men vindt er de Logarithmen der Sinusſen enz. van 10 tot 10 ſecouden: deeze Tafels zyn in 't fransch met veele en belangryke vermeerderingen uitgegeeven door den Heer PEZENAS onder den tytel

Tables des Logarithmes, contenant les Logarithmes des nombres depuis 1 *jusqu'à* 102100 *&c. publiées ci devant par* M. GARDINER: *Avignon* 1770. *Quarto.*

Doch voor eenige jaaren zyn die Tafels wederom met alle mogelyke naauwkeurigheid in 8° herdrukt, en wat de ſchikking der Logarithmen betreft verbeeterd, onder den tytel van *Tables portatives de Logarithmes, publiées à Londres par* GARDINER, *augmentées & perfectionnées dans leur diſpoſition par* M. CALLET. *Paris, chez Didot.* 1783.

Deeze Tafels verdienen, myns oordeels, de voorkeuze boven alle andere. Men behoort echter te letten dat men in dezelve (even als in die van PEZENAS of GARDINER) de *natuurlyke* of *ſlecht* Sinusſen, Tangenten en Secanten niet aantreft, zo als in de gewoone Tafels. Daar echter de *ſlecht-ſinusſen* in ſommige deelen der Stuurmanskunst te pas komen, moet men zich ook van eenige dier reeds opgenoemde kleine tafels voorzien: hoe wel men, zonder veel moeite, uit den *Logarithmus-ſinus* den *Natuurlyken ſinus*, door de Logarithmus-Tafelen kan opmaaken.

Onder alle de drukken van kleine Logarithmus-Tafelen, die verre in de meeste gevallen der practyk genoegzaam

zyn,

zyn, en als een handboek kunnen dienen, zyn de volgende de beste, inzonderheid voor de schikking der getalen, die voortreffelyk is.

Tables de Logarithmes pour les Sinus & Tangentes de toutes les minutes du quart de cercle, & pour tous les nombres naturels depuis 1. *jusqu'à* 10800. *Paris* chez Guerin & *de la Tour*. 1760. 8°.

Het kan somtyds in *de praktyk* nuttig en aangenaam zyn met een opslag van het oog het quadraat of den cubus van eenig getal te vinden, of den quadraat- of cubiek-wortel van eenig getal te kunnen nagaan: hiertoe dienen de zogenaamde *Quadraat-* en *Cubiek-Tafels* die men in eenige boeken over de Algebra, en ook afzonderlyk aantreft: de gemaklykste zyn die welke door BUCHNER met eene Hoogduitsche verklaaring zyn uitgegeeven, onder den tytel JOH. PAUL BUCHNERS *Tabula radicum quadratorum & cuborum, bis auf* 12000: *Nurnberg* 1701: in langwerpig 8°. Deeze Tafels zyn echter niet van drukfeilen vry.

Men vindt ook Tafelen van de quadraaten en cubi der natuurlyke getalen tot 1000 toe, in het werk van LAMBERT tot tytel voerende

Zusaetze zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tabellen: Berlyn 1770. 8°.

Men heeft ook voor de quadraaten zeer uitgebreide Tafelen van LUDOLF: onder den tytel van

Tetragonometria tabularia Auctore L. J. LUDOLFIO *Amstelodami* 1690 in Quarto.

AANTEEKENING DER PROPOSITIEN VAN EUCLIDES, DIE MET DE VOORSTELLEN VAN DIT WERK OVEREENKOMEN.

NB. *De letter* W *duidt het Boek der Werkstukken aan.*

I. BOEK VAN EUCLIDES.

I.	Propositie is by ons	W. III. 2.
II.	———————	W. I. 1.
III.	———————	W. I. 2.
IV.	———————	I. 8.
V.	———————	I. 10.
VI.	———————	I. 11.
VII.	———————	(*a*)
VIII.	———————	I. 12.
IX.	———————	W. II. 1.
X.	———————	W. I. 7.
XI.	———————	W. I. 3.
XII.	———————	W. I. 5.
XIII.	———————	I. 1.
XIV.	———————	I. 2.
XV.	———————	I. 3.

Ge-

(*a*) (Fig. 28.) „ Indien 'er uit de stippen A en C van „ eene lyn AC twee lynen AB, BC, getrokken zyn, die „ elkander in B ontmoeten, kan men op die lyn AC, aan „ den zelfden kant, en uit de zelfde stippen geen twee an„ dere lynen, aan de reeds gemelde gelyk, ieder aan ieder „ (namelyk AG = AB : GC = BC) trekken, die zich „ in eenig ander stip G, van het eerstgemelde verschillend, „ ontmoeten." Die propositie dient alleen om de VIII. te bewyzen, en haar bewys is in de daad een gedeelte van het bewys dier laatstgemelde propositie, die by ons het XII. Voorstel van het I. Boek is.

Gevolg.	. . . . is by ons	I. 3. Gev.
XVI.	Propositie ———	I. 7. Gev. 4.
XVII.	———	(a)
XVIII.	———	I. 14.
XIX.	———	
XX.	———	I. 15.
XXI.	———	I. 16.
XXII.	———	W. III. 1.
XXIII.	———	W. II. 3.
XXIV.	———	I. 17.
XXV.	———	(b)
XXVI.	———	I. 9.
XXVII.	———	I. 4.
XXVIII.	———	
XXIX.	———	
XXX.	———	I. 5.
XXXI.	———	W. I. 6.
XXXII.	———	I. 7.
XXXIII.	———	I. 18.
XXXIV.	———	I. 19.
XXXV.	———	II. 1.
XXXVI.	———	
XXXVII.	———	II. 6.
XXXVIII.	———	
XXXIX.	———	II. 6. Gev. 2.
XL.	———	
XLI.	———	II. 1. Gev. 6.
		XLII.

(a) „ Twee hoeken van eenen driehoek zyn kleiner „ dan twee rechten," dit ligt in het VII. Voorstel van ons eerste Boek stilzwygend opgesloten.

(b) Is het omgekeerde van de 24: en dus ook by ons van I. 17.

XLII.	Propofitie is by ons	W. III. 11.
XLIII.	———————	I. 19. Gev. 4.
XLIV.	———————	W. III. 13.
XLV.	———————	W. III. 16.
XLVI.	———————	W. III. 4.
XLVII.	———————	II. 7.
XLVIII.	———————	II. 7. Gev. 3.

II. BOEK VAN EUCLIDES.

I.	Propofitie is by ons	II. 1. Gev. 3.
II.	———————	II. 1. — 4.
III.	———————	II. 1. — 5.
IV.	———————	II. 2.
V.	———————	II. 3.
VI.	———————	II. 4. Gev.
VII.	———————	(a)

VIII.

(a) Wy hebben uit het tweede Boek van EUCLIDES die Voorftellen overgenomen, die ons voor kwamen het meest nuttig te zyn: uit dien hoofde hebben wy het 7, 9 en 10 overgeflagen: doch het zal misfchien den leezer niet onaangenaam zyn te zien, hoe gemaklyk ook deezen uit de door ons bygebragte Voorftellen volgen.

Men ftelle dan op bl. 41 na ons tweede Voorftel, aldus het

III. GEVOLG. Fig. 51.

Daar □ op GE = □ op GF + □ op FE + 2 Rechth. uit GF, FE: is,

□ op GE + □ op FE = □ op GF + 2 □ op FE + 2 Rechth. uit GF . FE.

= □ op GF + 2 Rechth. uit FE en (FE + GF) Vo. 1. Gev. 3.

= □ op GF + 2 Rechth. uit FE . GE.

dat

VIII. Propofitie is by ons II. 4.
IX. ——————— } (a)
X ———————
XI. ——————— W. I. 12.
XII. ——————— } II. 9.
XIII. ———————
XIV. ——————— W. III. 19.
III. BOEK

dat is, „Indien eene lyn in twee deelen gefneeden wordt, „ is het vierkant op de geheele lyn, te famen met dat van „ een der deelen, gelyk aan den dubbelden rechthoek uit „ dat deel en de geheele lyn, te faamen met het vierkant „ op het ander deel."

EUCL. II. 7.

IV. GEVOLG. Fig. 52.

Indien KI = IG: en KH naar willekeur: is
□ op KH = □ op KI + □ op IH + 2 Rechth. uit KI. IH
dus
□ op KH + □ op HG = □ op KI + □ op IH + 2 Rechth. uit KI . IH + □ op HG
= □ op IG + □ op IH + 2 Rechth. uit IG . IH + □ op HG
= □ op IG + □ op IH + 2 Rechth. uit IG . IH
+ □ op IG — 2 Rechth. uit IH . HG
— □ op IH (Gev. 2.)
= 2 □ op IG + 2 Rechth. uit IH en (IG — HG) (1. Vo. Gev. 3.)
= 2 □ op IG + 2 □ op IH. dat is

„ Indien eene lyn in twee gelyke en in twee ongelyke „ deelen gedeeld wordt, is de fom der vierkanten op de „ ongelyke deelen gelyk aan de dubbelde fom der vierkan- „ ten op de halve lyn, en op het middel-ftuk."

EUCL. II. 9.

III. BOEK VAN EUCLIDES.

I. Propositie is by ons W. IV. 1.
II. ———————— V. 1.
III. ————————} V. 6.
IV. ————————}
V. ————————} V. 14.
VI. ————————}

VII.

AANMERKING. Dit komt in de daad overeen met het geen wy in het I. Voorbeeld op het V. Voorstel van het VII. Boek beweezen, en aldaar uit geheel andere gronden opgemaakt hebben.

V. GEVOLG. Fig. 52.

Indien KI genomen is naar willekeur, en HG = IH: is
□ op KG = □ op KH + □ op HG + 2 Recht. uit KH . HG
en dus
□ op KG + □ op KI = □ op KH + □ op KI + □ op HG
+ 2 Rechth. uit KH . HG
= □ op KH + □ op KH — 2 Rechth.
uit KI . IH — □ op IH
+ □ op HG + 2 Rechth. uit KH . HG
(Gev. 2.)
= 2 □ op KH + 2 Rechth. uit HI en
[KH — KI] (I. Vo. Gev. 3.)
= 2 □ op KH + 2 □ op HI: dat is

„ Indien eene lyn (IG) in twee gelyke deelen gedeeld „ is, en men verlengt dezelve naar willekeur (tot in K); is „ het vierkant op de gegeeven lyn en het aangevoegde deel „ te samen gesteld, te samen met het vierkant op het aangevoegde deel, het dubbeld van de som der vierkanten „ op de halve gegeeven lyn, en op de som van de halve „ lyn en het aangevoegde deel." EUCL. II. 10.

VII.	Propositie is by ons	V. 10.
VIII.	———	V. 11.
IX.	———	V. 10. Gev.
X.	———	V. 17.
XI.	———	} V. 15.
XII.	———	}
XIII.	———	V. 16.
XIV.	———	V. 11. Gev. 2.
XV.	———	V. 11. Gev. 1.
XVI.	———	V. 7.
Gevolg.	———	V. 8.
XVII.	———	W. IV. 12.
XVIII.	———	} V. 8.
XIX.	———	}
XX.	———	V. 3.
XXI.	———	V. 3. Gev. 3.
XXII.	———	VI. 6.
XXIII.	———	VIII. 3. Gev. 3.
XXIV.	———	VIII. 3. Gev. 2.
XXV.	———	W. IV. 2.
XXVI.	———	} V. 4.
XXVII.	———	}
XXVIII.	———	} V. 4 Gev. 5.
XXIX.	———	}
XXX.	———	W. IV. 7.
XXXI.	———	V. 5.
XXXII.	———	V. 9.
XXXIII.	———	W. IV. 5.
XXXIV.	———	W. IV. 6.
XXXV.	———	V. 12.
XXXVI.	———	} V. 13. Gev. 2.
XXXVII.	———	}

IV. BOEK VAN EUCLIDES.

I.	Propositie is by ons	W. IV. 3.
II.	———————	W. V. 2.
III.	———————	W. V. 3.
IV.	———————	W. V. 4.
V.	———————	W. V. 5.
VI.	———————	W. V. 6.
VII.	———————	W. V. 7.
VIII.	———————	W. V. 8.
IX.	———————	W. V. 9.
X.	———————	W. III. 10.
XI.	———————	W. V. 11.
XII.	———————	W. V. 12.
XIII.	———————	W. V. 13.
XIV.	———————	W. V. 14.
XV.	———————	W. V. 15.
XVI.	———————	W. V. 16.

V. BOEK VAN EUCLIDES.

De I., II., III., V. en VI. Propositien, betreffen de byzondere leer van EUCLIDES omtrent de *Gelykvouwden*.

IV.	Propositie is by ons	III. 7.
VII.	———————	III. Axioma 1.
VIII.	———————	III. — 2.
IX.	———————	III. — 3.
X.	———————	III. — 2.
XI.	———————	III. — 5.
XII.	———————	III. 17.
XIII.	———————	III. Axioma 6.
XIV.	———————	III. 9.
XV.	———————	III. Axioma 4.

XVI.

XVI. Propositie is by ons	III. 7.
XVII. XVIII. ———	III. 8.
XIX. ———	III. 8. Gev. en A. 2.
XX. XXI. ———	III. 11. Gev. 1.
XXII. XXIII. ———	III. 11.
XXIV. ———	III. 12. Aanm.
XXV. ———	III. 9. Gev. 2.

VI. BOEK VAN EUCLIDES.

I. Propositie is by ons	IV. 6.
II. ———	IV. 1.
III. ———	IV. 9.
IV. ———	IV. 2. Aanm. 2.
V. ———	IV. 3.
VI. ———	IV. 4.
VII. ———	IV. 5.
VIII. ———	IV. 12.
IX. ———	W. I. 9.
X. ———	W. I. 10.
XI. ———	W. I. 15.
XII. ———	W. I. 16.
XIII. ———	W. I. 18.
XIV. XV. ———	IV. 7. Gev. 4.
XVI. XVII. ———	IV. 7. Gev. 5.
XVIII. ———	W. III. 29.
XIX. ———	IV. 13.
XX. ———	IV. 15.

XXI.	Propositie is by ons	(a)
XXII.	———————	IV. 16.
XXIII.	———————	IV. 7. Gev. 2.
XXIV.	———————	(b)
XXV.	———————	W. III. 30.
XXVI.	———————	(c)
XXVII.	———————	(d)
XXVIII.	———————	(d)
XXIX.	———————	(d)
XXX.	———————	W. I. 12.
XXXI.	———————	IV. 20.
XXXII.	———————	(e)
XXXIII.	———————	VIII. 1.

VII. BOEK

(a) De propositie is, „ Rechtlynige figuuren die aan eene „ en de zelfde figuur gelykvormig zyn, zyn onderling ge„ lykvormig." Dit is in de daad een Axioma.

(b) De propositie is (Fig. 32.) „ De parallelogrammen HI „ en FE, die om den diagonaal van een parallelogram „ AD staan, zyn onderling en met het gegeeven parallelo„ gram gelykvormig." Het kan als een Gevolg van ons II. Voorstel in het IV. Boek aangemerkt worden.

(c) De woorden zyn. „ Indien men (Fig. 32.) van een „ parallelogram AD, een ▭ GB afneemt, dat aan het „ eerstgemelde gelykvormig en gelykelyk geplaatst is, en „ eenen hoek FBE met het zelve gemeen heeft; zal dat „ parallelogram om den diagonaal van het eerstgemelde pa„ rallelogram staan." Zie hier over de Aanm. op IV. 2. Gev. 3.

(d) Zie hier over de 8 en 9 Aanmerking op 12. V.

(e) De propositie is: „ Indien twee driehoeken (Fig. 65.) „ ABC en CDE, waar in twee zyden evenreedig zyn aan „ twee zyden (AB : CD = BC : DE) zodanig met eenen hoek „ (BCA en DCE) aan elkander gesteld zyn, dat de eveneens„ geplaatste zyden (AB en CD: BC en DE) evenwydig aan „ elkanderen zyn, zullen de twee overige zyden (AC en CE) „ éénе rechte lyn ACE uitmaaken." Het wordt gemaklyk beweezen uit I. 4., IV. 4., I. 7. en I. 2.

VII. BOEK VAN EUCLIDES.

NB. Dit Boek, het VIII. en het IX., handelen over de eigenschappen der getalen: en dus behooren dezelve niet tot de Geometrie. 'Er worden echter uit dezelve in ons Werk eenige bepaalingen verklaard, en eenige propositien beweezen. Zie hier dezelve.

V. Bepaaling, is by ons III. Bep. 2.
XVI. ——— wordt uitgelegd IV. 7. Gev. 7. 8. Aanm. 9. bl. 154.
XVII. ——— XI. 11. Gevolg 3. Aanm. 2.
XVIII. ——— IV. 15. Gev. 1.
XIX. ——— XI. 12. Gev. 1.
XX. ——— III. Bep. 11. Aan. 4.
XXI. ——— IV. 7. Gevolg 7. Aanm. 9. en XI. 11. Gev. 3. Aanm. 2.
XI. Prop. is by ons III. 8.
XII. ——— III. 17.
XIII. ——— III. 7.: en III. 7. Aanm. 2.
XIV. ——— III. 11.
XVII. } XVIII. } ——— III. Axioma 4.
XIX. ——— III. 5.
XX. ——— III. 5. Gev. 1.
XXII. —— komt over een met III. 11.

VIII. BOEK VAN EUCLIDES.

V. Prop. is by ons IV. 7. Gev. 7. Aanm. 9.
XI. ——— IV. 7. Gevolg 7. aan het eind.
XII. ——— XI. 11. Gev. 3.
XIII. ——— III. 10. Gev. 1.
XVIII. ——— IV. 15. Gev. 2.

XIX.

XIX. Prop. is by ons XI. 12. Gev. 3. en Gev. 5. Aanm. 1.
XXI. ———————— XI. 12. Gev. 5. Aanm. 1.
XXVI. ———————— IV. 15. Gev. 2.
XXVII. ———————— XI. 12. Gev. 3.

IX. BOEK VAN EUCLIDES.

VIII. Prop. is by ons } III. 16. Gev. 1.
IX. ———————— }
XVIII. XIX. (a)
XXXV. Prop. is by ons III. 17.: Gev. 2.

X. BOEK VAN EUCLIDES.

In dit Boek, dat zeer moeijelyk te verstaan is, behandelt de Schryver de leer der onmeetbaare grootheden op eene zeer volleedige, en naar den trant der Ouden geschikte wyze: sommige Bepaalingen en Voorstellen worden ook o eenige plaatsen van ons Werk uitgelegd.

II.

(a) In deeze propositien stelt EUCLIDES voor te bepaalen, of men aan twee of drie gegeeven getalen een derde of vierde evenreedige vinden kan: het geen schynt te stryden met III. 5. Gev. 3. alwaar wy den regel om die getalen te vinden, als algemeen opgegeeven hebben. Doch de reeden is, dat EUCLIDES door het woord *getal*, geheel getal zonder breuken verstaat, en wy getal in het algemeen, het zy *geheel*, het zy *breuk*. Wanneer nu het product der middelste getalen niet zonder overschot door het eerste kan worden gedivideerd, is het gezogte getal geen geheel getal, en dus, volgens den zin in welken EUCLIDES dat woord neemt, geen getal.

II. Bepaaling is by ons III. Bep. 7.

III.
IV.
V.
VI. } ——— zie hier over IV. 7. Gev. 9. N°. 4.

I. Voorstel is by ons VII. 1.
IX. ——————— IV. 7. Gev. 9. N°. 4.
XIV. ——— *Lemma:* is by ons II. 7. Gev. 1.
XXII. ——— komt over een met IV. 7.: Gev. 9. N°. 1.
XXXIV. ——— *Lemma* 1. is II. 8. en het 2 Gev. van II. 8.

XI. BOEK VAN EUCLIDES.

I. Prop. is by ons X. Bep. 1. Aanm.
II. ——————— X. 1. en Gev. 2.
III. ——————— X. Bep. 2.: Aanm.
IV. ——————— X. 2.
V. ——————— X. 3.
VI. ——————— X. 4.
VII. ——————— (*a*)
VIII. ——————— X. 4.
IX. ——————— X. 5.
X. ——————— X. 6.
XI. ——————— X. 2. Aanm. 1.
XII. ——————— X. 4. Aanm.
XIII. ——————— X. 2. Gev. 1.

XIV.

(*a*) „ Indien twee rechte lynen evenwydig aan elkander „ zyn , en men een stip in ieder derzelven neemt , welke „ stippen men door eene rechte lyn vereenigt, zal die lyn „ in het zelfde vlak liggen als de twee gegeeven evenwy- „ dige lynen." Dit is een Axioma.

XIV.	Prop. is by ons	X. 7.
XV.	——————	X. 6.
XVI.	——————	X. 7. Gev. 2.
XVII.	——————	X. 8.
XVIII.	——————	X. 2. Gev. 3.
XIX.	——————	X. 2. Gev. 5.
XX.	——————	XI. 1.
XXI.	——————	XI. 2.
XXII.	—— zie by ons	XI. Bep. 2,.: Gev. 2. Aanm.
XXIII.	——————	XI. 3. Gev. 2.
XXIV.	——————	XI. Bep. 6. Gev. 1.
XXV.	—— is by ons	XI. 6.
XXVI.	——————	XI. 4. Gev. 1.
XXVII.	—— zie by ons	XI. Bep. 6. Gev. 3.
XXVIII.	—— is by ons	XI. 5.
XXIX. XXX.	——————	XI. 7.
XXXI.	——————	XI. 8.
XXXII.	——————	XI. 9.
XXXIII.	——————	XI. 12.
XXXIV.	——————	XI. 11. Gev. 1.
XXXV.	—— zie by ons	XI. 4. Gev. 2.
XXXVI.	—— is by ons	XI. 12. Gev. 4.
XXXVII.	——————	XI. 12. Gev. 2.
XXXVIII.	——————	X. 2. Gev. 4.
XXXIX.	——————	XI. 5. Gev. 3.
XL.	——————	XI. 15. Aanm. 1.

XII. BOEK VAN EUCLIDES.

I.	Prop. is by ons	VI. 9.
II.	——————	VII. 14.
III.	——————	XI. 19.
IV.	——————	XI. 20.

V.

VOORREEDE.

Toen ik, voor vyf jaaren, aan de Doorluchtige Schoole deezer Stad beroepen werd, om, onder andere takken der Wysgeerige Weetenschappen, ook de Wiskunde te onderwyzen, begreep ik dat het nuttig zoude zyn een kort begrip der Meetkunde op te stellen, om daarvan in myne lessen gebruik te maaken. Ik gaf het zelve in het jaar 1786 in het Latyn in het licht: en toen ik vóór een jaar begonnen heb, in hoope van aan een grooter aantal jonge lieden nuttig te zyn, myne lessen over de Meetkunde in het Nederduitsch te houden, moest ik ook het gemelde kort begrip in onze moedertaal uitgeeven. Dan, ik zag wel ras, dat ik met eene bloote vertaling, my zelven ten minsten, geenszins zoude voldoen: maar dat ik, by die geleegenheid, het geheele werk merkelyk moest verbeeteren, en in alle opzichten volmaaken: te meer, daar wy in onze taal met boeken van dien aart flecht voorzien zyn. Hier toe heb ik noch tyd, noch arbeid gespaard. Of het my heeft mogen gelukken een beeter en vollediger samenstel te vervaardigen, dan wy tot nu toe gehad hebben, staat niet aan my, maar aan den leezer, te beoordeelen.

Ik zal my niet uitlaaten over de manier om de Meetkunde voordeelig te onderwyzen: over den lof der Ouden; over dien van EUCLIDES *in het byzonder; over de groote vraag, of men, zo als eenigen willen, zyne grondbeginselen, zynen trant,*

trant, zyne orde, altoos volgen moet, en of het onmogelyk is eene andere orde dan de zyne te volgen, en echter goede grondbeginselen der Meetkunde voor den dag te brengen; over den waaren aart van mathematische en wel synthetische *bewyzen, naar den trant der Ouden; en of het niet mogelyk zy deezen stiptelyk te volgen, en echter eenige teekens te gebruiken die zy niet gebruikten. Wilde ik dit doen dan zoude deeze Voorreede een geheel Boek uitmaaken; doch ik moet iets zeggen over het doel dat ik my in dit Werk heb voorgesteld.*

Ik heb vooreerst getracht niets weg te laaten van den strikſten bewystrant der Ouden, waarvan EUCLIDES *en* ARCHIMEDES *ons zulke voortreflyke voorbeelden hebben nagelaaten, en geen moeite ontzien, om zeer naauwkeurige denkbeelden der zaaken voor te draagen; iets, dat op eene zeer aanmerkelyke wyze in de meeste heedendaagsche Boeken, die den naam van Grondbeginselen der Meetkunde draagen, verwaarloosd wordt. Den geest te vormen, denzelven aan die naauwkeurigheid van denkbeelden, aan dien strikten redeneertrant, aan die volmaakt aaneengeschakelde bewyzen, te gewennen, is een der hoofdvoorwerpen, welke men zich in het onderwyzen der Meetkunde voor oogen moet stellen: eene der voornaamste reedenen, die de jonge lieden moeten aanzetten om dezelve te leeren. „ 'Er is, zegt te recht, (*)* QUINTILIANUS, *„ in de Meetkunde een gedeelte*

„ *dat*

(*) *Instit. Orat. Lib. I. Cap.* 10. §. 8.

„ *dat voor de jeugd nuttig is: want het verstand „ wordt 'er door geoeffend, de geest gescherpt; de „ snelheid in de bevatting spruit uit dezelve voort: „ ja zelfs de Meetkunde is nuttig, niet zo als de „ andere konsten, wanneer men ze verstaat; maar „ ook zelfs wanneer men ze leert.*" *En het is juist dat gedeelte, dat gewigtige gedeelte, dat men verwaarloost. wanneer men iets van den strikten redeneeren bewystrant der Ouden agterweege laat, onder voorwendsel van de zaaken bevattelyker voor te stellen, of aangenaamer te maken.*

Het is om de oeffening van het verstand, de scherping van den geest te bevorderen, en deezen die buigzaamheid te doen verkrygen, waardoor hy zich, zo wel tot het bevatten der Waarheeden, als tot het oplossen der Werkstukken, bekwaam maakt, dat ik op verre de meeste plaatsen alleen de gronden, waarop de bewyzen der Voorstellen steunen, heb aangestipt; en de Werkstukken van de Voorstellen, (Theoremata,) *of Leerstukken, afgezonderd heb. Ik bedoel door het eerste, de jonge lieden aan te zetten om de bewyzen zelf op te maaken; het geen hun te minder moeijlyk zal vallen; daar ik alle de Voorstellen, die zy daartoe noodig hebben, heb aangehaald in die orde, in welke zy in het bewys moeten voorkomen. Ik heb die aanhaalingen meer of minder wydloopig gemaakt; naar maate zulks my noodig voorkwam, vooral voor die Voorstellen, welke ik niet gewoon ben in myne lessen uit te leggen en te bewyzen, en die dus met eene kleine letter gedrukt zyn. Veelal heb ik als dan het*

Bewys 'er geheel by gevoegd, inzonderheid op de moeijelykste plaatsen. Ik denk dat de jonge lieden, en andere liefhebbers der Meetkunde hierdoor een ruim veld van bespiegelingen en arbeid zullen bekomen. De aanhalingen van EUCLIDES *en eenige andere schryveren zullen den leezer in staat stellen, die schryvers te raadpleegen, hunne manier van betoogen met de myne te vergelyken, en daardoor een beeter begrip van de zaaken te verkrygen. Wanneer men in een Boek altoos het Bewys by het Voorstel aantreft, werkt de geest niet om het bewys te vinden, maar blyft ten dien opzichte geheel werkeloos. Wanneer een dergelyk Boek tot onderwys dient, kan de onderwyzer byna niets doen, dan mondeling het zelfde bewys herhaalen. Ik heb dus, ook om die reeden, verkoozen, daar toch myn Boek geschikt is om in myne lessen door my uitgelegd te worden, de bewyzen achterweege te laaten, dezelve in tegenwoordigheid myner toehooreren uit de aangestipte gronden op te maaken, en over derzelver aart en voortgang verscheidene Aanmerkingen 'er by te voegen: eene handelwyze, daar ik my zeer wel by bevonden heb.*

Ik herhaal het: men kan de leerlingen niet genoeg aanzetten, om zelve te werken, zelve iets optestellen: by gebrek van die voorzorg worden niet zelden de beste geesten verdoofd, of ten minsten traager dan zy anders zouden geweest zyn. Hierom heb ik de Werkstukken van de Voorstellen, dat is, het werkdaadige van het beschouwende gedeelte afgezonderd, en achter ieder Voorstel aangestipt, welk Werkstuk men

als

als dan in staat is op te lossen. Ik laat dus die Werkstukken door de jonge lieden zelve oplossen en bewyzen, en besteed eenen dag der weeke om hunne oplossingen na te zien. Ik heb my uitneemend wel met die handelwyze bevonden, en my meer dan eens verwonderd over de vaardigheid die de leerlingen in korten tyd in dit stuk verkrygen. Eindelyk, het is ook om die zelfde reeden, dat ik meer dan éêns in Gevolgen of Aanmerkingen heb doen opmerken, hoe men ééne en de zelfde zaak uit verschillende grondbeginselen kan bewyzen. Alle bewyzen, mits zy richtig zyn, zyn wel voor den Wiskonstenaar, maar niet voor den Wysgeer van gelyke waarde. Deeze houdt die voor de beste, welke meer rechtstreeks uit den waaren aart der voorwerpen afgeleid zyn. Het Theorema van PYTHAGORAS, *by voorbeeld, over den rechthoekigen driehoek, kan beweezen worden in den trant van* EUCLIDES, *zo als wy zulks in het* 7. *Voorstel van het* 11. *Boek gedaan hebben, of ook veel korter en gemaklyker uit de leere der gelykvormige driehoeken afgeleid (IV. Boek:* 12. *Voorstel Aanmerking* 3.) *: doch het eerste komt my voor, wysgeerig gesprooken, het beste te zyn. Ik laat nimmer eenige gelegenheid voorby gaan, van dergelyke byzonderheden aan myne Toehoorers te doen opmerken.*

Ik heb, ten tweeden, getracht, dit werk in eene bekwaame orde te schikken, en de verschillende soorten van voorwerpen, zo veel mogelyk, afzonderlyk te beschouwen. Het heeft niet weinig moeite gekost om zulks te verrichten zonder eenige gaaping. Het

kwam my voor het beste en geschiktste te zyn, de rechte lynen afzonderlyk te beschouwen, zonder derzelver eigenschappen uit die der driehoeken te moeten afleiden; en dan eerst tot de driehoeken over te gaan: de rechtlynige figuuren af te handelen, alvorens over den cirkel te spreeken, enz. Men klimt dus indedaad trapswyze en in eene geregelde orde op. Het derde Boek, dat over de evenreedigheid handelt, behoort niet tot de Meetkunde, als zodanig beschouwd, maar meer tot de Rekenkunde, of tot de Algebra *of Stelkunde Het maakt dus eene soort van tusschenpoozing, even als zulks by* EUCLIDES *voor zyn vyfde Boek plaats heeft.* *Misschien had het beeter geweest het zelve vooraan als eene Inleiding te plaatsen. Die in dat gevoelen staat, kan zulks doen: maar ik heb ondervonden dat het denkbeeld van* reeden *en* evenreedigheid *, hoe eenvoudig het indedaad ook zy, echter den leerlingen altoos moeijelyk voorkomt, en ik heb dus beeter geöordeeld door de twee eerste boeken hun verstand allengskens aan het beschouwen van afgetrokken denkbeelden te gewennen. Die moeijelykheid, welke zy in de beschouwing van reeden en evenreedigheid aantreffen, is zeekerlyk voor een groot gedeelte hieraan toe te schryven, dat men, in de reekenschoolen, dit denkbeeld byna in het geheel niet, of ten minsten zeer gebrekkig ontvouwt, hoewel byna alles in de reekenkunde daar op rust.*

Ik had na het II. Boek onmiddelyk het V. kunnen laaten volgen, en dan het XII. en XIII. Voorstel alleen op de wyze van EUCLIDES *kunnen bewyzen:*

en dit had ik ook in het eerste bestek van dit Werk gedaan: maar ik heb dit naderhand veranderd, om dat men dan buiten staat is van gewag te kunnen maaken van de reeden in welke de verschillende lynen in of tot den cirkel getrokken elkander snyden, dat is van het I. en II. Gevolg van het XII. en van het I., III., V., VI. en VII. Gevolg van het XIII. Voorstel; waar van men ook geen woord by EUCLIDES *aantreft. Ik heb dus verkoozen den cirkel geheel in het V. Boek na de leere der gelykvormige driehoeken en rechtlynige figuuren, die in het IV. Boek begreepen is, af te handelen: doch niets belet, dat iemand onmiddelyk, na dat hy het II. Boek ten einde gebragt heeft, die stukken van het V., die niet van het IV. afhangen, bestuudeere, zo hy zulks begeert.*

Het laatste dat ik bedoeld heb is een veel vollediger samenstel voor den dag te brengen dan tot hier toe geschied is. De grootste voorstanders van EUCLIDES *kunnen niet ontkennen, dat'er niet alles in* EUCLIDES *gevonden wordt wat men thans volstrekt nodig heeft om, of zich tot de prácktyk van de Meetkunde bekwaam te maaken, of tot de Natuur- en Sterrekunde over te gaan. Men vindt niets over de inhoudvinding der figuuren; niets, of byna niets, over de Theorie der veelhoeken; niets over de reeden van den omtrek van den cirkel tot den diameter; niets over de driehoeksmeeting; niets over de schoone ontdekkingen van* ARCHIMEDES *(die eerst 70 jaaren na* EUCLIDES *leefde) omtrent den cylinder, kloot, en keegel: enz. zo dat men, na* EUCLIDES *afgehandeld te hebben, nog*

dat alles uit andere boeken moet ontleenen. Zy kunnen niet ontveinzen dat men van de dertien of vyftien boeken van EUCLIDES*, thans alleen de zes eerste, het XI. en XII. gebruikt: het VII, VIII, IX, X, overslaat, om dat men die stoffe thans anders behandelt: het XIII, XIV en XV, deels om dat men ze minder nuttig acht, deels om dat men ze op dien trant als* EUCLIDES *ze behandeld heeft niet verstaan kan zonder het X. Boek, dat zeer moeijelyk is, volmaakt te verstaan. Die Boeken zyn echter in hunne soort vooral niet minder fraai dan de acht welke men gebruikt: het X. komt my voor een meesterstuk te zyn. Geeft men dan toe, dat er eenige stukken zyn die men beter kan, of anders mag, behandelen dan* EUCLIDES *gedaan heeft, waarom ook dan niet aan zyn geheele stelsel alle verbeetering en vermeerdering toegebragt die men nuttig oordeelt? Ik heb dus niet geschroomd zulks te doen: en men zal zien dat, ook uit dat oogpunt beschouwd, myn werk vollediger is dan de meeste, zo niet alle, de hedendaagsche Grondbeginsels der Meetkunde die my bekend zyn; daar ik in hetzelve niet alleen eenige Voorstellen uit het VII, VIII, IX. en X. Boek, maar ook het geheele XIII, XIV, en XV. Boek van* EUCLIDES *ingelascht, en zo kort en duidelyk als my mogelyk was beweezen heb.*

'Er zyn boven dien veele nuttige Voorstellen die niet by EUCLIDES *maar wel in andere* elementaire *werken gevonden worden: 'er zyn, die men in geene der laatstgemelden, maar elders verspreid, aantreft, en waar van echter het gebruik zeer aanmerklyk is,*

voor-

vooral in de Natuurkunde. Ik heb geoordeeld die ten in myn werk te moeten brengen. En zeeker, indien ik niet gevreesd had myn werk veel te omslagtig te maaken, en getwyffeld, of het wel genoegsaam in den tegenwoordigen smaak valt, zoude ik het nog veel vollediger hebben kunnen maaken. Hoe dikwerf heb ik, de Verhandelingen van verscheiden Akademiën, de werken van PAPPUS, VIETA, SNELLIUS *en anderen, vooral de* geometria sublimior *van* KRAFFT *ter deezer gelegenheid nagaande, niet met leedweezen veele schoone stukken achterweege gelaaten om niet te breedvoerig te zyn? en hoe dikwerf heb ik niet gewenscht dat eenmaal iemand de moeite op zich nam, om alle de Mathematische Voorstellen, die in honderden boeken wyd en zyd verspreid liggen, in één lichaam te verzamelen? dan zouden wy eerst onzen rykdom in de Meetkunde kennen: en daar men, met alle die Voorstellen in één geregeld lichaam te brengen, en het eene uit het andere te bewyzen, wel hier en daar eenige gaaping zoude bespeuren, zoude deeze, zo als ook de beschouwing zelve van dien voorraad, aanleiding tot het ontdekken van veele nieuwe eigenschappen geeven.*

Ik zal hier alle de byzondere Voorstellen die ik in het I. en II. Boek heb ingelascht niet optellen; doch alleen melden dat ik meen de leere der evenreedigheden vollediger dan gewoonlyk geschiedt behandeld te hebben: dat ik my niet herinner dat men iets van belang over de harmonische evenreedigheid *in onze taal aantreft, en dat dit stuk, hoe nuttig ook in de Natuurkun-*

de byna nimmer aangeroerd wordt: dat ik, zo wel in het IV. Boek (XII. Voorst. Gev. 4. en 5.) als in het V. (XIII. Voorst. 5, 6, en 7. Gevolg) het nodige gezegd heb tot het verstaan en beoordeelen van het vraagstuk om twee middel evenreedige lynen te vinden: dat ik in het VI. Boek de geheele leer der in- en omgeschreeven veelhoeken veel vollediger behandeld heb dan tot nu toe gedaan is: dat ik in de I. Afdeeling, in het XVII. Voorstel en vervolgens, het schoone stuk dat de Heer HENNERT *in de Verhandelingen der Haarlemsche Maatschappy over dit onderwerp heeft uitgegeven, tot zeer eenvoudige bewyzen heb gebragt, die ik den leezer verzoek met de algebraische bewyzen van dien Hoogleeraar te vergelyken: dat ik de schoone ontdekkingen van* HUIGENS, SNELLIUS, LUDOLF VAN CEULEN, DU FAY, SAURIN, *die byna in vergetelheid geraakt zyn, en zich in boeken bevinden die men naauwlyks meer leest, om derzelver nuttigheid en fraaiheid heb opgegeeven: en dat de II. Afdeeling byna geheel nieuw is.*

Ik heb in het VII. Boek met de leer der Limieten *begonnen, iets waarover wy in onze taal niets bezitten: die leer is het eenige middel om de Voorstellen die de reeden van den omtrek des Cirkels tot den diameter, den inhoud van den Cirkel, van Pyramiden, Cylinders, Keegels, Spheeren, betreffen, met naauwkeurigheid te bewyzen. Ook hebben zo wel* ARCHIMEDES *als* EUCLIDES *die leer meer of min ingewikkeld gebruikt. Zy is bovendien de eenige grond*

waar-

*waarop de berekeningen der hooge Mathesis rusten, indien men deeze naar behooren wil verklaaren, en niet tot het onnaauwkeurig en gansch on*mathematisch *denkbeeld van* oneindig groot *en* oneindig klein *zyne toevlugt neemen.*

Ik heb verder in het VII. Boek de ontdekkingen van ARCHIMEDES *niet alleen, maar ook van* SNELLIUS *en* HUIGENS, *die men nergens dan in de buiten gebruik geraakte schriften van die schryveren aantreft, opgegeeven en beweezen.*

Het VIII. Boek behelst verscheiden stukken die men doorgaands in andere boeken van deezen aart niet aantreft: ik heb in de II. en vooral in de III. Afdeeling meest alles uit het uitmuntende werk van den Heer CAGNOLI *ontleend: over het onderwerp van de III. Afdeeling was nimmer in onze taal geschreeven.*

Het IX. Boek of de Trigonometrie is veel volle-diger dan men ze immer, op den Heer CAGNOLI *na, dien ik meest gevolgd heb, behandeld heeft.*

In het XI. Boek *is de leer der regelmatige lichaamen in veele opzichten* op eenen geheel nieuwen *trant behandeld, zo als ook in het XII.* de leer *de inschryving van die zelfde lichaamen in den kloot: waardoor ik in staat gesteld ben om het geheele XIII XIV. en XV. Boek van* EUCLIDES *uit te leggen, zonder het X. van dien Schryver, dat ongemeen moeilyk is, te gebruiken: welke stukken, dus allen byeen verzameld, in geen der my bekende werken gevonden worden.*

De

De Leezer oordeele dan uit het gezegde, en nog meer uit het werk zelve, of en in hoe verre dit werk genoegzaam volledig, of vollediger dan andere kan genoemd worden. Hetzelve komt my voor zo wel voor meer als voor min gevorderden geschikt te zyn. Al wat met groote letters gedrukt is, maakt op zich zelve een geheel samenstel van de meest noodzakelyke Voorstellen uit. Men kan in den beginne het overige, dat met kleine letters gedrukt en voor meer gevorderden geschikt is, overslaan.

Ik wensch dat ik met dit werk, zo wel den leerlingen die my tot hunnen leidsman in de Meetkunde verkiezen, als mynen landgenooten, beminnaaren dier edele Weetenschap, dienst heb mogen doen: dit is myn eenig doelwit met het uitgeeven van hetzelve geweest; geenszins om roem voor my zelven te behaalen. Ik weet dat daartoe in deeze eeuw, en meer byzonder in dit tydvak der Weetenschappen, Werken van eenen geheel anderen aart vereischt worden.

Ik betuig openlyk mynen hartelyken dank aan mynen Vriend den Heer PIETER NIEUWLAND, *Lector in de Wis- Sterre- en Zeevaartkunde aan de Doorluchtige Schoole deezer Stad, voor de moeite die hy genomen heeft om, niet alleen de proeven, maar ook het geheele Werk, alvoorens het ter persse ging, na te gaan, en zo wel de proeven van veele drukfeilen als het Werk zelve van onnaauwkeurigheden te zuiveren, en met gewigtige aanmerkingen te verryken.*

Amsterdam 18 *July* 1790.

AAN-

AANWYZING

DER AANGEHAALDE

SCHRIFTEN.

D'ALEMBERT *Melanges de Philosophie:* 5 deelen in 8°. Wy hebben dit werk eenige weinige maalen aangehaald uit hoofde der uitmuntende aanmerkingen die in hetzelve gevonden worden over den aart der mathemathische bewyzen, en der grondbeginselen door sommige Wiskunstenaaren gebruikt.

ARCHIMEDES. De beste druk is; ARCHIMEDIS *opera quæ extant: illustrata per* D. RIVALTUM: *Parisiis* 1615: Folio. TACQUET heeft achter zynen EUCLIDES de belangrykste Voorstellen van ARCHIMEDES onder den tytel van *Selecta ex* ARCHIMEDE *Theoremata* gegeeven.

CAGNOLI, *Traité de Trigonométrie, rectiligne & sphérique, traduit de l'Italien*: Paris 1786. 4°. Het schoonste werk dat my over dit onderwerp bekend is, vooral voor de klootsche driehoeksmeeting, en de toepassing der driehoeksmeeting op de Landmeetkunde, de Algebra, en de Sterrekunde. Al wat ik in de III. Afdeeling zo wel van het VII. als van het IX. Boek gezegd heb, is daaruit ontleend.

LA CAILLE, *Leçons de Mathematiques. Paris* 1759. 8°.

Die Schryver wordt kortheidshalven door de letters L. C. aangeweezen.

——— *Leçons d'Astronomie. Paris* 1761. 8°.

LA CHAPELLE, *Institutions de Geometrie. Paris* 1765. 2 vol 8°. Dit werk vindt men in de I. Afdeeling van het VII. bestendig, en dan nog eens in het IV. Boek bl. 177. aangehaald.

CLAVIUS. Zie EUCLIDES.

DES

DESPARCIEUX, *Nouveaux Traités de Trigonometrie avec un traité de Gnomonique. Paris* 1741. 4°.

EUCLIDES. Zeer talryk zyn de uitgaven der Grondbeginselen van EUCLIDES: dit werk bestaat uit XV. Boeken, hoe wel 'er hoogstwaarschynlyk maar dertien van EUCLIDES zelven zyn. De meeste uitgaven behelzen alleen de zes eerste, het XI en het XII. Boek, de zeeven andere boeken worden thans byna nooit meer geleezen. De uitgaven in onze taal, door DOUW, COETS, LA BORDUS WARIUS enz. bezorgd, zyn genoegsaam bekend. Over derzelver waarde zal ik my niet uitlaaten; maar alleen zeggen dat ik nimmer de uitgave van alle de Boeken van EUCLIDES, in onze taal door C. J. VOOGT in 1695 bezorgd, gezien heb: en dat van alle de uitgaven van EUCLIDES, ik de volgende het hoogste schat:

EUCLIDIS *quae supersunt omnia: ex Recensione* DAVIDIS GREGORII: Gr. Lat. *Oxonii* 1703. folio.

Elementorum EUCLIDIS *Libri XV. curante* BAERMAN *Lipsiae* 1773. 8°. De Schryver heeft de bewyzen van EUCLIDES behouden, doch zo kort mogelyk voorgesteld.

EUCLIDIS *Elementorum Libri XV, breviter demonstrata operâ* IS. BARROW. Cantabrigae 1655. 8°.

EUCLIDIS *Elementorum* Libri XV, *auctore* C. CLAVIO. *Francfurti* 1607. Die uitgaave is met eene zeer breedvoerige uitlegging, en veele byvoegselen versierd: het een en ander kan, en moet ook somtyds geraadpleegd worden: het zal altoos met zeer veel vrucht geschieden.

Elementa Euclideae Geometriae. & Selecta ex ARCHIMEDE *Theoremata: quibus accedit Trigonometria: auctore* A. TACQUET: *Amstelodami* 1725. De aanmerkingen en byvoegsels zyn uitmuntende: de gewigtige Voorstellen van ARCHIMEDES treft men in geene andere *elementaire* boeken aan. De *Trigonometrie* is zeer goed. Deeze druk, door den Heer MUSSCHENBROEK bezorgd, is de beste, niet alleen om dat die Hoogleeraar 'er de

aan-

aanmerkingen van WHISTON heeft bygevoegd: maar ook om dat hy dezelve zo wel met de reeds gemelde *Trigonometrie* als met de *klootsche driehoeksmeeting* van SCHOTTUS verrykt heeft.

Elemens de Géometrie, contenant les six premiers livres D'EUCLIDE *par* M. KOENIG, *augmentés de l'onzieme & du douzieme livre par* J. J. BLASSIERE: *La Haye* 1762. 4°.

Deeze uitgave is vooral aantepryzen om de uitmuntende uitlegging van het V. Boek, en het Aanhangsel op het zelfde Boek, waar in de Heer KOENIG den aart der Logarithmen zeer wel verklaart.

Wy hebben ook in het XI. Boek de volgende uitgave aangehaald.

Euclides Elementa Geometrica, Libri XV. cui accessit Liber XVI. &c. authore Francisco Flussate Candalla: Parisiis 1566. *Folio.*

EULER, *Introductio ad Analysin infinitorum: Genevae* 1748. 2 deelen 4°.

HENNERT, *Elementa Matheseos purae. Ultrajecti* 1766. 3 vol. 8°. De *arithmetica* wordt door de letter *a*- de *Geometrica* door de letter *g* aangeweezen.

LA HIRE, *Sectiones Conicae. Parisiis* 1685. *Fol.* Een der uitmuntenste werken in den trant der Ouden geschreeven: het eerste gedeelte behelst eenige Voorstellen over lynen die in *Harmonische evenredigheid* gesneeden zyn: en het is daaromtrent dat ik dit werk heb aangehaald in het III. Boek bl. 116.

HORREBOW, *in continuam proportionem harmonicam Mathemata.* 1737. herdrukt in het eerste deel van deszelfs *Opera Mathematico-Physica. Havniae* 1740. 3 vol. 4°.

HUIGENS, *De Circuli magnitudine inventa: Lugd. Batav.* 1654. 4°. herdrukt in deszelfs *Opera varia: Lugd. Batav.* 1724. 4°.

L'HUILIER *Exposition élementaire des principes des calculs supérieurs. Berlin* 1786. 4°.

KAA-

KARSTEN, *Mathesis theoretica elementaris atque sublimior, Rostockii & Gryphiswaldiae.* 1760. 8°.

KOENIG. Zie EUCLIDES

G. W. KRAFFT, *Institutiones Geometriae Sublimioris: Tubingae.* 1753. 4°.

LAMI, *Elemens de Mathématiques, ou Traité de la grandeur.* Amsterdam 1710. 8°. Een zeer nuttig werk: wy hebben alleen van het laatste gedeelte van het VIII. Boek, dat over de Harmonische evenreedigheid handelt, gebruikt gemaakt.

LUDOLF VAN CEULEN, *Van den Cirkel*, Leiden 1615. 2e druk 4°.

———————— *Fundamenta Arithmetica & Geometrica vernacuo in latinum translata, a W. Sn. R. F.* (W. SNELLIO, RUDOLP. Filio) *Lugd. Batav.* 1615. 4°.

MACLAURIN, *Traité des Fluxions. Paris* 1746. 2 vol. 4°. Uit het Engelsch vertaald.

MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques. Paris* 1758. 2 vol. 4°.

——— ——— *Histoire des Recherches sur la Quadrature du Cercle. Paris* 1754. 8°. Een uitmuntend werk, dat zonder den naam des Schryvers is uitgekomen.

NEWTON, *Principia Philosophiae naturalis mathematica. Londini* 1726. 4°.

PAPPI, *Alexandrini, Collectiones mathematicae; a Frederico Commandino editae: Bononiae* 1660. folio.

PTOLEMAEI. *Almagestum seu magnae compositionis mathematicae opus.* In des Schryvers werken, door *Erasm. Oswald. Schrikkenhusius* uitgegeeven in het latyn *Basiliae.* 1551. folio.

ROBERT SIMSON. *Sectionum Conicarum Libri quinque. Edenburgi.* 1750. 4°.

TH. SIMPSON. *Elements of Geometry.* 2 *Edition. London* 1760 8°.

WILLEBRORDI SNELLII *Cyclometricus. Lugd. Batav.* 1621. 4°.

STEEN-

V. Prop. is by ons XI. 22.
VI. ——————— XI. 23.
VII. ——————— XI. 24.
VIII. ——————— XI. 25. Gev. 6.
IX. ——————— XI 25. Gev. 4.
X. ——————— XII. 8.
XI. ——————— XII. 2. Gev 2, en 9. Gev. 1.
XII. ——————— XII. 5. en 9. Gev. 3.
XIII. ——————— } XII. 2. Gev. 4. en 9 Gev. 1.
XIV. ——————— }
XV. ——————— XII. 9. Gev. 2.
XVI. ——————— } (a)
XVII. ——————— }
XVIII. ——————— XII. 28.

XIII. BOEK VAN EUCLIDES.

I. Prop. is by ons IV. 7. Gev. 6. Aanm. 7.
II. }
III. } (b)
IV. }

V.

(a) Twee onnuttige Problemas: doch een gedeelte van de bewerking van het XVII. kan tot ons 5. Gevolg van 32 XI. gebragt worden.

(b) De Ouden hadden veel op met de snyding van eene lyn in uiterste en middelste reeden: waarom zy die snyding ook de *goddelyke snyding* noemden. Om niets over te slaan van het geen men by EUCLIDES op dit stuk vindt, zullen wy aantoonen, hoe die Propositien die wy in ons Werk niet ingelascht hebben, echter uit die welke wy beweezen hebben volgen: en om den leergierigen leezer aan den trant der Ouden te gewennen, zullen wy de zes eerste Propositien van EUCLIDES in zyne bewoordingen laaten volgen; na alvorens

V. Prop. is by ons IV. Bep. 2. Aanm. 2.

VI.

herinnerd te hebben, dat wy in het VII. Gevolg van 7. IV. verklaard hebben, wat de Ouden door *magt* van eene lyn verstaan. Zie hier de Propositiën van EUCLIDES in derzelver orde, doch beweezen uit onze VI., VII. en VIII. Aanmerking op 7. IV., waarvan deeze allen Gevolgen zyn.

I. PROPOSITIE. Indien eene lyn in uiterste en middelste reeden gesneeden is, *kan* het grootste deel, te samen met de helft van de geheele lyn, het vyfvoud van het vierkant der halve lyn.

Dat is Fig. 155 □ op $[BH + \frac{1}{2} BD] = 5$ □ op $\frac{1}{2}$ BD: of
$$BH + \tfrac{1}{2} BD = \tfrac{1}{2} BD \times \sqrt{5}$$

I. GEVOLG. Dus $BH = \frac{1}{2}BD\sqrt{5} - \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}BD(\sqrt{5}-1)$ Zie pag. 153 Aanm. 7.

II. GEVOLG. Dus $BD = \dfrac{2\,BH}{\sqrt{5}-1}$.

II. PROPOSITIE. Indien eene lyn KI (Fig. 155.) het vyfvoud *kan* van haar deel BK, en het dubbeld BD van dat deel in uiterste en middelste reeden gesneeden wordt, zal het grootste stuk daarvan gelyk zyn aan het overschot BI van de eerstgemelde lyn KI.

BEWYS. Uit de onderstelling is $KI = BK\sqrt{5}$: dus
$$BI = KI - BK = BK\sqrt{5} - BK = BK(\sqrt{5}-1)$$
Maar zo $BD = 2\,BK$ in uiterste en middelste reeden gesneeden wordt, is het grootste deel $= \frac{1}{2} BD(\sqrt{5}-1)$ $= BK(\sqrt{5}-1)$. Zie de voorgaande Propositie. Dus is dat grootste deel gelyk aan BI.

III. PROPOSITIE. Indien eene lyn L in uiterste en middelste reeden gesneeden is, *kan* het kleinste deel (K) met de helft van het grootste (G) het vyfvoud van het vierkant op de helft van het grootste deel G.

BEWYS. Daar $K : G = \frac{1}{2} L(3-\sqrt{5}) : \frac{1}{2} L(\sqrt{5}-1)$ (VI. en VII. Aanm. op IV. 7.)

is

VI. Prop. is by ons IV. 7. Gev. 6. Aanm. 6.

VII.

is $K : G = 3 - \sqrt{5} : \sqrt{5} - 1$ en dus (III. 5.)

$$K = \frac{G\,(3-\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1} \text{ : en}$$

$$K + \tfrac{1}{2} G = \tfrac{1}{2} G \left(1 + \frac{2\,(3-\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} G \left(\frac{\sqrt{5}-1+6-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} G \,\frac{(5-\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1} = \tfrac{1}{2} G.\sqrt{5}.$$

IV. PROPOSITIE. Indien eene lyn (L) in uiterste en middelste reeden gesneeden is, is de som der beide vierkanten op het kleinste deel (K) en van de geheele lyn (L) het drievoud van het vierkant op het grootste deel (G).

BEWYS. $\square$ op $K = \frac{1}{4} \square$ op $L \times (3-\sqrt{5})^2$

dus $\square$ op $K + \square$ op $L = \frac{1}{4} \square$ op $L\,(4 + 9 - 6\sqrt{5} + 5)$

$= \frac{1}{4} \square$ op $L \times (18 - 6\sqrt{5})$

Maar $\square$ op $L = \dfrac{4 \square \text{ op } G}{(\sqrt{5}-1)^2}$ (I. Prop. 2. Gev.)

dus $\square$ op $K + \square$ op $L = \dfrac{\square \text{ op } G\,(18-6\sqrt{5})}{6-2\sqrt{5}} = 3 \square$ op G.

V. PROPOSITIE. Indien eene lyn in uiterste en middelste reeden gesneeden is, en men voegt 'er een stuk aan gelyk aan het grootste stuk, zal die geheele lyn weder in uiterste en middelste reeden gesneeden zyn: en de eerst gegeeven lyn zal 'er het grootste stuk van zyn.

I. AANMERKING. Zie het Bewys, IV. Bep. 2. Aanm. 2.: en uit het Bewys blykt, dat men ook aldus had kunnen redeneeren:

$L : G = G : K$: dus $L - G : G = G - K : K$:

dat is $K : G = G - K : K$ of $G - K : K = K : G\ (= L - K.)$

Dat is: „Indien eene lyn in uiterste en middelste reeden

 ge-

VII. (*b*)
VIII. Prop. is by ons IV. 21, 2e gedeelte.
IX. ———— VI. 13. Gev. 3.
X. ———— VI. 14.
XI. ———— VI. 14. Gev. 1. (*c*)

XII.

gesneeden is, en men van het grootste deel (aan het uit einde van de lyn te beginnen) een stuk afsnydt gelyk aan het kleinste stuk, zal het overschot ook in uiterste en middelste reeden gesneeden zyn: en het kleinste stuk van de gegeeven lyn, zal nu het grootste stuk zyn.

II. AANMERKING. Het blykt dan dat, wanneer men eens eene lyne heeft die in uiterste en middelste reeden gesneeden is, men 'er altoos zo wel grooter en grooter, als kleiner en kleiner, zo veel men wil, vinden kan: men heeft slechts aan de gegeeven lyn een stuk te voegen gelyk aan het grootste stuk, of er een stuk van af te trekken gelyk aan het kleinste: en geduurig aldus met ieder der lynen die als dan gebooren worden voort te gaan.

VI. PROPOSITIE. Indien eene lyn in uiterste en middelste reeden gesneeden is, is ieder stuk *onmeetbaar*, en wordt *apotome* genaamd.

BEWYS. Zie het zelve IV. 7. Aanm. 6 en 7.: p. 152 en 153. alwaar wy aangetoond hebben, dat $G = \frac{1}{2} L (\sqrt{5} - 1)$ en $K = \frac{1}{2} L (3 - \sqrt{5})$.

Doch EUCLIDES noemt *apotome* (X. 74.) het verschil van twee grootheeden die onmeetbaar in lengte, doch meetbaar in magt zyn: zo als hier $\sqrt{5}$, 1, en 3 het zyn: want de vierkanten 5, 1, 9 zyn meetbaar.

(*b*) De 7de propositie is deeze. Zo in eenen gelykzydigen vyfhoek drie hoeken, het zy die op elkander volgen, het zy die niet op elkander volgen, gelyk zyn, is de vyfhoek gelykhoekig.

(*c*) De propositie van EUCLIDES is deeze: Indien men een vyfhoek beschryft in eenen cirkel wiens middellyn meetbaar is,

XII. Prop. is by ons VI. 16. voor het 1e gedeelte.
XIII. ——— XII. 25. Aanm. II. N°. I. en Aanm. IV. N°. I.
XIII. *Lemma* —— IV. 12. Gev. 3.
XIV. Prop. ——— XII. 25. Aanm. II. N°. II. en Aanm. IV. N°. II.
XV. ——— XII. 25. Aanm. II. N°. III en Aanm. IV. N°. IV.
XVI. } XVII. } ——— XII. 25. Aanm. II. en Aanm. IV. N°. III. en V.
XVIII. ——— XII. 25. Aanm. II. en III.
XVIII. Scholium —— XI. 30. Gev. 1.
——— *Lemma* komt, wat den vyfhoek betreft, over een met II. 11. Gev. 1.

XIV. BOEK VAN EUCLIDES.

I. Prop. is by ons VI. 13. Gev. 2.
Gevolg —— VI. 8. Gev. 3. voor het 1 ged.
II. Prop. ——— XII. 25. Gev. 5.
Lemma —— VI. 14. Gev. 2.

III.

le, is de zyde van den vyfhoek eene onmeetbaare grootheid die men *kleine onmeetbaare* noemt. Wy hebben beweezen, VI. 14. Gev. 1., dat de zyde van den vyfhoek onmeetbaar is met betrekking tot den radius: vervolgens: bl. 433 reg. 2: dat zo BG de radius is van den cirkel, en BI de zyde van den vyfhoek, $BI^2 = BG^2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{BG}{2} \times BG$ $(5-\sqrt{5})$: en eindelyk bl. 468, dat BG $(5-\sqrt{5})$ het geen is, dat EUCLIDES eene *vierde apotome*, en dat $\frac{BG}{2} \times BG \times$ $(5-\sqrt{5})$ eene grootheid is, die hy *Kleine onmeetbaare* noemt.

III. Prop. is by ons XI. 34. N°. V.
IV. ——— ——— XII. 25. Aanm. 5. Gev. 1.
Lemma ——— VI. 15.
V. Prop. ——— XII. 25. Aanm. 5. Gev. 4.
VI. ——— ——— XII. 25. Aanm. 5. Gev. 2.
VII. ——— ——— IV. 7. Aanm. 8.

XV. BOEK VAN EUCLIDES.

I. Prop. is by ons XI. 32. Gev. 3.
II. } III. } ——— ——— XI. 32. Gev. 4.
IV. ——— ——— XI. 32. Gev. 5.
V. Prop. ——— XI. 32. Gev. 6.
VI. ——— ——— XI. 31.
VII. ——— ——— XII. 33. Aanmerking.

AANWYZING DER VOORSTELLEN, WELKE MEN BEHOORT TE VERSTAAN, OM IEDER DER WERKSTUKKEN TE KUNNEN OPLOSSEN.

I. BOEK DER WERKSTUKKEN.

I. Werkstuk } II. ——— } na I. Axioma 6.
III. ——— ——— I. 11. Gev. 4.
IV. N°. 1. ——— I. 11. Gev. 4.
N°. 2. ——— V. 5.
V. ——— ——— I. 12. Gev. 3.
VI. ——— ——— I. 12. Gev. 3.
VII. ——— ——— I. 12. Gev. 3.

VIII.

VIII. N°. 1. Werkst. na I. 20, Gev. of IV. 1, Gev.
N°. 2. ———— IV. 2.

IX. Werkstuk na IV. 1. Gev.
X. ———— IV. 1. Gev.
XI. ———— IV. 2. Gev. 1.
XII. ———— II. 7. Gev. 5.
XIII. ———— V. 13. Gev. 2.
XIV. ———— V. 12. Gev. 3.
XV. } XVI. } XVII. } ———— IV. 2. Gev. 1.
XVIII. } XIX. } XX. } ———— VI. 12. Gev. 3. of V. 5. en IV. 12. Gev. 1.
XXI. ———— IV. 2.
XXII. ———— IV. 2.

II. BOEK DER WERKSTUKKEN.

I. Werkstuk na I. 12. Gev. 3.
II. ———— I. 11. Gev. 2.
III. ———— I. 12. Gev. 1.
IV. ———— I. 12. Gev. 3.

III. BOEK DER WERKSTUKKEN.

I. Werkstuk na I. 15.
II. } III. } ———— I. Axioma 6.
IV. ———— I. 19. Gev. 2.
V. } VI. } ———— V. 5.

VII. Werkstuk na I. 19. Gev. 2.
VIII. ——— V. 5.
IX. ——— V. 4. Gev. 6.
X. N°. 1. ——— V. 13. Gev. 2.
N°. 2. ——— II. 16. Gev. 4.
XI. XII. } ——— II. 1. Gev. 6.
XIII. N°. 1. ——— II. 1. Gev. 6.
N°. 2 ——— IV. 7. Gev. 4.
XIV. N°. 1. ——— II. 1. Gev. 6.
N°. 2. ——— IV. 7. Gev. 4.
XV. N°. 1. ——— II. 1. Gev. 6.
N°. 2. ——— IV. 7. Gev. 8. N°. 2.
N°. 3. ——— V. 12. Gev. 1.
XVI. XVII. XVIII. } ——— II. 1. Gev. 6.
XIX. ——— V. 12. Gev. 3.
XX. N°. 1. ——— N°. 2. ——— } IV. 6.
XXI. ——— IV. 7. Gev. 3.
XXII. ——— IV. 6.
XXIII. XXIV. } ——— II. 1. Gev. 6.

[redacted]

VII. Werkſtuk na I. 19. Gev. 2.
VIII. ———— V. 5.
IX. ———— V. 4. Gev. 6.
X. N°. 1. ———— V. 13. Gev. 4.
N°. 2. ———— II. 16. Gev. 4.
XI. }
XII. } ———— II. 1. Gev. 6.
XIII. N°. 1. ———— II. 1. Gev. 6.
N°. 2 ———— IV. 7. Gev. 4.
XIV. N°. 1. ———— II. 1. Gev. 6.
N°. 2. ———— IV. 7. Gev. 4.
XV. N°. 1. ———— II. 1. Gev. 6.
N°. 2. ———— IV. 7. Gev. 8. N°. 8.
N°. 3. ———— V. 12. Gev. 1.
XVI. }
XVII. } ———— II. 1. Gev. 6.
XVIII. }
XIX. ———— V. 12. Gev. 3.
XX. N°. 1. ———— }
N°. 2. ———— } IV. 6.
XXI. ———— IV. 7. Gev. 3.
XXII. ———— IV. 6.
XXIII. }
XXIV. } ———— II. 1. Gev. 6.
XXV. ———— II. 7. Gev. 5.
XXVI. ———— V. 5.
XXVII. ———— II. 7. of V. 5.
XXVIII. (*a*) ———— II. 7.
XXVIII. (*b*) ———— II. 1. Gev. 6.
XXIX. Werkſtuk na IV. 14.

XXX.

XXX. }
XXXI. }
XXXII. } ———— IV. 15.
XXXIII. }
XXXIV. }
Gevolg. ———— IV. 12. Gev. 3.
XXXV. ———— IV. 20.

IV. BOEK DER WERKSTUKKEN.

I. Werkstuk N°. 1. na V. 6. Gev.
———— N°. 2. — V. 5.
II. ———— na V. 6. Gev.
III. }
IV. } ———— V. 11. Gev. 1.
V. ———— V. 9.
VI. ———— V. 9.
VII. ———— V. 4. Gev. 5.
VIII. ———— V. 4. Gev. 5.
IX. ———— V. 4. Gev. 5.
X. ———— IV. 2. Gev. of V. 6. Gev.
XI. }
XII. } ———— V. 7. Gev. 1.
XIII. }
XIV. }
XV. } ———— V. 7. Gev. 1.
XVI. }
XVII. }
XVIII. } ———— V. 15.
XIX. }

CD op CA, en de lynen DC, CE maaken éénerechte lyn uit; en dus, zo men wil, eenen hoek gelyk aan twee rechte hoeken, die ook in de daad het drievoud is van den hoek in een' gelykzydigen driehoek.

Bl. 29. reg. 4 *van onderen* XI. *lees* IX.
30. — 12 AH *lees* AK.
37. — 14 6. Gevolg *lees* 8 Gevolg.
38. — 10 ——— XIX. *lees* VIII.
— III. Gevolg. *Het blykt van zelf dat dit Gevolg eveneens plaats heeft voor het verschil van verscheiden rechthoeken als voor derzelver som, en dat men het dus kan uitdrukken in het algemeen Fig.* 52. *stellende* IH = HG.

De som (LG) of het verschil (LI) van verscheiden rechthoeken (LH, PG) die de zelfde hoogte doch verschillende grondlynen hebben, is gelyk aan eenen rechthoek (LG of LI) wiens hoogte de zelfde, en wiens grondlyn de som (KG = KH + HG) of het verschil (KI = KH − IH = KH − HG) van de gegeeven grondlynen is.

39. reg. 7 *van onderen af.* 14. I. Oplossing *lees* 14. (I (Oplossing) en 15. (I. Oplossing.)
41. — 12 *van onderen af* BH *lees* KH.
42. — 9 ——— ——— EUCL. I. 37. *lees* EUCL. I. 37. en 38.
43. reg. 12 op de zelfde grondlyn. *lees* op de zelfde grondlyn of op gelyke grondlynen.
reg. 25 VII., *lees* VIII.
45. *laatste regel* (AD) *lees* (CD)
47. reg. 5 *voeg by* en Voorst. V.
47. *reg.* 7 is (MN) het vierkant. *lees* is het vierkant.
49. — 20 en XI. *lees* en X.
55. — 20 VII. — IX.
57. — 14 *van ond.* XVIII. *lees* XXI. en in het 3. Gev. van het XXIX.
58. — 10 XVIII. *lees* XXI. en het 5 van het XXX.
66. — 11 3. *lees* 2.
68. — 1 prof. *lees* defin.
68. — 2 IX. — VII.

Bl. 68.

Bl. 68. *reg.* 4 *a* lees *m.*
5 *a.* — *n.*
76 — 16 geval — getal
77. — 3 D — B
79. — 9 $\frac{A}{B}$ — $\frac{B}{A}$
87. — 8 *m*B — *n*B
88. — 4 *van onderen* E *lees* C
102. *reg.* 9 ——— VIII. *lees* V.
laatste regel. Uit de XII. Bep. het X. en XII. Voorstel. *lees* Uit de XII. en XVII. Bep. en het X Voorst.
108. *reg.* 9 eerste *lees* tweede
116. — 18 A*a* *lees* AD,
128. — 4 evenredigheden *lees* evenredigen
135. *laatste regel* XXVII. *lees* XXXVII.
143. — 5 (III. 5.) *lees* (III. Axioma 5.)
144. — 17 *voeg by* III. AANMERKING. Men kan thans het XI, XV, XVI, XVII, XXI, en XXII. Werkstuk van het I. Boek oplossen.
146. reg. 10 en 9 *van onderen* om eenen anderen hoek staan *lees* om den derden hoek (A en D) staan.
147. reg. 12 en 11 *van onderen* L ABC = L DEF *lees* L DEF = L ABC
reg. 8 *van onderen* (by voorb. C en F) *lees* (E en B).
150. III. Gevolg reg. 3 (5. en 6. III.) *lees* (9. en 6. III.)
——— *laatste reg.* de eerste Oplossing van het XI. *lees* de Oplossing van het XXI.
154. *de* 4 *laatste regels. Deeze Bepaaling van* vlakke plaatsen *wordt nader en naauwkeuriger ontwikkeld.* p. 197. Aanm. IX.
174. reg. 4 gelykvormige figuuren *lees* gelykvormige en eveneens geplaatste figuuren.
174. reg. 15 II. Boek *lees* III. Boek.
184. — 6 VIII. — VII.
186. — 19 of uit I. 10. — of uit I. 12.
190. — 23 XV. Voorstel — XIV. Voorstel.

Bl. 191. — 8 drie — twee.
194. — 21 IV. en V. Gevolg — III. IV. en V. Gev.
197. — 13 *van ond.* Tab. V. — Tab. VII.
198. — 7 Tab. IV. — VI.
203 — 8 van onderen KI *lees* EI
—— 19 AP *lees* AH
208 — 13 in eene andere *lees* in eenen cirkel
213 — 12. 5 Gevolg van het 10 *lees* 2. Gev. van het 12.
220. — 2 onze aanmerkingen — het Gevolg
3 XXXI. — XXXIII, N°. III. en V. en XXXIV. N°. V.
221. reg. 7 *van onderen* X. Boek *lees* XIII. Boek.
222. — 3 XV. *lees* XIV.
226 — 3 van onderen 112 *lees* 2 : 1
234. — 8 —— GCK — GCR
236 reg. 17 van ond. 2 =: 3 *lees* = 2 : 3
238 — 7 op het dubbeld NG *lees* op NG
239 — 5 rechthoek *lees* veelhoek
251 — 3 van onderen XI. *lees* XVI.
260. — 11 —— $\frac{2}{3} + \frac{1}{16} — \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$
271. — 2 —— (IV.) — (IV. 20.)
344. — 15 AC — AE
374. — 10 *voeg by* EUCL. XI. 13.
420. — XXXIX. VOORSTEL. — XXIX. VOORSTEL.
429. — 10 *van onderen* XIII. *lees* XII.
438. reg. 3 *van onderen* AV^2 — AV^3
455. *voeg by na reg.* 5

III. GEVOLG.

Gelykvormige Keegels staan tot elkander in driedubbele reeden van de middellynen hunner grondvlakken. EUCL. XII. 12.

WERKSTUKKEN.

Bl. 24. reg. 3 ABID *lees* ABCD
39. *laatste reg.* EUCL. IV. 9. *lees* EUCL. IV. 8.

IN-

INLEIDING.

I.

De Meetkunde is dat gedeelte der Wiskunde, dat de eigenschappen der uitgebreidheid navorscht, en dezelven door zeekere redeneeringen bewyst.

II.

De uitgebreidheid en haare drie afmeetingen, lengte, breedte en dikte, zo wel als de Figuuren die daar uit ontstaan, zyn het onderwerp der Meetkunde.

III.

Het is enkel door eene aftrekking des Verstands, dat men die drie afmeetingen van de lichaamen zelven afscheidt, om ze afzonderlyk te kunnen beschouwen.

IV.

Het Voorwerp der Meetkunde is dus een afgetrokken en zeer eenvoudig denkbeeld.

D'ALEMBERT. *Melanges*, T. IV. p. 158—60.

V.

Het is aan die eenvoudigheid van het Onderwerp, aan de Grondbeginselen welke de Meetkundigen stellen, en aan de wyze op welke zy voortgaan, dat men de klaarblykelykheid der Meetkunde verschuldigd is.

D'ALEMBERT. *Melanges*, T. IV. p. 164.

VI.

De Grondbeginsels waaruit de Wiskonstenaars hunne bewyzen ontleenen, zyn de bepaalingen zelve der voorwerpen die zy beschouwen; waar by sommigen eenige algemeene kundigheeden voegen, die zo klaarblykelyk zyn dat niemand van gezond verstand 'er aan kan twyfelen. Deeze worden *Axiomata* genoemd: zo als

1°. Twee grootheeden die aan één en het zelfde gelyk zyn, zyn onderling gelyk.

2°. Het deel is kleiner dan het geheel.

3°. Alle de deelen te saamen maken het geheel uit.

4. Indien men gelyke grootheden by gelyke groot-

he-

heden voegt, of van dezelven aftrekt, zyn de sommen of de verschillen ook gelyk.

VII.

De Wiskonstenaars maken van twee soorten van bewyzen gebruik: de *rechtstreeksche* en de *bewyzen uit het ongerymde*.

Een bewys, dat *rechtstreeks* voortgaat, bestaat hierin, dat men, door eene aanëengeschakelde redeneering, het geen beweezen moet worden uit de eenmaal gestelde grondbeginselen afleidt.

VIII.

De *bewyzen uit het ongerymde* bestaan hierin, dat men bewyze dat eene zaak waar is om dat ze niet valsch kan zyn: dat is, om dat, indien men stelt dat zy valsch, en dus het tegengestelde waar is, men in ongerymdheden vervalt.

D'ALEMBERT. *Melanges*, T. IV. p. 166.: men treft reeds een voorbeeld van die bewyzen aan, in I. 1. Gev. 2. bl. 13.

IX.

Men maakt in beide de soorten van bewyzen een geduurig gebruik van het grondbeginsel van *op elkander stelling* (*superpositio*) en *overéénkomst* (*congruentia.*) Men verbeeldt zich namelyk, dat eene Figuur zodanig op eene andere geplaatst zy, dat eenige der deelen van de eerstgemelde met eenige deelen der laatstgemelde overeenkomen of op dezelven vallen: en men besluit daaruit, of alle de andere deelen van de eerstgemelde Figuur op alle de andere deelen van de laatstgemelde vallen, en dus of die beide Figuuren geheel met elkander overeenkomen, en gevolgelyk onderling gelyk zyn, ja dan neen.

D'ALEMBERT. *Melanges*, p. 165, 166. Dit grondbeginsel is het oorspronkelyk grondbeginsel van gelykheid; zie I. Boek Bep. VI. Aanm. III. bl. 4. en reeds in het VIII. Voorstel van het zelve (bl. 20) een voorbeeld van die soort van bewyzen.

GROND-

GRONDBEGINSELS
DER
MEETKUNDE
EERSTE BOEK.

OVER DE ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN DER RECHTE LYNEN, ZO WEL IN ZICH ZELF BESCHOUWD, ALS IN ZO VERRE ZY DE HOEKEN VAN DRIEHOEKEN EN VIERHOEKEN UITMAAKEN, OF DERZELVER ZYDEN ZYN.

BEPAALINGEN.

I.

Wanneer men de uitgebreidheid alleen met betrekking tot haare *lengte* beschouwt, op de *breedte*, en *dikte* geen acht geevende, maar deeze beiden aftrekkende, verkrygt men het denkbeeld eener *linie* of *lyn*.

AANMERKING. Van daar de gewoone spreekwyze der Wiskonstenaaren, dat de lyn *eene lengte is zonder breedte, of dikte*. AB, CDE, fig. 1.

EUCL. I. 2. Bep. —— W. g. §. 2. —— St. p. 2. d. 2.

II.

De uiteinden der lynen, en haare onderlinge snydingen, worden *stippen* genoemd.

I AANMERKING. Van daar de gewoone spreekwyze der Wiskonstenaaren, dat *de stippen geen deelen bezitten*. A, B. fig. 1. A, B, C, D, E. fig. 2.

EUCL. I. 1 en 3 Bep. — W. g. §. 2. — St. p. 2. d. 2.

II AANMERKING. Sommigen beschouwen de lyn als door

den geduurigen voortgang van een ftip gebooren; zo men wil, als de *moet* of het *fpoor* dat een bewogen ftip zoude nalaaten.

III.

Eene *rechte* lyn is eene zodanige lyn, die overal gelyklyk tusfchen haare ftippen gelegen is, Fig. 1. A B: eene *kromme* lyn, die ongelyklyk tusfchen dezelven gelegen is. C D E.

I AANMERKING. Anderen zeggen: eene rechte lyn is die, welke de kortfte is tusfchen twee ftippen. Wy zullen in de Aanmerking op het 15de Voorftel zien of deeze bepaaling goed is.

EUCL. I. 4 bep. —— W. g. §. 8.

II AANMERKING. Het is met deeze bepaaling gelegen, even als met alle de bepaalingen der dingen die te eenvoudig zyn, om met woorden uitgelegd te kunnen worden: zy zyn allen zeer onvolmaakt, en zeer duister. De Heer D'ALEMBERT heeft hier over uitmuntend gehandeld, in zyne *Melanges de Philofophie* IV Deel bl. 163 en 164: V. Deel bl. 203-206.

IV.

Men noemt *oppervlakte* eene ruimte die men alléén met betrekking tot de lengte en breedte befchouwt, op de *dikte* niet lettende, maar dezelve aftrekkende, zo als A B D A, fig. 3. A B D E, fig. 4.

I AANMERKING. Van daar de fpreekwyze der Wiskonftenaaren: dat de Oppervlakte alleen *lengte* en *breedte*, doch geen *dikte* bezit.

EUCL. I. 5 bep. —— St. p. 2. 3 bep.

GEVOLG. De uiteinden eener oppervlakte zyn lynen: het zy kromme, het zy rechte lynen.

II AANMERKING. Sommigen befchouwen de oppervlakte, als door den geduurigen voortgang eener lyn gebooren: als 't ware het *fpoor* of de *moet*, die eene lyn, by haare beweeging nalaat.

V.

V.

Een *Vlak*, of *effen* oppervlakte, of *platte* oppervlakte, is eene zodanige welke overal gelyklyk tusschen haare uiteinden ligt.

EUCL. I. 7 bep.

I AANMERKING. Anderen bepaalen het *Vlak* aldus: eene oppervlakte, welke eene rechte lyn in alle haare deelen kan raaken: *op welke* eene rechte lyn geheel past en sluit.

Zie CLAVIUS op de 7 bep. van het I. Boek van EUCLIDES —— St. p. 3. 6 Bep.

II. AANMERKING. Wy zyn hier wederom in het geval, waarvan wy in de II Aanmerking van onze III Bepaaling gewag gemaakt hebben.

VI. Fig. 5.

De onderlinge helling van twee lynen (AB en EB, of GF en KF,) die in het zelfde vlak geleegen zyn, en verlengd worden, tot dat zy elkander in eenig stip (B of F) snyden, wordt een *vlakke Hoek* genoemd. Die hoek is rechtlynig, zo de lynen, die denzelven uitmaaken, recht zyn.

Het stip (B of F), waar de beide lynen elkander ontmoeten, of waar zy zich snyden, wordt de *Kruis* of de *Top* van den hoek genoemd: de lynen zelve (BA, BE, of GF, KF), zyn de *beenen* van den hoek.

EUCL. I. 8 en 9 Bep. — W. g. § 16, 17. —— St. p. 5. Bep. 13

I AANMERKING. Wanneer een hoek met letters wordt uitgedrukt, gebruikt men drie letters, of ééne letter: als men 'er ééne gebruikt, is het altoos de letter die aan den top staat: als men 'er drie gebruikt, stelt men altoos de letter van den top in 't midden: dus worden de hoeken in fig. 5. of ABE, GFK, of wel enkel B en F genoemd.

II AANMERKING. Daar de hoek alleen de helling van twee lynen is, volgt het, dat de grootte van den hoek alléén uit de grootte van die helling, en geensints uit

de lengte der *beenen* van denzelven moet beöordeeld worden. Of de beenen lang of kort zyn, of zy meer of min verlengd *worden*, blyft hunne helling, en dus de hoek dien zy maaken, *dezelfde*: dus is DBH dezelfde hoek als ABE.

III. AANMERKING. Men beoordeelt de gelykheid van twee hoeken uit derzelver overeenkomst. Zy zyn namelyk gelyk, indien, wanneer men vooronderstelt, dat de beide toppen op elkander, en een been van den éénen hoek langs een been van den anderen, gelegd zyn, het tweede been van den eerstgemelden, met het tweede been van den laatstgemelden, overeenkomt, en dus de zelfde helling heeft. Zo dit geen plaats heeft, zal die hoek het grootst zyn, wiens tweede been buiten het tweede been van den anderen valt.

Dit is het oorspronkelyk denkbeeld; en de natuurlyke maat, van de gelykheid of ongelykheid van twee hoeken. De *zwaai* der Timmerlieden steunt op dat grondbeginsel. En het is daarop, dat de Wiskonstenaars alles bouwen, wat zy van de gelykheid of ongelykheid van verschillende hoeken bewyzen.

H. g. §. 13, 14, 15.

IV AANMERKING. Er zyn 'er, die willen, dat men in de vergelyking van twee hoeken dus te werk gaa: dat men namelyk van de beenen gelyke deelen BI, KB, LF, MF afsnyde; en met dezelven als radiusſen, uit de toppen B en F, cirkelbogen IK, LM beschryve: en dat men dan uit de gelykheid of ongelykheid der ruimten IBK, LFM over de gelykheid of ongelykheid der hoeken oordeele. Zie D'ALEMBERT *Melanges* V. Deel p. 207. en p. 38. — St. p. 5. bep 14. Doch men moet met het denkbeeld van een hoek, die alleen in de helling van twee lynen bestaat, dat van eene ruimte, die tusschen drie lynen begreepen is, niet verwarren. Wy zullen wel is waar, in het eerste en tweede Voorstel van ons VIII Boek bewyzen, dat de cirkelbogen een eigenaartige maat voor hoeken opleeveren: doch ik twyffel of dit grondbe-

beginsel wel als een eerste grondbeginsel kan beschouwd worden.

VII.

Wanneer eene lyn (DB Fig. 6.) zodanig op eene andere (AC) invalt, dat zy ter wederzyde van het stip (B) van invalling gelyke hoeken (ABD en CBD) maakt, worden die hoeken *rechte-* of *winkel-hoeken* genoemd: en de invallende lyn zelve wordt gezegd *lood-recht* op de andere te staan, of eene *lood-rechte*, of *perpendiculaire* lyn te zyn. Een hoek (EBC) die grooter dan een rechte hoek is, wordt een *stompe* of *plompe* hoek genoemd, en die (EBA) welke kleiner is, een *scherpe hoek.*

EUCL. I. 10. 11. 12 Bep. — W. g. § 20. — St. p. 6; 15, 16, 17 Bep.

VIII. Fig. 7.

Twee lynen (AD, GE) worden gezegd *parallel* of *evenwydig* aan elkander te zyn, wanneer zy met betrekking tot eene derde lyn, die haar snydt, dezelfde helling hebben: dat is, aan den zelfden kant (door de III Aanmerking op de VI Bepaaling) gelyke hoeken met die lyn maaken, (namelyk $\angle ABF = \angle GFK$: $\angle ABC = \angle GFC$.)

I AANMERKING. Het is niet gemaklyk een waar en eenvoudig denkbeeld van de evenwydige lynen te geeven: daar over zyn geheele boekdeelen geschreeven: doch men kan zich vergenoegen met de *Melanges* van D'ALEMBERT V. Deel p. 202., TACQUET en CLAVIUS in hunne Verklaringen op de 36 Bepaaling van het eerste Boek van EUCLIDES te raadpleegen. Ik heb die bepaaling gegeeven, die my voorkwam de eenvoudigste en juistste te zyn, en die geleegenheid geeft om alle de eigenschappen van evenwydige lynen te bewyzen, alleen door die bepaaling zelve, en zonder ze uit sommige eigenschappen der

driehoeken te moeten afleiden, zo als EUCLIDES gedaan heeft.

II. AANMERKING. EUCLIDES geeft deeze bepaling van de evenwydige lynen: „het zyn lynen die, in hetzelfde vlak „gelegen, en in het oneindige verlengd, elkander nimmer „snyden." Ik twyffel of het denkbeeld van eene *verlenging in het oneindige*, en van *nimmer* te snyden, voor een éérst grondbeginsel duidelyk genoeg zy: wy zullen in het Gevolg van het VI Voorstel bewyzen, dat die eigenschap van zich nimmer te snyden, ook uit onze bepaling der evenwydige lynen volgt. EUCL. I. Bep. 35.

Anderen geeven deeze bepaling: evenwydige lynen zyn die, welke altoos even ver van elkander af zyn, dat is die zodanig zyn, dat alle loodlynen (B L, C K, D I Fig. 8.) tusschen dezelven getrokken, gelyk zyn. Wy zullen in het II Gevolg van ons IX Voorstel bewyzen, dat dit ook uit onze bepaling volgt: doch tevens in de Aanmerking op ons XIV Voorstel doen opmerken, dat deeze bepaling niet doorgaat, ten zy men te voren beweezen hebbe, of vooronderstelle, dat de afstand van eenig stip van eene rechte lyn af, door de lood-lyn moet gemeeten worden. W. g. §. 25. — St. p. 29. Bepaling 27.

IX.

Een *Figuur* is eene ruimte die tusschen rechte (Fig. 4.) of kromme lynen (Fig. 3.) besloten is. Zy is *rechtlynig*, wanneer ze door rechte lynen besloten is.

EUCL. I. 14 en 20 bep. — St. p. 3, 7 Bep. p. 19, 18 Bep.

X.

De *rechtlynige* Figuuren zyn *drielynig*, *vierlynig*, *vyf lynig*, en zo voorts, naar maate van het getal lynen dat dezelven insluit: doch meest wordt de benaming uit het getal van hoeen ontleend: en men noemt

noemt ze *driehoeken*, *vierhoeken*, *vyfhoeken* enz. naar maate zy drie, vier, vyf of meerder hoeken hebben, en dus uit zo veele lynen bestaan.

EUCL. I. 20. 21. 22. 23 Bepal.

XI. Fig. 9. 10. 11.

Een driehoek (ABC) wordt *gelykzydig* genoemd, wanneer de drie lynen, of *zyden* (AB, BC, AC) uit welke hy bestaat gelyk aan elkander zyn. —— Hy wordt *gelykbeenig* genoemd (DEF), indien twee zyden (DE, EF) aan elkander gelyk zyn. En *ongelykzydig* (GHI) wanneer de drie zyden (GH, HI, IG) ongelyk zyn.

EUCL. I. bep. 24. 25. 26. —— W. g. §. 21. —— St. p. 19. bep. 20. 21. 22.

I. AANMERKING. Eene der zyden (AC, of DF, of GI) van een' driehoek wordt doorgaands deszelfs *Basis* of *Grondlyn* genoemd, en dan draagt de hoek (B, of E, of H) welke over die grondlyn staat, den naam van *Top* of *Toppunt* des driehoeks. Men neemt in de gelykbeenige driehoeken (DEF) de zyde (DF) die ongelyk is aan de anderen voor grondlyn: en dan worden de beide gelyke zyden (DE, EF) de *beenen* van den driehoek genoemd.

II. AANMERKING. Deeze bepaling en de twee volgende, zyn slechts *naam-bepaalingen* of uitleggingen van het woord, daar zy alléén te kennen geeven, wat die woorden beteekenen in gevalle die figuuren mogelyk zyn. Doch wy zullen in het vervolg, alvorens over die figuuren te handelen, bewyzen, dat zy in de daad bestaan kunnen.

XII. Fig. 12. 13. 9.

Een driehoek, (LMK), die eenen rechten hoek (M) bezit, wordt *rechthoekige driehoek* genoemd: hy wordt *stomp-* of *plomphoekig* genoemd, als hy (zo als NPO) eenen *stompenhoek* bezit. Wanneer alle drie

de hoeken fcherp zyn is de driehoek *fcherp-hoekig* (ABC) Wanneer de driehoek (LMK) rechthoekig is, wordt de zyde (LK) die over den rechten hoek *ftaat*, de *fchuinfche* zyde of *hypotenufe*, en de beide anderen (LM, MK) die den rechthoek (M) omvangen, worden de *recht-hoek-zyden* genoemd.

EUCL. I. 27, 28, 29 bep. —— W. g. §. 21. —— S. p 20. bep. 23. 24. 25.

AANMERKING. Het zal uit het II. Gevolg van ons VII. Voorftel blyken, waarom wy van *rechthoekige* of *plomphoekige* driehoeken fpreekende, maar van éénen *rechten* of van éénen *ftompen* hoek gefproken hebben.

XIII.

Een Vierhoek draagt verfchillende naamen, te weeten:

Den naam van *Vierkant* (*Quadraat*) zo de vier zyden (AB, BC, CD, DA Fig. 14.) gelyk aan elkander, en tevens de vier hoeken (A, B, C, D) recht zyn.

Den naam van *Ruit*, (*Rhombus*), zo de vier zyden (FG, GH, HI, FI, Fig. 15.) wel gelyk, doch de hoeken niet recht zyn.

Den naam van *Ruit-achtige Figuur* of *langachtige Ruit*, (*Rhomboides*), zo de overftaande zyden (KL en MI, LM en KI Fig. 16) gelyk zyn, en ook de overftaande hoeken, (K en M), L en I gelyk, doch niet recht zyn.

Den naam van *Parallelogram*, zo de tegenovergeftelde zyden (KL en MI, LM en MI Fig. 16.) evenwydig zyn; doch zo in een *parallelogram* (ABDE, Fig. 4.) de vier hoeken (A, B, D, E) daar en boven recht zyn, verkrygt het *parallelogram* den naam van *rechthoekig parallelogram* of enkel van *Rechthoek*.

Alle

Alle andere vierhoekige Figuuren, waar in de zyden en hoeken ongelyk zyn, (OPQN Fig. 17.), worden *ongeschikte vierhoeken* of *Trapèziën* genoemd.

Men noemt in alle die Figuuren, de lyn (DB, of GI, of LI, of PN) die van den eenen hoek tot den tegenovergestelden gaat, den *diagonaal*, dat is, de lyn die de hoeken snydt.

EUCL. I. 29-34 bep. —— W. g. §. 22. — St. p. 43, 29. 30. bep. p. 49, 32 bep.

AANMERKING. Het woord, *parallelogram*, betekent in het Grieksch eene figuur, uit *evenwydige lynen* bestaande: doch wy zullen in ons XIX Voorstel bewyzen, dat alle *Parallelogrammen* in de daad *Ruitachtige Figuuren* zyn, vermits de tegenoverstaande zyden, als ook de tegenoverstaande hoeken, gelyk zyn.

XIV. Fig. 3.

Een Cirkel is eene vlakke Figuur, door ééne éénige kromme lyn besllooten, welke lyn *omtrek* genoemd wordt: Die omtrek (ABD) is zodanig gesteld, dat alle de lynen (AC, BC, DC) die men uit alle de stippen van den zelven, tot één en het zelfde stip (C) binnen den omtrek gelegen, trekt, en in het welk zy dus samenkomen; gelyk zyn. Dit stip (C) wordt het *middelpunt* of *centrum*, en de gemelde gelyke lynen (AC, BC, DC) worden *straalen*, of *radiussen* genoemd. De kromme lyn zelve (ABD) draagt den naam van omtrek des Cirkels.

EUCL. I. 15, 16 bep. — W. g. §. 12. 13. 14. — St. p. 3. 9 bep.

AANMERKING. De geheele Cirkel is dan eene Figuur: en de geheele omtrek kan niet beschreeven worden zonder dat 'er een Figuur ontstaat, omdat de omtrek eene kromme lyn is, die in zich zelve wederkeert. Maar de deelen des omtreks, *Bogen* genoemd, (CDE Fig. 1.) zyn geen Figuuren.

ALGEMEENE VOORONDERSTELLINGEN.

I.

Men vooronderstelt dat het mogelyk is, eene rechte lyn van een stip tot een ander stip te trekken.

EUCL. I. 1 Begeerte. —— St. p. 16.

II.

Men vooronderstelt dat het mogelyk is, eene rechte lyn te verlengen, of zo veel men wil, of tot dat zy aan eene gegeeven lyn gelyk zy, of grooter dan eene gegeeven lyn worde.

EUCL. I. 2 Beg. —— St. p. 16.

AANMERKING. Wy zullen in het I. Werkstuk van ons I. Boek van Werkstukken toonen, hoe men uit een bepaald stip eene rechte lyn trekken kan, die aan eene andere gegeeven lyn gelyk is.

III.

Men vooronderstelt dat men op eene rechte lyn een stuk neemen kan, dat aan een gegeeven, doch kleiner rechte lyn gelyk is.

AANMERKING. Wy zullen in het II. Werkstuk van ons I. Boek van Werkstukken zien hoe dit geschiedt.

IV.

Men vooronderstelt, dat uit een gegeeven stip eene lyn getrokken kan worden, die, of loodrecht op eene andere gegeeven lyn staat, of evenwydig aan dezelve is.

AANMERKING. Wy zullen in het III. en VI. Werkstuk van ons I. Boek aantoonen, hoe men dit verricht.

V.

Men vooronderstelt, dat het mogelyk is, uit een bepaald stip als middelpunt, en met eenen bepaalden straal

ftraal of *radius*, naar willekeur, eenen cirkel te beſchryven.

EUCL. I. 3 Beg. —— St. p. 16.

ALGEMEENE KUNDIGHEDEN,

OF AXIOMATA.

I.

Rechte lynen, waarvan twee ſtippen overéénkomen, komen geheel overéén.

EUCL. I. 12 Axioma. —— W. g. §. 41. — St. p. 14.

II.

Twee rechte lynen, die uit het zelfde ſtip getrokken worden, of elkander ſnyden, hebben niets gemeens behalven het ſtip daar zy zich ontmoeten, het welk tot beide de lynen behoort.

Zie TACQUET en CLAVIUS op het 14de *Axioma* van EUCLIDES I B. —— St. p. 14.

III.

Rechte lynen, wier twee uiterſte ſtippen overéénkomen, en die dus geheel overéénkomen, zyn aan elkander gelyk: en omgekeerd: rechte lynen die gelyk zyn, zullen geheel met elkander overéénkomen, zo men haare uiterſte ſtippen op elkander legt.

W. g. §. 42.

AANMERKING. Het is uit dit eenvoudig grondbeginſel, dat alle de bewyzen die de gelykheid van lynen betreffen, ontleend worden.

IV.

Zo de kruinen van twee gelyke hoeken op elkander gelegd worden, en een been van éénen hoek langs een been van den anderen, zal het tweede been van den eerſten hoek ook met het tweede been van den tweeden overeenkomen. En omgekeerd, indien

de kruinen, en de beenen van twee hoeken overeenkomen, zyn die hoeken aan elkander gelyk.

EUCL. I. Ax. 8. —— W. g. §. 41.

AANMERKING. Zie onze aanmerking op de zesde Bepal.

V.

Eene lyn, die eene van twee evenwydige lynen fnydt, zal ook de andere, indien zy, zo het nodig is, verlengd wordt, fnyden.

I AANMERKING. Dit volgt uit de bepaling zelve der evenwydige lynen: zie de VIII Bepaling.

II. AANMERKING. EUCLIDES heeft wel dit Voorftel niet met zo veele woorden uitgedrukt: doch hy heeft het zelve ftilzwygend vooronderfteld in de bereiding van de 30 en 37 Propofitie van het eerfte Boek. Zie de Aanmerkingen van KOENIG, op de 27 Prop. van het I. Boek van EUCLIDES, bl. 43.

VI. Fig. 18.

Zo men uit de twee uiterften (A en B,) van eene rechte lyn (A B), als uit twee middelpunten, cirkels trekt, met ftraalen die of aan die lyn (A B) gelyk, of grooter dan die lyn zyn, zullen die cirkels elkander fnyden, (b. v. in C.)

I. AANMERKING. EUCLIDES heeft dit niet met zo veele woorden uitgedrukt, doch hy gebruikt dit Voorftel klaarblykelyk in de bewerking van de 1, 2, 3 *Propofitie* van het I. Boek. —— WOLF heeft dit Voorftel beweezen, in zyne Latynfche Geometrie §. 197. doch het is zonneklaar, en behoort tot de algemeene kundigheeden.

II. AANMERKING. Indien men tot ftraal eene lyn aannam, die kleiner is dan B A, zoude het kunnen gebeuren, dat de Cirkels elkander niet fneeden, maar flechts raakten, of ook dat zy elkander niet eens raakten.

III. AANMERKING. Door middel van dit Voorftel en de V. Vooronderftelling, kan men het I. en II. Werkftuk van het I. Boek, en het II. en III. van het III Boek onzer Werkftukken, oplosfen.

I. AF-

I. AFDEELING.

OVER DE RECHTE LYNEN IN ZICH ZELVEN BESCHOUWD.

I. VOORSTEL. Fig. 19.

Wanneer eene rechte lyn (DC) op eene andere (AE) invalt, en dezelve in eenig ſtip (C) ſnydt, maakt zy om dat ſtip of twee rechte hoeken, of twee hoeken (ACD en DCE), die te ſamen genomen gelyk zyn aan twee rechte hoeken.

EUCL. L. 13. —— W. 8. §. 57. — St. p. 16. 1 Prop.

BEREIDING. Deeze beſtaat hierin, dat men, volgens de IV. Vooronderſtelling, vooronderſtelle dat 'er uit C eene lyn CB getrokken zy, die loodrecht op AE ſtaat.

BEWYS. Dit volgt uit de VII. Bepaling, en uit de Bereiding zelve.

I. GEVOLG.

Alle de hoeken (ABE, EBD, DBC Fig. 6.) welke om een en het zelfde ſtip (B) en aan denzelfden kant van eenige lyn (AC) door zo veel lynen (EB, DB) als men wil gevormd worden, zyn te ſamen genomen altoos gelyk aan twee rechte hoeken.

II. GEVOLG. Fig. 20.

Alle de rechte hoeken zyn aan elkander gelyk.

BEWYS. Dit wordt ontleend uit de ongerymdheid, daar men in vervalt met het tegendeel te ſtellen. Men houdt de oorſpronkelyke bepaling der rechte hoeken in het oog (Bep. VII.) en dan onderſtelt men, 1°. dat de lyn CB zodanig op AI valle, dat zy gelyke hoeken ABC en CBI maakt, die dus recht genoemd worden: 2°. dat de lyn GE zodanig op DF valle, dat zy gelyke hoeken DEG en GEF maakt, die dus ook recht genoemd worden;

den: om dan te bewyzen dat de rechte hoek GEF gelyk is aan den rechten hoek CBI, onderstelt men, dat E op B, en EG langs CB gesteld worde: en men toont aan, dat men in ongerymdheid vervalt, indien men onstelt dan EF ergens anders dan langs BI valt, by voorbeeld, dat zy BF worde: en die ongerymdheid wordt uit dit I. Voorstel afgeleid, nadat men BI, aan de andere zyde van de lyn AI, tot in D verlengd heeft.

AANMERKING. EUCLIDES heeft die gelykheid der rechte hoeken, als eene zaak die van zelf spreekt, aangenomen: doch PROCLUS heeft te recht beweerd, in zyne aanmerkingen op dien Schryver, dat de zaak beweezen moest worden. Men zie denzelven, zo als ook CLAVIUS in zyne Aanmerkingen op het 12 *Axioma* van het I. Boek van EUCLIDES.

III. GEVOLG.

Daar dan de rechte hoeken allen aan elkander gelyk zyn, en dus eene bepaalde en bestendige grootte hebben, leevert die hoek eene eigenaartige *maat* uit, welke tot het bepaalen der grootte van alle andere hoeken zal kunnen dienen.

H. g. §. 19.

II. VOORSTEL.

Fig. 6. doch waarin het thans niet nodig is, dat DB *loodrecht zy op* AC.

Indien twee rechte lynen (AB en BC) eene derde lyn (DB) in het zelfde stip (B) ontmoeten, zodanig dat zy met dezelve twee hoeken maaken (ABD en DBC) die, te samen genomen, gelyk zyn aan twee rechte hoeken, zullen die twee rechte lynen (AB, BC) maar eene en dezelfde rechte lyn (AC) uitmaaken.

EUCL. I. 14. St. p. 17. pr. 1. 3 Gevolg.

BEWYS. Het wordt afgeleid uit de ongerymdheid daar men

men in vervalt, met het tegendeel te ftellen, en te beweeren, dat niet AB flechts de verlenging van BC is, en met deeze maar ééne lyn AC uitmaakt, maar dat EB by voorbeeld de verlenging van BC zoude zyn. De ongerymdheid is uit het I Voorftel blykbaar.

AANMERKING. Dit Voorftel is flechts het omgekeerde van het voorgaande.

III. VOORSTEL. Fig. 2.

Indien twee lynen (AB, CE) elkander in een ftip (D) fnyden, zullen de tegenoverftaande hoeken of *fchriks-hoeken* die om dat ftip (D) gevormd worden (ADE en CDB; ADC en EDB) aan elkander gelyk zyn.

EUCL. I. 15. —— W. g. 61. —— St. p. 18. pr. 2.

BEWYS: Uit het eerfte Voorftel.

AANMERKING. Dit Voorftel komt my voor geen bewys nodig te hebben, en onder de algemeene kundigheden gefteld te moeten worden, daar AD en DE noodwendig dezelfde onderlinge helling hebben, als CD en DB, en dus eenen even grooten hoek maaken.

GEVOLG.

Alle hoeken, die om een ftip gemaakt kunnen worden, zyn altoos te famen genoomen gelyk aan vier rechte hoeken.

EUCL. I. 15. Cor W. g. §. 63.—St. p. 18. pr. 2. 1 Gevolg.

IV. VOORSTEL. Fig. 7.

Wanneer eene rechte lyn (CK) twee evenwydige lynen AD en GE fnydt, maakt zy altoos de *overhandfche* of *verwisfelende* hoeken (ABF en BFE: of DBF en BFG) gelyk aan elkander: en de twee inwendige hoeken (ABF en BFG, of DBF en BFE) die aan den zelfden kant ftaan, te famen gelyk aan twee rechte hoeken.

En

En omgekeerd: zo eene lyn (CK) twee andere (AD, GE) zodanig ſnydt, dat of de *overhandſche hoeken* (ABF en BFE, of DBF en BFG) gelyk zyn: of de ſom der beide inwendigen (ABF en BFG of DBF en BFE) aan denzelfden kant, gelyk is aan twee rechte hoeken, zullen die beide rechte lynen (AB, GE) evenwydig aan elkander zyn.

EUCL. I. 29. 28. 27. —— W. g. § 97. 98. —— St. p. 30. pr. 12: p. 32. Cor. 3.

BEWYS: Voor het eerſte gedeelte door het 3de Voorſtel, en de 8ſte Bepaaling.

Voor het tweede gedeelte, door het 1 Voorſtel, en de 8ſte Bepaaling.

Voor het omgekeerde: uit de ongerymdheid waarin men vervalt, zo men het tegendeel ſtelt, namelyk, dat AB en GE niet evenwydig zyn, en dus dat eene andere lyn, by voorbeeld BK, met GE evenwydig is: en die ongerymdheid volgt uit de vergelyking van die onderſtelling met de gegeevene ſtellingen, en het beweezene in het eerſte gedeelte.

V. VOORSTEL. Fig. 21.

Zo twee of meer lynen, (CD, EF) aan ééne en dezelfde lyn (AB) evenwydig zyn, zyn zy ook evenwydig aan elkander.

EUCL. I. 30.

BEREIDING. Men trekt de lyn GL, die de gegeeven lynen ſnydt.

BEWYS. Uit de 5de Algemeene Kundigheid, en de 8ſte Bepaaling.

VI. VOORSTEL. Fig. 22.

Zo de lyn CL, twee lynen BG en IH zodanig ſnydt, dat de inwendige hoeken (GDK en DKH) aan den zelfden kant te ſamen kleiner zyn dan twee rechte hoeken, zul-

zullen die twee lynen, (zo het nodig is verlengd zynde) elkander ergens naar dien kant fnyden (in F.)

BEREIDING. Men onderfteit (door de IV onderftelling) dat de lyn AE, die door het ftip D gaat, evenwydig is aan IF.

BEWYS. Uit het IV Voorftel, en de V Algemeene Kundigheid.

I AANMERKING. EUCLIDES heeft dit Voorftel onder de Algemeene Kundigheeden gefteld, het is namelyk by hem de XI: doch het behoort onder die klasfe niet: zie KOENIG over het XI Axioma en de XXVII Propofitie van het I Boek, en TACQUET over de XXXI Propofitie. De Heer MONTUCLA gist te recht, dat dit Axioma, door de onnaauwkeurigheid der oude copisten, uit zyne waare plaats gerukt is, en dat het eene gevolgtrekking was van de XXVIII Propofitie. (*Hiftoire des Mathematiques* T. I. p. 221.) Ook wordt dit Voorftel in een oud Arabisch Handfchrift van EUCLIDES, dat te Rome bewaard wordt, wel degelyk beweezen.

GEVOLG.

Evenwydige lynen fnyden elkander nimmer, hoe veel zy ook verlengd worden: en omgekeerd: twee lynen die elkander nimmer fnyden, zyn evenwydig.

BEWYS. Uit dit Voorftel, vergeleeken met het IV, leidt men de ongerymdheid af, daar men in vervallen zoude, indien men dit niet onderftelde.

I. AANMERKING. De Bepaaling van EUCLIDES dat twee lynen, die elkander nimmer fnyden, evenwydig zyn, volgt dan ook uit de onze.

II. AANMERKING. Uit dit Voorftel volgt, dat men uit de uiteinden (D en K) eener rechte lyn DK, lynen (DF, KF) trekken kan, die elkander in een ftip F fnyden: en dus dat een Driehoek mogelyk is. Het volgt verder, dat een driehoek DFK op zyne grondlyn DK op het

hoogst maar eenen rechten hoek hebben kan. Doch wy zullen dit algemeener in het tweede Gevolg van het VII Voorſtel bewyzen.

III. AANMERKING. Men zoude ook uit dit Voorſtel, gepaard met het IV, kunnen opmaaken, dat de drie hoeken van een driehoek, te ſaamen genomen, gelyk zyn aan twee rechte hoeken, doch dit zal de ſtof van het VII Voorſtel zyn.

II. AFDEELING.

OVER DE ZYDEN EN HOEKEN DER DRIEHOEKEN, EN PARALLELOGRAMMEN.

VII. VOORSTEL. Fig. 23.

In alle driehoeken, (ABC) is de uitwendige hoek (BCE) die eene der zyden (BC) met de verlengde aanleggende zyde (AC) maakt, altoos gelyk aan de ſom der beide tegenoverſtaande inwendige hoeken (A en B): en de drie hoeken zyn te ſamen genomen altoos gelyk aan twee rechten.

EUCL. I. 32. — W. g. §. 101. — St. p. 32 prop. 13.

BEREIDING. Men vooronderſtelt dat 'er uit C eene lyn CD evenwydig aan de zyde AB getrokken is.

BEWYS: Voor het eerſte gedeelte uit het IV Voorſtel en de VIII Bepaling.

Voor het tweede gedeelte uit het I Voorſtel, en het eerſte gedeelte.

I. GEVOLG.

'Er kunnen rechthoekige, en ſtomphoekige driehoeken zyn.

II. GEVOLG.

Een driehoek kan niet meer dan éénen rechten of éénen ſtompen hoek bezitten.

Zie III Aanmerking op het VI Voorſtel.

W. g. §. 102. 103.

III.

III. GEVOLG. (Fig. 25.)

Wanneer de ſom van twee hoeken (A en B) in eenen driehoek (A B C) gelyk is aan de ſom van twee hoeken (D en E) in eenen anderen driehoek (D E F), het zy die hoeken onderling gelyk zyn, (namelyk A gelyk aan D, B gelyk aan E) dan niet; zal altoos de derde hoek (A C B) in den eerstgemelden driehoek (A B C) gelyk zyn aan den derden hoek (F) van den laatstgemelden (D E F): en omgekeerd.

W. g. §. 105. — St. p. 33. 1 Gev.

IV. GEVOLG.

De uiterlyke hoek (B C E Fig. 23.) is altoos grooter dan een der beide overſtaande inwendigen (A of B).

EUCL. I. 16.

V. GEVOLG. Fig. 24.

Indien men uit een gegeeven ſtip (B) eene lyn (B A) naar welgevallen op eene andere lyn A C E laat vallen; en dan uit het zelfde ſtip nog meer andere lynen (B D, B C): zullen deeze lynen aan den zelfden kant des te grooter uitwendige hoeken (B C E, B D E) en des te kleiner inwendigen (B C A, B D A) maaken, naarmaate zy meerder van de eerſte lyn (A B) afwyken.

VI. GEVOLG.

Indien men uit den top van eenen driehoek eene loodlyn op de grondlyn laat vallen, zal deeze (B D, Fig. 26.) binnen den driehoek vallen, zo de hoeken (A en C) op de grondlyn (A C) beide ſcherp zyn: doch buiten den driehoek (zo als C D fig. 57.) zo een der hoeken (C A B) op de grondlyn (B A) ſtomp is.

VIII. VOORSTEL. Fig. 25.

Wanneer twee driehoeken (ABC en DEF) zodanig gesteld zyn: dat een der hoeken (B) van den eersten gelyk is aan een der hoeken (E) van den anderen, en dat beide beenen (BA, BC) van den gemelden hoek (B) in den eersten driehoek onderling gelyk zyn aan de beide beenen (DE, EF) van den gemelden hoek in den anderen driehoek, (namelyk BA gelyk aan DE, BC gelyk aan EF) zal 1°. de derde zyde (AC) gelyk zyn aan de derde zyde (DF): 2°. de hoeken die in de beide driehoeken over gelyke zyden staan, zullen ook gelyk zyn (namelyk A aan D, ACB aan DFE) en 3°. de driehoeken zelve, dat is de ruimten die zy insluiten, zullen ook even groot zyn.

EUCL. I. 4. — W. g. §. 76. — St. p. 21. pr. 3.

BEWYS. Men vooronderstelt dat men den driehoek DEF, by voorbeeld, zodanig op den driehoek ABC plaatst, dat de kruinen B en E, zo als ook dat de zyden DE en AB op elkander komen: en men besluit dan uit de VI Bep. 3 Aanm. en uit de IV en III Algem. Kundigheid, dat alle de overige deelen ook overeenkomen, en dus gelyk zyn.

I. AANMERKING. Men kan het derde gedeelte niet omkeeren, en zeggen: dat alle de driehoeken die gelyk zyn, dat is, wier ruimten gelyk zyn, ook gelyke hoeken, en gelyke zyden bezitten: wy zullen in het II. Boek bewyzen, dat veele driehoeken gelyk zyn, wat den inhoud, of ruimte die zy bevatten, betreft, zonder dat er gelykheid van hoeken of zyden plaats heeft; dat is, zonder dat zy in allen opzichte gelyk zyn.

II. AANMERKING. De onderstellingen, in welke dit Voorstel plaats heeft, zyn 1°. de onderlinge gelykheid van twee zyden in beide de driehoeken, ieder aan ieder: en dan 2°. de gelykheid, niet van twee hoeken *in het algemeen*,

een

een in ieder' driehoek, maar juist van die hoeken, welke tusschen de gelyke zyden begreepen zyn. Hier moet men behoorlyk opletten: indien men de gelykheid onderstelde niet van den hoek, *tusschen* de gelyke zyden begreepen, maar, van een' der hoeken, die in ieder' driehoek *over* een der zyden staat die in ieder gelyk zyn, dan zoude het besluit niet algemeen zyn, maar alleen voor de rechthoekige driehoeken in het algemeen, en voor de overigen in een byzonder geval plaats hebben, welke beide stukken het voorwerp zyn van ons XI Voorstel 6. Gevolg, en van het XIII. Voorstel.

IX. VOORSTEL. Fig. 25.

Wanneer twee driehoeken (ABC en DEF) zodanig gesteld zyn, dat eene zyde (AC) van den eenen gelyk is aan eene zyde (DF) van den anderen: en dat twee hoeken van den eenen gelyk zyn aan twee hoeken van den anderen, ieder aan ieder, (by voorb. $\angle BAC = \angle EDF$ $\angle ACB = \angle DFE$) zal 1°. de derde hoek B gelyk zyn aan den derden hoek E: 2°. zullen de overige zyden ook aan elkander gelyk zyn, die namelyk, welke tegen over gelyke hoeken staan, (dat is $AB = DE$: $BC = EF$).

EUCL. I. 26. — W. g. §. 71. — S. p. 41. pr. 21.

BEWYS. Voor het eerste gedeelte uit het 3de Gevolg van het VII. Voorstel.

Voor het tweede gedeelte, door te onderstellen, dat de lyn AC gesteld worde op DF, en aan te tonen, dat, daar de hoek D gelyk is aan A, en F aan ACB, en dus de lynen DE en EF met AB en BC moeten overéénkomen, ook BA gelyk aan DE zyn moet, om dat men, zo dit dus niet was, en b. v. AG gelyk aan DE vooronderfteld wierd, in ongerymdheden zoude vervallen, in gevolge van het VIII. Voorstel. Men trekt dan tot bereiding de lyn CG.

I. GEVOLG.

De geheele driehoek ABC is gelyk aan den geheelen driehoek DEF: dat is, de ruimten die zy bevatten, zyn even groot.

AANMERKING. De Aanmerking, die wy op het VIII Voorstel gemaakt hebben, is ook hier toepaslyk.

II. GEVOLG. Fig. 8.

Alle de loodlynen (BL, CK), die men tusschen twee evenwydige lynen (AF, BG) trekken kan, zyn altoos aan elkander gelyk: en omgekeerd, als de loodlynen die tusschen twee lynen getrokken kunnen worden, allen gelyk aan elkander zyn, zyn de gemelde lynen evenwydig.

BEWYS. Het wordt uit dit Voorstel en uit het IV. ontleend, na dat men de lyn BK getrokken heeft.

AANMERKING. Men ziet dus, hoe, uit onze bepaling van de evenwydige lynen, ook die volgt, welke sommige schryvers geeven, dat namelyk die lynen evenwydig zyn, welke zodanig gesteld zyn, dat de loodlynen tusschen dezelven begreepen, gelyk zyn.

X. VOORSTEL. Fig. 26 en 27.

Indien in eenen driehoek (ACB) de hoeken (A en C) op de grondlyn gelyk zyn, is die driehoek een gelykbeenige driehoek, (dat is AB = BC.)

[redacted]

I. GEVOLG.

'Er kunnen gelykhoekige driehoeken zyn, dat is, driehoeken waarin de drie hoeken allen gelyk zyn.

II. GEVOLG.

Een gelykhoekige driehoek is altoos gelykzydig. W. §. 111.

XI. VOORSTEL. Fig. 26, 27.

In eenen gelykbeenigen driehoek (ABC), zyn altoos de hoeken (A, C) op de grondlyn gelyk aan elkander; zo als ook, zo de beenen verleugd worden, de hoeken (EAC en ACF) onder de grondlyn.

EUCL. I. 5. — W. g. §. 107. — S. p. 22. pr. 4.

EERSTE BEWYS Fig. 26. Men onderstelt dat de lyn BD den topboek ABC in twee gelyke deelen snydt, ABD en DBC; en dan volgt het bewys uit het VIII. Voorstel.

TWEEDE BEWYS Fig. 27. Dit is het bewys door EUCLIDES gegeeven. De bereiding bestaat hierin, dat men AE en CF gelyk stelt, en de lynen AF en CE trekt: het bewys wordt vervolgens ontleend uit het VIII en IX Voorstel.

I. GEVOLG. Fig. 25.

Indien eene lyn BA met eene andere lyn AC eenen scherpen hoek BAC maakt, zal men uit het ander eind C van die tweede lyn AC geen lyn kunnen trekken, die met dezelve eenen hoek maakt, aan den eerstgemelden hoek gelyk, en die tevens aan de eerstgemelde lyn BA gelyk is, ten zy zy deeze in het eind B ontmoete.

Het Bewys wordt door het X Voorstel opgemaakt, uit de ongerymdheid daar men in vervalt, als men stelt dat BC de lyn AB ergens anders, by voorbeeld in G, ontmoet.

II. GEVOLG.

Een gelykzydige driehoek is altoos gelykhoekig: en ieder hoek is twee derde gedeelten van een rechten hoek.

W. g. §. 108. — S. p. 23. Gev. 3.

Het laatste gedeelte wordt uit dit Voorstel, met het VII. gepaard, opgemaakt.

III. GEVOLG.

Een gelykbeenige driehoek kan geen rechten hoek dan alleen in den top bezitten.

Het bewys wordt uit dit Voorstel en het 2. Gevolg van het VII. opgemaakt.

IV. GEVOLG. Fig. 26.

Een loodlyn (BD) uit den top van eenen gelykbeenigen of gelykzydigen driehoek (ABC) op de grondlyn (AC) neergelaaten, snydt die lyn in twee gelyke deelen (AD en DC), en deelt insgelyks den tophoek (ABC) in twee gelyke hoeken.

En omgekeerd; die lyn welke uit den top van eenen gelykbeenigen of gelykzydigen driehoek (ABC) nedergelaaten wordt, en, of den tophoek, of die grondlyn in twee gelyke deelen verdeelt, staat loodrecht op de grondlyn AC.

TACQUET op de 26 Prop. van EUCLIDES I Boek. — W. g. §. 107. — St. p. 23. Gevolg 1 en 2.

BEWYS. Het wordt uit dit Voorstel, met het IX gepaard, ontleend.

AANMERKING. Men kan thans de oplossing van het 3. en de eerste oplossing van het 4 Werkstuk uit ons eerste Boek verrichten.

V. GEVOLG. Fig. 132.

Indien op dezelfde grondlyn, (AC) twee verschil-

ſchillende gelykbeenige driehoeken ABC, en AGC ſtaan, zal de lyn (BG) die door de toppen (B en G) der beide driehoeken gaat, tot op de grondlyn (AC) in E verlengd, die grondlyn in twee gelyke deelen ſnyden, en loodrecht op dezelve ſtaan.

BEWYS. Het wordt uit dit Voorſtel met het [illegible] gepaard, en op de driehoeken ABG en GBC toegepast, ontleend: men bewyst namelyk de gelykheid der hoeken ABG en GBC: waar door de lyn BGE in het geval van het IV. Gevolg vervalt.

VI. GEVOLG. Fig. 26.

Twee rechthoekige driehoeken (ABD, BDC) in welke de ſchuinſche zyden (AB, BC) gelyk aan elkander zyn, en eene der rechthoekzyden (BD) ook gelyk in beiden; zyn in allen opzichte gelyk.

W. §. 96. — S. p. 28. pr. 11.

BEWYS. Men ſtelt de driehoeken met de rechthoekzyde BD, die in beiden gelyk is, tegen elkander: dan maaken AD en CD eene rechte lyn (II. Voorſtel): en het overige wordt uit dit Voorſtel, en zyn 4. Gevolg afgeleid.

VII. GEVOLG. Fig. 27.

Indien men op de beenen (AB, BC) van eenen gelykbeenigen driehoek, of op derzelver verlengden, uit den top B, gelyke deelen afſnydt (BE, BF,) zal de lyn (EF) die de uiterſten (E, F) van die lynen vereenigt, met die lynen eenen gelykbeenigen driehoek (BEF) maken, waarvan de hoeken onderling aan die van den gegeeven driehoek (ABC) gelyk zyn zullen, en wiens grondlyn (EF) evenwydig aan de grondlyn (AB) van den gegeeven driehoek zyn zal.

BEWYS. Het volgt uit dit Voorſtel, uit het 3 Gevolg van het VII. en de VIII Bepaling.

VIII. GEVOLG. Fig. 165.

Indien men uit een der hoeken C op de grondlyn van eenen gelykbeenigen driehoek A G C, op de overstaande zyde, zo het nodig is verlengd, eene lyn CD gelyk aan een der beenen laat vallen, zal de hoek D C E welke die lyn met de verlengde grondlyn A C maakt, het drievoud zyn van den hoek op de grondlyn, G C A of G A C.

AANMERKING. Wy zullen in het Gevolg van het VIII. Voorstel in het VIII. Boek toonen, welken invloed dit heeft op het vermaard Vraagstuk de verdeeling van eenen hoek in drie gelyke deelen betreffende.

XII. VOORSTEL. Fig. 28.

Indien ieder der drie zyden van eenen driehoek (A B C) gelyk is aan eene byzondere zyde van eenen anderen driehoek (D E F): (namelyk AB aan DE, AC aan DF, CB aan FE) zullen ook de hoeken, die over de gelyke zyden staan, gelyk zyn: (namelyk ∠BAC = EDF, ∠ABC = DEF: ∠ACB = DFE).

EUCL. I. 8. — W. g. §. 72. — S. p. 24. pr. 5.

BEWYS. Het wordt ontleend uit de ongerymdheid, waarin men vervalt, met te stellen dat zo D F op A C geplaatst wordt, de lyn D E niet op A B, zoude vallen, en dus de hoek F D E niet aan B A C gelyk zoude zyn: maar dat de lyn D E zoude vallen, het zy binnen den hoek B A C, het zy 'er buiten: de ongerymdheid wordt uit het XI Voorstel afgeleid, stellende A G = A B, en trekkende B G.

I. AANMERKING. Dit Voorstel kan ook rechtstreeks beweezen worden: met, zo als in Fig. 133. de beide driehoeken tegenover elkander te plaatsen op dezelfde grondlyn A C: en dan B G te trekken. Men gebruikt het XI. en het VIII. Voorstel in het Bewys.

I. GEVOLG.

De beide driehoeken zyn gelyk aan elkander; dat is, de ruimten die zy bevatten zyn even groot.

II. AANMERKING. Met lette op het geen wy in de Aanmerking op het VIII. Voorstel gezegd hebben.

III. AANMERKING. Men kan thans het 3 Werkstuk van ons II. Boek oplossen.

II. GEVOLG.

Uit het Bewys in de I. Aanmerking vermeld volgt, dat de hoeken om E recht zyn: Indien men dan twee driehoeken ABC en AGC, in welke ieder der drie zyden in den eenen gelyk zyn aan eene byzondere zyde van den anderen, tegen elkander plaatst, zodanig dat eene der zyden (AC) aan beiden gemeen worde, en de gelyke hoeken (BAC, en GAC: BCA en GCA) aan den zelfden kant boven en onder gesteld worden: zal de lyn, die de toppen der beide driehoeken vereenigt, loodrecht op de gemeene grondlyn AC staan, en door dezelve in twee gelyke deelen gedeeld worden.

III. GEVOLG.

In de Figuur zyn BCG en BAG gelykbeenige driehoeken, wier gemeene grondlyn BG is: en dus indien men op dezelfde grondlyn BG aan verschillende kanten twee gelykbeenige driehoeken stelt, (gelyk of ongelyk) zal de lyn die derzelver toppen veréénigt, loodrecht op de grondlyn staan, en dezelve, zo als ook de tophoeken, in twee gelyke deelen verdeelen.

IV. AANMERKING. Hier door worden de 5, 6, 7 Werkstukken van het I. Boek, en het 1 en 4 van het II Boek, opgelost.

V. AANMERKING. De vergelyking van dit III. Gevolg met het V. Gevolg van het voorgaand Voorstel leert ons, dat dezelfde eigenschap plaats heeft, het zy de gelykbeenige drie-

driehoeken beide boven, of beide beneden de grondlyn geplaatst worden.

XIII. VOORSTEL. Fig. 134, 135.

Indien in twee driehoeken (ABC en DEF) twee zyden van den eenen onderling gelyk zyn aan twee zyden van den anderen (AB = DE: BC = EF) en een hoek (by voorbeeld A,) tegenover eene der gegeeven zyden (BC) staande gelyk is aan den hoek (D,) die in den anderen driehoek over de gelyke zyde (EF) staat, zullen die driehoeken in alle opzichten gelyk zyn, zo de hoeken (C en F) welke in deze driehoeken tegen over de andere gegeven gelyke zyde staan, beiden of stomp of scherp zyn.

BEREIDING. Men stelle de lynen BG en EH getrokken uit de hoeken B en E tusschen de gegeeven zyden (AB en BC, DE en EF) begreepen, op de tegenoverstaande zyden AC en DF loodrecht te zyn.

BEWYS. Uit de gelykheid der driehoeken ABG en DEH door het IX Voorstel, en dan die der driehoeken BGC en EHF door het 6. Gevolg van het XI. Voorstel.

AANMERKING. De reden waarom vereischt wordt, dat in beide de driehoeken, de hoek die over de tweede gegeeven zyde staat, of scherp of stomp zy, is dat de gelykheid van AC en DF uit die van AG met DH en GC met HF wordt afgeleid, en dat het alleen is uit de gemelde onderstelling, dat C en F beiden stomp, of beiden scherp zyn, dat men weet of dat DF het verschil is van DH en HF, zo AC het verschil is van AG en GC: of de som van DH en HF zo AC de som is van AG en GC (6. Gevolg van het VII. Voorstel.).

GEVOLG.

Alle rechthoekige driehoeken, zo als ook alle stomphoekige waarin de stompe hoeken gelyk zyn, zyn gelyk, indien twee zyden om een der scherpe hoeken staande, gelyk zyn.

XIV. VOORSTEL. Fig. 24.

In alle driehoeken (ABC) ſtaat altoos de grootſte hoek (ABC) over de grootſte zyde (AC) en de grootſte zyde (AC) over den grootſten hoek (ABC).

EUCL. I. 18. 19. — S. p. 36 pr. 14.

I. GEDEELTE. BEREIDING. Stel AD=AB. trek BD.

BEWYS. Uit het XI. Voorſtel: en het 4. Gevolg van het VII.

II. GEDEELTE: Het wordt beweezen uit de ongerymdheid daar men in vervalt, indien men AC gelyk aan AB, of kleiner dan AB ſtelt: men gebruikt voor de eerſte onderſtelling het XI. Voorſtel: voor de tweede het beweezene in het I Gedeelte.

I. GEVOLG. Fig. 57.

Van alle de lynen (CB, CA, CD) die men uit een gegeeven ſtip (C) op eene andere lyn (AB) kan laaten vallen, is de loodlyn (CD) de kleinſte: de overigen zyn des te kleiner, naar maate zy nader by de loodlyn ſtaan (CA ∠ CB): uit dat ſtip kan niet meer dan ééne loodlyn getrokken worden: en 'er kunnen niet meer dan twee lynen getrokken worden (AB en BC Fig. 26.) die gelyk aan elkander zyn: welke wederzyds gelyke hoeken met de loodlyn zullen maaken, en even ver van dezelve afſtaan.

TACQUET op de 32 Prop. van het I. Boek van EUCLIDES Cor. 14. — St. p. 53. Cor. 2. 3.

BEWYS. Het eerſte, en tweede gedeelte volgt onmiddelyk uit dit Voorſtel: en het derde wordt met behulp van het 2 Gev. van het VII. Voorſtel: en het vierde met behulp van he[illegible]. Voorſtel, daaruit afgeleid. 9

II. GEVOLG.

Daar de loodlyn de kortſte is, heeft zy eene bepaalde grootte: en levert dus een eigenaartige *maat*

op

op, om den afstand van een stip tot eene rechte lyn te bepaalen.

St. p, 29. Bep. 26.

I. AANMERKING. De bepaaling, door sommigen van de evenwydige lynen gegeeven; dat zy namelyk die zyn, welke altoos op den zelfden afstand van elkander zyn, gaat niet door, ten zy dit Gevolg eerst beweezen zy.

III. GEVOLG. Fig. 63.

Indien men uit een stip (A) eene schuinsche lyn (AH) op eene andere lyn GK getrokken heeft, kan men aan eenen en denzelfden kant van die lyn (AH) geen twee lynen (AI, AH) trekken, die grooter dan de gemelde, en tevens gelyk aan elkander zyn: doch men kan 'er wel aan denzelfden kant twee (AD, AB) trekken, die beide kleiner dan de gemelde gegeeven lyn zullen zyn, en echter aan elkander gelyk: de eene zal dan aan den eenen, de andere aan den anderen kant van de loodlyn vallen: de eene zal met de grondlyn, naar den kant van de gegeeven lyn (AH) eenen stompen hoek (ADH) de andere eenen scherpen hoek (ABH) maaken.

II. AANMERKING. Dit is de reden, waarom sommige schryvers in plaats van de voorwaarde, onder welke wy gezegd hebben dat het XIII. Voorstel plaats heeft; deeze stellen: mits de zyden (BC en EF Fig. 134, 135.) over de gelyke hoeken (A en D) staande, grooter zyn dan de aangrenzende (AB, DE); doch dan is het Voorstel wel waar in dat byzonder geval, maar het is niet in het algemeen valsch, zo die voorwaarde ontbreekt, en het tegengestelde plaats heeft: want de driehoeken kunnen gelyk zyn, al zyn die tegenovergestelde zyden kleiner dan de aangrenzende, doch mits zy beide of stompe of scherpe hoeken met de derde zyde maaken; waarom wy het XIII. Voorstel liever op die wyze, als wy gedaan hebben, hebben uitgedrukt.

KARSTEN. §. 83. en §. 87.

XV. VOORSTEL. Fig. 30.

In alle driehoeken (ABC) zyn twee zyden (AB, BC) naar welgevallen te famen genomen, altoos grooter dan de derde (AC).

EUCL. I. 20. — St. p. 36. pr. 15.

BEREIDING. Men onderftelt CB zodanig verlengd te zyn, dat DB = AB is; men trekt AD.

BEWYS. Uit het XI. en XIV. Voorftel.

I AANMERKING. De bepaaling die fommigen van de rechte lyn geeven: dat zy de kortfte is tusfchen twee ftippen: gaat niet door ten zy dit Voorftel eerst beweezen zy.

II. AANMERKING. Men is in ftaat het I. Werkftuk van het III. Boek opteloslen.

XVI. VOORSTEL. Fig. 31.

Indien men van de uiteinden A en C van eene zyde in eenen driehoek (ABC) twee lynen (AD, CD) naar een en hetzelfde ftip D binnen den driehoek trekt: zullen die twee lynen te faamen genomen, kleiner zyn dan de beide overige zyden (AB, BC) des driehoeks te famen genomen: maar zy zullen een' grooter' hoek (ADC) bevatten.

EUCL. I. 21. — St. p. 37. pr. 16.

BEREIDING. Men trekt BD tot E, en verlengt AD tot F.

BEWYS. Voor het eerfte gedeelte, uit het XV. Voorftel.

Voor het tweede gedeelte uit het 4 Gevolg van het VII Voorftel.

I AANMERKING. Men kan ook de lyn BDE misfen, en alleen uit de vergelyking der hoeken ADC en AFC, AFC en ABC redeneeren.

II AANMERKING. Zo men het ftip D op een der zyden neemt, by voorb. in F, heeft men maar ééne lyn uit A te trekken, en het Voorftel behoudt ook in dat geval zyn kracht.

XVII.

XVII. VOORSTEL. Fig. 24*.

Wanneer in twee driehoeken ABC, DEF, twee zyden van den eenen (AB, BC) onderling gelyk zyn aan twee zyden (DE, EF) van den anderen, doch een' grooter' hoek (ABC) bevatten: zal ook de derde zyde (AC) van den eerstgemelden driehoek (ABC) grooter zyn dan de derde zyde (DF) van den anderen driehoek (DEF).

EUCL. I. 24. S. p. 40. pr. 22.

BEREIDING: Men ftelt den hoek DEG = ABC: EG = BC: en trekt DG, FG.

BEWYS. Uit het VIII, XI en XIV Voorftel bewyst men de gelykheid van DG en AC, van de hoeken EGF en EFG; en dus dat ∠DFG grooter is dan DGE: en DG grooter dan DF.

XVIII. VOORSTEL. Fig. 32.

Wanneer twee lynen (AB en CD) gelyk en tevens evenwydig aan elkander zyn: zullen de lynen (AC en BD) die dezelven verëénigen, insgelyks gelyk en evenwydig aan elkander zyn.

EUCL. I. 33. — St. p. 42. pr. 22.

BEREIDING. Men trekt eene lyn (CB) die uit éene der hoeken (C) naar den tegenoverftaanden (B) gaat.

BEWYS. Uit het IV en VIII Voorftel leidt men af, dat de driehoeken ABC en CBD *in alle opzichten* gelyk zyn.

XIX. VOORSTEL. Fig. 32.

In een parallelogram (ABDC) zyn altoos de tegenovergeftelde zyden (AB en CD, AC en BD) gelyk aan elkander: de tegenovergeftelde hoeken (A en D, ABD en ACD,) zyn het ook, en het geheele parallelogram wordt door den diagonaal in twee gelyke deelen (ACB, en CBD) gefneeden.

EUCL. I. 34. — St. p. 43. pr. 22.

BEWYS.

BEWYS. Uit het IV. en IX. Voorstel toont men aan, dat de driehoeken ACB en CBD in *alle opzichten* gelyk zyn.

I. GEVOLG.

Een driehoek (CBD) is de helft van een parallelogram (ABDC) dat op dezelfde grondlyn (CD) en tusschen dezelfde evenwydige lynen zodanig gesteld is, dat het eenen hoek (D) gemeen hebbe met den driehoek.

I. AANMERKING. In het 6 gevolg van het I Voorstel van het II Boek, zullen wy toonen dat zulks ook plaats heeft, al is de hoek (D) in het parallelogram verschillend van dien in den driehoek.

II. GEVOLG.

Zo twee naastliggende zyden van een parallelogram gelyk zyn, zullen zy alle vier gelyk zyn: en men verkrygt eene *ruit*. Zo boven dien eene hoek recht is, zyn zy allen recht, en men heeft een *vierkant*. Zo de naastliggende zyden ongelyk zyn, doch eenen rechten hoek maaken, heeft men een rechthoekig parallelogram, of eenen *rechthoek* (Bep. XIII.)

AANMERKING. Men kan thans het 4 en 7 Werkstuk van het III Boek oplossen.

III. GEVOLG.

In alle vierhoeken, waar in de tegenovergestelde zyden (AB en CD, AC en BD) gelyk zyn: zyn zy ook evenwydig: en de tegenovergestelde hoeken zyn gelyk.

BEWYS. Men onderstelt dat de diagonaal (CB) getrokken is: en men gaat voort uit het XII Voorstel, en dan uit het IV.

IV. GEVOLG.

Indien men uit een stip G van de diagonaal, de lynen

FGI, en HGE evenwydig aan de zyden trekt, zal het parallelogram in vier parallelogrammen verdeeld zyn, en de twee, (AG, en GD) door welke de diagonaal niet gaat, en die *aanvulsels* om de diagonaal genoemd worden, zullen gelyk zyn aan elkander.

EUCL. I. 43. —— St. p. 48. def. 31. p. 49. pr. 30.

V. GEVOLG. Fig. 136.

De beide diagonalen (KM, LI) van een parallelogram snyden elkander in twee gelyke deelen.

BEWYS. Uit de gelykheid der driehoeken LBM, en KBI.

XX. VOORSTEL. Fig. 137.

Indien 'er uit drie stippen (I, B, F) op een der zyden (AD) van een driehoek (ADE) op gelyke afstanden (IB, BF) van elkander geplaatst, drie lynen (INP, BC, FL) evenwydig aan de grondlyn getogen zyn: zullen die deelen (NC, CL) van de andere zyde (AE) tusschen die lynen begreepen, ook gelyk aan elkander zyn. En omgekeerd, indien twee evenwydige lynen, (BC, FL), de zyden van een' driehoek snyden, en eene derde lyn, (IN), van ieder een stuk (IB, en NC) afsnydt dat gelyk is aan dat stuk (BF, CL) van ieder, het welk tusschen de eerstgemelde lynen begreepen is: is die derde lyn evenwydig aan de twee eersten.

SIMPSON I. 27.

BEREIDING. Men stelt dat de lyn PO door C evenwydig aan DA getrokken is, en de lynen IN verlengd, en FL, in P en O snydt.

BEWYS. Uit het XIX Voorstel besluit men de gelykheid der lynen PC en CO: en uit het III en IX die der lynen NC en CL. — Het tweede gedeelte, door het eerste, uit de beschouwing der ongerymdheid, daar men in vervalt met het tegendeel te stellen.

GEVOLG.

Indien men eene zyde van eenen driehoek in zo veele gelyke deelen deelt als men wil, en uit ieder eene lyn evenwydig aan de grondlyn trekt, zullen die lynen de andere zyden in het zelfde aantal gelyke deelen ſnyden.

AANMERKING. Hier door kan men het 8 Werkſtuk van het I Boek oploſſen.

XXI. VOORSTEL. Fig. 138.

Indien men de vier zyden van eenigen vierhoek (DCBA) in twee gelyke deelen deelt, zullen de lynen (HG, GF, FE, EH,), die de ſtippen daar de deeling geſchied is veréénigen, altoos een parallelogram uitmaaken.

SIMPSON. I. 29.

BEREIDING. Men trekt de diagonaalen DB, AC.

BEWYS. Men beſluit uit het XX Voorſtel dat HG en EF parallel zyn aan AC; en HE en GF aan DB: waaruit het voorſtel door het V. Voorſtel volgt.

TWEEDE BOEK.

OVER DEN INHOUD DER RECHTLYNIGE FIGUUREN.

I. AFDEELING.

OVER DE DRIEHOEKEN EN PARALLELOGRAMMEN.

EERSTE BEPAALINGEN.

I. Fig. 56.

De hoogte (CD) van eenige figuur (ACB) is de loodlyn (CD) die van den top (C) op de grondlyn (AB) valt: of, indien de figuur zodanig gesteld is (Fig. 68.) dat de zyde (AB) die over de grondlyn (CD) staat, evenwydig aan dezelve is, de loodlyn (ED) die van die zyde op de grondlyn getrokken wordt: en de *inhoud* van eene figuur is de ruimte die tusschen de lynen, waaruit die figuur bestaat, begreepen is.

EUCL. VI. 4 bep. —— St. p. 244. def. 4.

I. AANMERKING. De reeden, waarom gemelde loodlyn de hoogte van eene figuur genoemd wordt, blykt uit het 2 gevolg van het XIV Voorstel des I Boeks.

I. GEVOLG.

Twee figuuren, die tusschen dezelfde evenwydige lynen begreepen zyn, zyn even hoog: (uit deeze bepaling en gevolg 2. van Voorstel IX. des I Boeks.)

II. GEVOLG.

Twee figuuren worden gezegd gelyk te zyn, zo haare inhouden gelyk zyn.

II. AANMERKING. Zo bovendien de zyden en de hoeken

van

van de eene figuur onderling gelyk zyn, aan de zyden en de hoeken van eene andere figuur, (zo als zulks by v. in het VIII, IX, en XII Voorſtel van het eerſte Boek plaats had,) zyn niet alleen de figuuren, wat den inhoud betreft, maar ook in *allen opzichte*, gelyk.

II. Fig. 49.

Een rechthoek (EFGH) word gezegd de rechthoek van twee bepaalde lynen (AB, en CD) te zyn, wanneer deszelfs grondlyn (GH) gelyk is aan eene van die lynen (AB, by voorbeeld) en deszelfs hoogte (EG) gelyk aan de andere lyn (CD).

EUCL. II. 1 bep. —— S. p. 75. bep.

I AANMERKING. Wy zullen gelegenheid hebben in het 6 Gevolg van het VII. Voorſtel in het IV. Boek, de reden van deeze bepaaling uit te leggen.

GEVOLG. Fig. 51.

Het vierkant (ACEG) op eene lyn GE geſteld, is een rechthoek uit twee gelyke lynen (GE en CE) gemaakt.

II AANMERKING. Men duidt dikwerf een' rechthoek door de drie letters aan, die een' der hoeken bepaalen: by voorbeeld, men zegt den Rechthoek EGH, om den Rechthoek uit HG, en EG aan te duiden. Ook by veelen, vooral onder de oude Wiskunstenaaren, en die, welke hunne wyze van ſchryven ſtipt volgen, zullen drie letters van eene lyn, achtereenvolgend geplaatst, den rechthoek aanduiden van de twee lynen door die letters uitgedrukt: by v. Fig. 54. *Rechthoek* AHI: dat is, rechthoek uit AH, en HI: de middelſte letter is die welke, met de eerſte en laatſte verëénigd, de lynen, die de zyden van den rechthoek zullen zyn, uitmaakt.

Hier van daan ook de uitdrukking der Ouden, het *begreepene* door twee lynen, om den rechthoek door dezelven gevormd uit te drukken.

I. VOORSTEL. Fig. 50.

De parallelogrammen (BL, DL, DH) die op dezelfde grondlyn (ML) of op gelyke grondlynen (ML en IH) ſtaan, en tusſchen dezelfde evenwydige lynen (AF, MH) geſteld, *en dus* even hoog zyn, hebben gelyke inhouden, of zyn gelyk.

EUCL. I. 35, 36. —— W. §. 152, 153. — S. p. 44. pr. 24, 25.

BEWYS. Uit de bepaling der evenwydige lynen (I. Boek, bep. 8.) en uit het XIX. Voorſtel van het I. Boek, bewyst men eerst de gelykheid der driehoeken BDM en CEL: waar uit het overige volgt.

I. AANMERKING. De reden van de gevolgtrekking *en dus* enz. in het voorſtel zelve voorkomende, blykt uit het I. Gevolg van de I. Bepaling.

I. GEVOLG.

Een parallelogram MC is gelyk aan den rechthoek OL, die dezelfde of eene gelyke grondlyn, (ML) heeft, en wiens tweede zyde (MO) om den rechten hoek gelyk is aan de hoogte (MO of PL) van het parallelogram. Zo dat *een rechthoek de eigenaartige maat is van de parallelogrammen.*

II. GEVOLG.

Alle rechthoeken, die uit gelyke lynen gemaakt worden, zyn gelyk.

III. GEVOLG. Fig. 52.

De ſom van verſcheiden rechthoeken (LI, QH, PG,) die de zelfde hoogte doch verſchillende grondlynen hebben, is gelyk aan eenen rechthoek (LG) wiens hoogte de zelfde, en wiens grondlyn de ſom van alle de gegeeven grondlynen is.

EUCL. II. 1.

IV.

IV. GEVOLG. Fig. 51.

En dus is het vierkant (A E) van eene lyn (G E,) gelyk aan de ſom der rechthoeken, (A F, B E) van de geheele lyn met ieder der deelen, waarin de lyn verdeeld is.

EUCL. II. 2. — St. p. 76. pr. 2.

V. GEVOLG. Fig. 51.

En dus indien eene lyn (G E) in twee deelen (G F, F E) gedeeld is, is de rechthoek uit die geheele lyn (G E) en een der deelen (F E) gelyk aan het vierkant (I E) op dat deel en den rechthoek (H F) der beide deelen (G F, F E) te ſaamen.

EUCL. II. 3. — St. p. 77. pr. 3.

VI. GEVOLG. Fig. 50.

Een parallelogram (M E, B L, of E I) is altoos het dubbeld van eenen driehoek, die op de zelfde grondlyn ſtaat, en de zelfde hoogte heeft, of tusſchen de zelfde evenwydige lynen begreepen is.

EUCL. I. 41. — W. §. 154. — St. p. 47. pr. 28.

II AANMERKING. Indien men dit Gevolg met het I. Gevolg van het XIX. Voorſtel in het I. Boek vergelykt, zal men zien dat het geen toen beweezen werd plaats te hebben, wanneer de driehoek en het parallelogram eenen hoek gemeen hebben, nu op alle driehoeken, hoe verſchillende ook hunne hoeken van die der parallelogrammen zyn mogen, wordt toegepast.

III. AANMERKING. Men is uit dit gevolg in ſtaat het 11, 12, 13. (I. Oplosſing) 14. (I. Oplosſing) 16, 17, 18, 23, 24, 28*b*. Werkſtuk van het III. Boek op te losſen.

II. VOORSTEL. Fig. 51.

Indien eene lyn (G E) naar welgevallen in twee deelen (G F, F E), het zy gelyke, het zy ongelyke, gedeeld wordt: is het vierkant (A E) op de geheele lyn, de ſom van de vierkanten (A I, I E) op ieder

deel, en van den dubbelen rechthoek (IG en IC) op beide de deelen.

EUCL. II. 4. —— S. p. 78. pr. 4.

BEWYS. Uit II. 1; 2de Gevolg.

I. GEVOLG.

Indien eene lyn in twee gelyke deelen gesneeden wordt, is het vierkant van de geheele lyn, het viervoud van het vierkant op een der deelen.

II. GEVOLG.

En insgelyks, is het vierkant van een der deelen gelyk aan het verschil tusschen het vierkant van de geheele lyn, en de som van het vierkant van het tweede deel met den dubbelen rechthoek der beide deelen te samen.

I AANMERKING. Dit Voorstel kan veel algemeener uitgedrukt worden op deeze wyze. *Indien eene lyn in zo veele deelen als men begeert gesneeden wordt, is het vierkant van de geheele lyn gelyk aan de som van de vierkanten op ieder deel, en de dubbele som der rechthoeken, die uit alle de deelen, twee aan twee genomen, gemaakt kunnen worden.* Want stel de lyn in verscheiden deelen a, b, c, gesneeden, zo is door ons Voorstel, □ uit ($a + b + c$) = □ uit ($a + b$) + 2 *Rechth.* uit ($a + b$) en c + □ uit c; Maar het □

van de vermenigvuldigingen en tweede magten of quadraaten van getalen verstaan kan, het geen wy hier van rechthoeken en vierkanten van lynen gezegd hebben. Dus zyn deeze beide Voorstellen op alle grootheeden toepaslyk: en dit algemeen Voorstel leevert juist den regel op, dien men, om den vierkanten wortel uit een getal te trekken, volgt. Zie St. p. 175—185.

III. VOORSTEL. Fig. 52.

Indien eene lyn (KG) in twee gelyke, (KI, IG) en in twee ongelyke deelen (KH, HG) gedeeld wordt; zal de rechthoek (LH) van de ongelyke deelen (LH, HG) met het vierkant (NP) van het midden stuk (IH) gelyk zyn aan het vierkant (GN) van de halve lyn.

EUCL. II. 5. —— S. p. 79. pr. 5.

BEWYS. Uit het 2 en 3 Gevolg van het I. Voorstel.

IV. VOORSTEL. Fig. 53.

Indien eene lyn (AC) in twee deelen (AB, BC) naar welgevallen gesneeden is, en 'er een der deelen (BC) aangevoegd wordt, om met haar ééne lyn uit te maaken: zal het vierkant (KD) op die samengestelde lyn (AD) gelyk zyn aan viermaal den rechthoek begrepen door de gegeven lyn (AC) en het gezegde deel (BC), te samen met het vierkant van het ander deel (AB).

EUCL. II. 8.

BEWYS. Uit het 2 en 3 Gevolg van het I Voorstel.

GEVOLG:

□ op AC = Rechth. AD, AB + □ op BC, dat is: Indien men eene rechte lyn AC in twee deelen naar welgevallen deelt, en men voegt 'er een der deelen aan, zô dat het met die lyn eene rechte lyn uitmaakt; is het vierkant van de gegeven lyn, gelyk aan den rechthoek begrepen onder

de famengeftelde lyn en het ander deel, te famen met het vierkant van het aangevoegde deel.

EUCL. II. 6. —— S. p. 81. pr. 6.

V. VOORSTEL. Fig. 139.

Het verfchil der vierkanten (HC en IC,) van twee ongelyke lynen (AC, BC) is gelyk aan den rechthoek (HE) begreepen onder de fom (AD of LE) en het verfchil (AB of FE) dier beide lynen.

BEREIDING. Men verlengt AC in D, zo dat CD = BC, en men trekt vervolgens de evenwydige lynen DF, GF, KE, LI.

BEWYS. Uit het 2 gevolg van het I Voorftel van dit Boek.

GEVOLG. Fig. 52.

Het vierkant (MI) op de helft (KI) van eene lyn (KG), is altoos grooter dan de rechthoek (LH) van de twee ongelyke deelen (KH, HG) die te famen de zelfde lyn (KG) uitmaaken.

BEWYS. Rechthoek uit KH en HG, is die van $\overline{KI + IH}$ en $\overline{KI - IH}$: dus gelyk aan □ op KI — □ op IH: waaruit het gezegde volgt.

VI. VOORSTEL. Fig. 54.

De driehoeken (ADI, AEI, HKL) die op dezelfde grondlyn (AI), of op gelyke grondlynen (AI, HL), en onder de zelfde evenwydige lynen ftaan, en dus even hoog zyn, zyn gelyk.

EUCL. I. 37. —— W. g. §. 153. —— S. p. 46. pr. 26, 27.

BEREIDING. Men vult de ▭▭ BI, CI, GL, aan.

BEWYS. Het word uit het I. Voorftel van dit boek, en het 1. gevolg van het XIX. Voorftel van het I. Boek ontleend.

I. GEVOLG.

De inhoud van eenen driehoek is de helft van den inhoud van eenen rechthoek, die op de zelfde grondlyn

ftaat

ſtaat en de zelfde hoogte heeft, (6 en 1 Gev. van het I Voorſtel) en dus is de inhoud van eenen driehoek gelyk aan eenen rechthoek, waar van de grondlyn de zelfde, doch de hoogte de helft, of de hoogte de zelfde en de grondlyn de helft is, van die des driehoeks: zo dat de rechthoeken ook de eigenaartige maat der driehoeken, even als der parallelogrammen, zyn.

AANMERKING. *Wy zullen* breeder over die maat handelen in het 6, 7, 8 Gevolg en in de 8 Aanmerking op het VII Voorſtel van het IV Boek.

II. GEVOLG. Fig. 140.

Twee driehoeken die op de zelfde grondlyn, aan den zelfden kant geſteld, en gelyk zyn, zyn tusſchen dezelfde evenwydige lynen begrepen.

EUCL. I. 39.

VII. VOORSTEL. Fig. 55.

In alle rechthoekige driehoeken is het vierkant (DB) van de ſchuinſche zyde of hypotenuſa (AB) gelyk aan de ſom der vierkanten (BG en CI) van de beide overige zyden (BC en AC).

EUCL. I. 47. —— W. g. §. 172. — S. p. 50. pr. 32.

BEREIDING. Men ſtelt dat de lyn CK, uit den rechten hoek C, evenwydig aan AD of EB getogen is: en men trekt de lynen CD, CE, AF, BI.

BEWYS. Men bewyst uit het VII. Voorſtel van het I. Boek dat de driehoeken BAI en DAC gelyk zyn, zo als ook de driehoeken ABF en EBC: en vervolgens uit het 6 Gevolg van het I Voorſtel van dit Boek, dat ▭ AK = □ IC: ▭ KB = □ BG. Waer uit door het 4. Gevolg van dat Voorſtel het beſluit volgt.

I. AANMERKING. Dit Voorſtel wordt het Voorſtel of het *Theorema* van *Pythagoras* genoemd, en het is algemeen onder dien naam bekend. Men kan het zelve zeer gemaklyk uit

uit de leere der gelykvormige driehoeken bewyzen, zo als wy het in het IV. B, Voorstel XII, 3 Aanm. doen zullen.

II. AANMERKING. Dit Voorstel en de twee volgende zyn slechts byzondere gevallen van een algemeener Voorstel, alle driehoeken, hoe ook genaamd, betreffende: het welk door PAPPUS in zyne *Collectiones mathematicae* (Lib. IV. pr. 1.) opgegeven, en door den beroemden CASTILLON merkelyk vermeerderd is: zie de schoone verhandeling van den laatstgemelden in *Mem. de l'Acad. de Berlin* A°. 1766. p. 351.

I. GEVOLG.

In alle rechthoekige driehoeken is het quadraat van een der rechthoeks-zyden, gelyk aan het verschil der vierkanten op de schuinsche en op de andere rechthoeks-zyde: *en dus* gelyk aan den rechthoek begrepen onder de som en het verschil van de schuinsche en die rechthoeks-zyde.

II. AANMERKING. De reeden van de gevolgtrekking, *en dus*, blykt uit het V. Voorstel.

II. GEVOLG. Fig. 70.

Indien in eenigen driehoek DEH, de vierkanten van twee zyden (DH, HE) te samen genomen gelyk zyn aan het vierkant op de derde, is die driehoek rechthoekig: en de rechte hoek wordt door beide de zyden, wier vierkanten men samentelt, begreepen.

EUCL. I. 48.

BEREIDING. Men vooronderstelt HF = aan DH en ⊥ op EH: en men trekt EF.

BEWYS. Door dit Voorstel: en het XII van het I Boek.

IV. AANMERKING. Men kan het zelfde uit het *ongerymde* bewyzen: mits de volgende VIII. en IX. Voorstellen eerst bekend zyn.

III. GEVOLG. Fig. 56, en 57.

In alle driehoeken ACB, is het verschil der vierkanten op twee zyden (CB, CA) gelyk aan het verschil der vierkan-

kanten van beide de ſtukken (D B, D A) die op de grondlyn, door de loodrechte lyn (C D) uit den top getogen, gemaakt worden: en dus is het ook gelyk aan den rechthoek onder de ſom en het verſchil van gemelde ſtukken begreepen.

V. AANMERKING. De reeden van de gevolgtrekking, en dus blykt uit het V. Voorſtel.

IV. GEVOLG. Fig. 56 en 57.

Indien twee rechthoekige driehoeken D C B, A C D dezelfde hoogte C D hebben, zyn 1. de ſommen van de vierkanten der ſchuinſche zyde in den eenen en der grondlyn in den anderen gelyk (□ op C B + □ op DA = □ op CA + op □ D B) en 2. De verſchillen der vierkanten van de ſchuinſche zyden, en der vierkanten van de grondlynen zyn ook gelyk: (d. i. □ op C B — □ op C A = □ D B — □ op D A.)

V. GEVOLG. Fig. 51.

Indien men in eenen rechthoek (A C E G) een ſtip I. naar welgevallen neemt, van het welk men rechte lynen (I A, I C, I E, I G) naar de hoeken trekt: zullen de ſommen der vierkanten op de lynen, die naar de tegenovergeſtelde hoeken getrokken worden, altoos gelyk zyn: dat is, □ op A I + □ op I E = □ op I C + □ op I G.

BEWYS. Uit dit Voorſtel, gepaard met het XIX. uit het I. Boek.

VI AANMERKING. Men is thans in ſtaat het 12 Werkſtuk van het I, en de 25, 27, 28a. van het III Boek op te losſen.

VIII. VOORSTEL. Fig. 56.

Indien men uit den rechten hoek (C) van eenen rechthoekigen driehoek (A C B) eene loodrechte lyn (C D) laat vallen op de ſchuinſche zyde (AB): zal het vierkant van die loodlyn (A D) gelyk zyn aan den rechthoek onder

der de ſtukken (AD, DB) van die ſchuinſche zyde begreepen.

EUCL. X. Lemma I. van de 34 propoſitie.

BEWYS. Uit het I. Gevolg van het VII. Voorſtel, uit het VII. Voorſtel zelve, en dan uit het II. Voorſtel, allen van dit Boek.

I AANMERKING. Dit Voorſtel kan ook uit de eigenſchappen van den cirkel, of uit die van de gelykvormige driehoeken beweezen worden, zo als wy het in het V. Boek X Voorſtel 2, Gevolg, en in het IV. Boek XII. Voorſtel, 1. Gevolg, doen zullen.

I. GEVOLG.

Indien in eenen driehoek, het vierkant van de loodlyn (CD) uit eenen der hoeken (ACB) op de tegenovergeſtelde zyde (AB) nedergelaaten, gelyk is aan den rechthoek van de ſtukken (AD, DB) die daar door op die zyde gemaakt worden, is de gemelde hoek altoos een rechte hoek.

BEWYS. Uit het ongerymde, door dit Voorſtel.

II. GEVOLG.

Het vierkant van een der zyden (AC) van eenen rechthoekigen driehoek, is altoos gelyk aan den rechthoek begreepen onder de ſchuinſche zyde AB, en dat ſtuk (AD) van de ſchuinſche zyde dat door de loodlyn (CD) uit den rechten hoek nedergelaaten, afgeſneeden wordt en aan de gemelde zyde (AC) grenst.

EUCL. X. Lemma I. van de 34. propoſitie.

BEWYS. Uit het VII. Voorſtel: het voorgaand Gevolg: en 3. Gevolg van het I. Voorſtel, van dit Boek.

I. AANMERKING. Het zelfde kan uit de leer der gelykvormige driehoeken opgemaakt worden, zo als wy in het IV. Boek, XII. Voorſtel, 2. Gevolg toonen zullen.

III. GEVOLG.

De rechthoek van de ſchuinſche zyde, AB, en een van haare

haare ſtukken, AD, is altoos gelyk aan den rechthoek, uit de ſom en het verſchil dier zelfde ſchuinſche zyde, AB, en dier rechthoeks-zyde (CB) die aan het ander ſtuk (DB) grenst.

BEWYS. Uit het voorige Gevolg en het 1. Gevolg van het VII. Voorſtel.

IX. VOORSTEL: Fig. 57, 58.

In alle driehoeken, is (MN) het vierkant van eene zyde (CB) grooter of kleiner, dan de ſom der vierkanten op de grondlyn (AB) en de derde zyde (AC), naarmate de hoek (CAB) over de eerstgemelde zyde (CB) ſtomp, of ſcherp is: en het verſchil is de dubbele rechthoek van de geheele grondlyn (AB) en het ſtuk (DA) van dezelve begreepen tusſchen den gemelden hoek en de loodlyn (CD) uit den tegenoverſtaanden hoek (ACB) getogen.

EUCL. II. 12. 13. —— St. p. 83. pr 8 en 84. pr. 9.

BEWYS. Uit het VII. Voorſtel neemt men in den driehoek DCB de waarde van het vierkant op CB: vervolgens uit het 1. Gevolg van dat Voorſtel, in den driehoek DCA die van het vierkant op CD: en dan uit het 2 Gev. van het II Voorſtel de waarde van het verſchil de vierkanten op BD en AB.

I. AANMERKING. Indien de ∠CAB recht was, viel de loodlyn *CD* op *CA*: en men kreeg wederom het VII. Voorſtel: het ſtuk *DA* als dan *nul* wordende, is de overmaat, of het te kort ſchietende van het □ op CB, by de ſom der vierkanten op AC en AB, ook *nul*.

II. AANMERKING. Uit het 6. Gevolg van het VII. Voorſtel I. Boek volgt: dat in het eerste geval de loodlyn CD buiten, in het tweede binnen den driehoek valt: en dus dat het tweede gedeelte van het Voorſtel, ook voor rechthoekige driehoeken plaats heeft, mits de *hypotenuſa* of ſchuinſche zyde als de grondlyn aangezien, en dus de loodlyn uit dien rechten hoek getogen worde.

I. GE-

I. GEVOLG. Fig. 58.

Indien men uit de twee hoeken C en A, die aan uiteinden van de zelfde lyn (AC) grenzen, loodlynen AE, CD, op de tegenovergestelde zyden trekt, zyn de rechthoeken, begreepen onder die zyden, (AB, CB) en derzelver stukken (BD, BE) die aan denzelfden hoek (B) grenzen, gelyk.

III. AANMERKING. Indien de $\angle ACB$ recht is zo als in Fig. 56, is Rechthoek AB, BD $=$ $\square$ CB, zo als wy zulks reeds in het 2. Gevolg van het VIII. Voorstel beweezen hebben, en in het IV. Boek XII.-Voorstel, 2. Gevolg, uit de leere der gelykvormige driehoeken nog bevestigen zullen.

II. GEVOLG. Fig. 58.

Indien men uit den top C van eenen driehoek (ACB) op de tegenovergestelde zyde AB, eene lyn CF trekt, welke die zyde in twee gelyke deelen snydt: is het dubbeld vierkant van die lyn (CF), met het dubbeld vierkant van de helft der grondlyn, gelyk aan de som van de vierkanten der twee overige zyden: dat is, $2 \square$ op CF $+ 2 \square$ op AF $= \square$ op AC $+ \square$ op CB. (voor het bewys wordt CD loodrecht getrokken:) waar uit volgt (Gevolg van het II. Voorstel,) $\frac{\square \text{ op } AC + \square \text{ op } CB}{2} - \square \text{ op } CF = \frac{1}{4} \square AB$: dat is, het vierde gedeelte van het vierkant der zyde, waarop de lyn is nedergelaaten, is gelyk aan het verschil van de helft der som van de vierkanten der overige zyden, en het vierkant der nedergelaaten lyn.

III. GEVOLG. Fig. 136.

In alle parallelogrammen (KLMI) is de som der vierkanten van beide de Diagonalen (KM, LI) gelyk aan de som der vierkanten van de vier zyden (LM, MI, KI, KL).

St. p. 85. pr. 10.

BEWYS. Uit het VIII. Voorstel van het I. Boek, en uit dit Voorstel.

IV. AANMERKING. Indien het parallelogram een ruit is, is de som der vierkanten van beide de diagonalen, het viervoud van het vierkant van een der zyden.

X.

X. VOORSTEL. Fig. 141.

Indien een gelykbeenige driehoek (B A D) zodanig gesteld is, dat de hoeken (B en A D B) op de grondlyn het dubbeld zyn van den tophoek (A); en indien men uit eenen der hoeken (D) op de grondlyn, op het tegenoverstaand been eene lyn (C D) trekt, die gelyk is aan die grondlyn, zal zy een zodanig stuk (B C) van dat been afsnyden, dat 1. het overige gedeelte (A C) gelyk zal zyn aan de grondlyn: 2. dat het vierkant van dat deel gelyk zal zyn aan den rechthoek onder het geheel been A B, en het eerste stuk (B C) begreepen. 3. dat in den gelykbeenigen driehoek (B C D) door de grondlyn (B D) van dien gegeven driehoek, en de getrokken lyn (D C) gemaakt, de hoeken (B en B C D) op de grondlyn ook het dubbeld zullen zyn van den hoek (BDC) in den top: en 4. dat die hoek (B D C) het derde gedeelte is van den uiterlyken hoek (A C D) door de getrokken lyn (D C,) met het been (B A) waar op zy getrokken is, gevormd.

BEREIDING. Zy D E loodrecht op B C: en dus (uit I. B. XI. Gev. 4.) B E = E C. en B C = 2 B E.

BEWYS. Van het I. uit het I. Boek, XI. VII. en XI. Voorstel.

Van het II. uit het IX. Voorstel van dit Boek: de bereiding: het II. Voorstel: en het 3. Gevolg van het I. beiden uit dit Boek.

Van het III. uit het XI. Voorstel, en het 3 Gevolg van het VII. Voorstel van het I. Boek.

Van het IV. uit I. B. XI. Gevolg 8. of uit I. B. XI. en VII.

I. GEVOLG.

Het omgekeerde heeft ook plaats: namelyk: indien eene lyn (A B) in twee deelen zodanig gedeeld is, dat het vierkant van het grootste stuk (A C) gelyk is aan den rechthoek van het kleinste stuk (B C) en de geheele lyn (A B): en men uit het stip van snyding C eenen Cirkel trekt waar van het grootste stuk de *radius* is: en uit het ander eind (A) van

het grootste stuk (A C) met eenen straal (A D) gelyk aan de geheele lyn (A B) eenen anderen cirkelboog die den eerstgemelden snydt (in D), en uit dat stip van snyding lynen, (D A, D B, D C) naar de uiteinden (A, B) en het snydpunt (C) van de gegeven lyn trekt; zal men twee gelykbeenige driehoeken verkrygen: in welke beiden de hoeken op de grondlyn het dubbeld zullen zyn van dien in den top: en de beenen van den grooten driehoek (B A D) zullen gelyk aan de gegeeven lyn: en die van den kleinen gelyk aan derzelver grootste stuk (A C) zyn.

St. p. 87. pr. 12.

BEREIDING. Zy D E ⊥ op B C.

BEWYS. Uit het IX en II Voorstel van dit, en het 4 Gevolg van het XI. Voorst. van het I. Boek bewyst men dat C D = B D is: het overige uit het voorgaande, en I. 7.

II. GEVOLG.

Hier uit volgt ook, dat ∠ B D C = ∠ C D A, of dat ∠ B D A, door de lyn D C, in twee gelyke deelen gedeeld worden.

III. GEVOLG.

Hier uit volgt ook dat, zo in eenen gelykbeenigen driehoek de hoek op de grondlyn dubbeld is van dien in den top, de lyn (D C) welke den eerstgemelden hoek in twee gelyke deelen snydt, de overstaande zyde (A B) zodanig snyden zal, 1. dat het vierkant van het grootste stuk gelyk zal zyn aan den rechthoek van de geheele lyn, en het kleinste stuk, 2. dat het grootste stuk gelyk zal zyn aan de grondlyn.

IV. GEVOLG.

Het blykt uit dit Voorstel, dat het beschryven van eenen gelykbeenigen driehoek, waarin de hoeken op de grondlyn het dubbeld zyn van den tophoek, afhangt van het snyden van eene lyn zodanig dat het vierkant van het eene stuk gelyk is aan den rechthoek uit de geheele lyn en het ander stuk, of, zo als wy het IV. B. 2 bep. zullen noemen, in middelste en uiterste reeden: zie het III. Boek der Werkstukken, het X. Voorstel. Het blykt verder dat het snyden van eenen

hoek

hoek in drie gelyke deelen, ook gedeeltelyk van het zelfde grondbeginsel afhangt, zo als wy dat reeds in het I. B. XI. Voorstel 8. Gevolg gezegd hebben, en nader in de Aanmerking op B. VIII. Voorst. 8. zullen aantoonen: zie ook de Aanmerkingen op het I. Werkstuk van het II Boek.

II. AFDEELING.

OVER DE VEELHOEKEN.

TWEEDE BEPAALINGEN.

III.

Eene *geschikte* of *reguliere* of *regelmatige* veelhoek is die, wiens zyden allen gelyk zyn, en gelyke hoeken met elkander maaken.

GEVOLG.

De gelykzydige driehoek en het vierkant kunnen dus ook tot de geschikte veelhoeken gebragt worden.

AANMERKING. Fig. 142. Men moet wel op de dubbele voorwaarde in de bepaling begrepen letten: want in een veelhoek kunnen alle de hoeken gelyk zyn zonder dat de zyden het zyn zo als in den veelhoek ABGHDEFA: of alle de zyden kunnen gelyk zyn zo als in den veelhoek AIKDEFA: zonder dat de hoeken het zyn: in geen van beide de gevallen is de veelhoek geschikt of regelmatig, zo als de veelhoek ABCDEF is, daar de zyden gelyk zyn, en de hoeken het ook zyn

Zie CLAVIUS op het IV. Boek van EUCLIDES.

IV.

Men noemt *inwendige* hoeken van den veelhoek; de hoeken welke deszelfs zyden naar den binnenkant

met elkander maaken: en *uitwendige hoeken* de hoeken die eene zyde met de verlengde naastgelegen zyde, naar buiten maakt.

V. Fig. 60.

Centrum of *Middelpunt* van eenen veelhoek is een ſtip (C) zodanig geſteld dat de lynen (CA, CM, CK, CH, CF, CD) naar de hoeken van den veelhoek getrokken, gelyk zyn, en dezelven in twee gelyke deelen ſnyden.

AANMERKING. Wy zullen in het XIV. Voorſtel bewyzen dat 'er een zodanig *centrum* of *middelpunt* in de geſchikte veelhoeken is.

VI.

Men noemt *omtrek* van den veelhoek de ſom van alle zyne zyden.

GEVOLG.

In eenen regelmatigen veelhoek is de omtrek gelyk aan eene der zyden zo dikwerf genomen als 'er eenheeden zyn in het getal dat aanduidt uit hoe veele zyden de veelhoek beſtaat.

VII. Fig 60.

De loodlyn, die uit het middelpunt van eenen regelmatigen veelhoek op eene der zyden valt, wordt

BEREIDING. Men neemt eenig ſtip I naar welgevallen, en trekt lynen naar de hoeken van den veelhoek, om deezen in zo veele driehoeken te verdeelen als 'er zyden zyn.

BEWYS. Uit het I. Boek VII. Voorſtel, en gevolg van het III.

AANMERKING. Het zelfde heeft dus ook plaats voor den driehoek: doch men heeft dit algemeener Voorſtel niet kunnen bewyzen, zonder eerst, uit andere gronden, de zaak voor een byzonder geval, voor den driehoek namelyk, beweezen te hebben. Dus ziet men hier de waarheid bevestigd van het geen 's GRAVESANDE zegt in zyne *Logica* §. 1096: dat men dikwerf een algemeen Voorſtel niet bewyzen kan, zonder alvorens een byzonder geval van hetzelve beweezen te hebben. Wy zullen in het vervolg veele voorbeelden van dien aart aantreffen.

I. GEVOLG.

Indien de veelhoek regelmaatig is, en het getal der zyden door g wordt uitgedrukt: zal ieder hoek, daar zy allen gelyk zyn, zo veele rechte hoeken bevatten, als 'er door het getal $\frac{2.g-4}{g.}$ uitgedrukt worden.

II. GEVOLG.

'Er zyn maar drie ſoorten van figuuren, de gelykzydige driehoek, het vierkant, en de geſchikte zeshoek, die om één en het zelfde ſtip geplaatst eene ruimte volſtrekt, en zonder iets over te laaten, kunnen vullen: dit geſchiedt namelyk met zes gelykzydige driehoeken, vier vierkanten, en drie zeskanten.

TACQUET op de laatſte propoſitie van het IV Boek van EUCLIDES.

XII. VOORSTEL. Fig. 61.

Alle de uitwendige hoeken van eenen veelhoek zyn gelyk aan vier rechte hoeken.

TACQUET. Op de 32 prop. van het I. B van EUCL.

BEWYS. Uit het I. Voorstel van het I. B en het voorgaand Voorstel.

AANMERKING. Fig. 62. Wy handelen in dit Voorstel van veelhoeken in welken de toppen van alle de hoeken naar buiten staan: waare het anders: waaren 'er eenige hoeken, zo als H F D, wier toppen naar binnen staan, dan blyft het XI. Voorstel wel het zelfde, doch dit wordt 'er dus door veranderd.

Alle de uitwendige hoeken van eenen veelhoek zyn gelyk aan de som van vier rechte hoeken, en van tweemaal zo veel rechte als 'er hoeken zyn, wier toppen naar binnen staan.

L. C. §. 520.

XIII. VOORSTEL. Fig. 143.

Indien men binnen eenen veelhoek, welke hy ook zy, een stip (P) neemt: en uit het zelve lynen (PB, PA, PD enz.) naar alle de hoeken (B, A, D enz.) trekt, en vervolgens uit het zelve op ieder der zyden lynen (PT, PX enz.) nederlaat, die de zyden in twee gelyke deelen snyden, zal het verschil tusschen de som der vierkanten van alle de lynen die naar de hoeken gaan, en de som der vierkanten van alle de lynen die de zyden snyden, gelyk zyn aan het vierde gedeelte van de som der vierkanten van alle de zyden des veelhoeks.

FAGNANO, *Opera Mathem* T. II. p. 206.

BEWYS. Men past het laatste gedeelte van het 2 gevolg des IX Voorstels op elk der driehoeken B P A enz. men neemt de som, en men verkrygt de som die in het Voorstel gemeld wordt.

XIV.

XIV. VOORSTEL. Fig. 60.

Indien men alle de hoeken van eenen regelmatigen veelhoek in twee gelyke deelen deelt, zullen 1. alle de lynen die de hoeken aldus deelen (A C, D C, F C, H C, K C, M C,) in een ſtip C te ſamen komen: 2. Zy zullen allen gelyk zyn, en dus den veelhoek in zo veele gelykbeenige driehoeken verdeelen als er zyden zyn: 3. Zy zullen om het ſtip C gelyke hoeken (A C D, D C F, F C H enz.) maaken: en 4. Zal dat ſtip C even ver van alle de zyden af zyn: *dat is*, de loodlynen uit dat ſtip op de zyden getogen zullen allen gelyk zyn: en dus zal dat ſtip het middelpunt van den veelhoek zyn. (V bepaling.)

H. g. §. 129.

BEWYS. Het eerſte gedeelte volgt uit het I. Boek, IX. Voorſtel, en 1 Gevolg van het XI. Voorſtel.

Het tweede en derde volgt uit het geen in het bewys van het eerſte reeds beweezen is.

Het vierde uit de gelykheid der driehoeken C D B, C E D, C E F, C G F door het VII. Voorſtel van het I. Boek.

I. AANMERKING. De reeden van de uitlegging, *dat is*, enz. in het 4. gedeelte van het Voorſtel, volgt uit het I. B. 1 Gevolg van het XIV. Voorſtel.

II. AANMERKING Daar het ſtip C met reeden middelpunt genoemd wordt, kan men de gelyke lynen C A, C D, enz. die naar de hoeken gaan *ſtraalen* noemen, in navolging van het geen voor den cirkel plaats heeft (I. Boek: 4 bep.)

III. AANMERKING. De gelykbeenige driehoeken, waarin de veelhoek verdeeld wordt, worden te recht *middelpunts* driehoeken genoemd, om dat zy om het middelpunt ſtaan: en, daar zy onderling gelyk zyn, geldt voor allen wat voor één derzelven beweezen wordt.

I. GEVOLG.

Ieder hoek om het middelpunt, of de *middelpuntshoek* van den regelmatigen veelhoek, door twee lynen (C A, C D) die naar de einden van eene en de zelfde zyde (A D) gaan gevormd, is $= \frac{4\,R}{g}$, zo men den rechten hoek door R, en het getal zyden door g. uitdrukt [gevolg van het III Voorst. I. B.] En dus is de hoek, welken twee zyden van een' regelmatigen veelhoek uitmaaken, gelyk aan (g — 2) *halve middelpunts hoeken*.

Want die hoek is $\frac{(2g-4)R}{g}$, dus $= \frac{4R[g-2]}{2g} = (g-2)$ *halve middelpunts hoeken*.

II. GEVOLG.

In eenen regelmatigen zeshoek, is de driehoek door eene zyde, en twee *straalen*, in het middenpunt gevormd, gelykzydig.

XI. Voorstel 1 Gev. en I. B. X Voorstel 2 Gev.

III. GEVOLG.

Indien het getal der zyden van eenen regelmatigen veelhoek *even* is: zullen de beide lynen, die uit het middelpunt naar de tegenovergestelde hoeken getrokken worden, ééne rechte lyn uitmaaken: die lynen zullen den veelhoek in twee gelyke deelen deelen, en kunnen dus *diagonalen* genoemd worden: de beide lynen die uit het middelpunt, loodrecht op de tegenovergestelde zyden getrokken worden, zullen ook ééne lyn uitmaaken, en den veelhoek in twee gelyke deelen deelen: dit zelfde heeft ook plaats voor ieder lyn, die door het middelpunt getrokken wordt: en eindelyk zullen de tegenovergestelde zyden evenwydig aan elkander zyn.

Het eerste en tweede volgt uit het I. Boek II. Voorstel: het laatste, uit dit Voorstel zelve en het IV. Voorstel van het eerste Boek.

L. C. §. 512. 513.

IV.

IV. AANMERKING: Het is dus met reeden, dat men de regelmatige veelhoeken, wier zyden even in getal zyn, ook *symmetrische* of *gelykmatige* veelhoeken noemt.

IV. GEVOLG. Fig. 144.

Hier uit volgt wederom, dat, in die gelykmatige veelhoeken, de lynen (A D, G E) die naar de uiteinden der elkander tegenovergestelde, en dus evenwydige zyden getrokken worden, met die zyden rechte hoeken uitmaaken.

XV. VOORSTEL. Fig. 144.

Indien men in eenen regelmatigen veelhoek, waarvan de zyden even in getal zyn, en dus in eenen gelykmatigen veelhoek, de uiteinden der zyden die aan elkander evenwydig zyn door rechte lynen verèénigt, zullen deeze door haare onderlinge ontmoetingen, om het middelpunt van den veelhoek, eenen nieuwen regelmatigen veelhoek maaken, van even veel zyden als de gegeeven veelhoek, en waarvan de loodlyn de helft is van de zyde van den gegeeven.

DU FAY, *Mem. de l'Acad.* 1727. p. 299.

BEWYS. Uit I. B. XI. en IX. en uit het 3 Gev. van het XIV. Voorstel van dit Boek.

AANMERKING. Wy zullen, in het 7. Gevolg van het XVIII. Voorstel des VI Boeks, die inwendige veelhoeken nader beschouwen.

XVI. VOORSTEL. Fig. 145.

Indien men uit de beide uiteinden van ieder zyde van eenen regelmatigen veelhoek, wiens zyden oneven in getal zyn, loodlynen op die zyden opricht, zullen deeze door haare onderlinge ontmoeting twee regelmatige veelhoeken vormen, onderling gelyk, en ieder van even veel zyden als de gegeeven veelhoek: hunne loodlyn zal de helft zyn van de zyde des gegeeven veelhoeks: zy zullen het middelpunt des eersten veelhoeks tot middelpunt hebben; en altoos binnen den veelhoek vallen, ten zy deeze een (gelykzydige) driehoek zy. Verder indien men ieder punt

van den gegeeven veelhoek aanmerkt als het begin van eene zyde en het uiteinde van de naastvoorgaande, zullen de loodlynen uit het begin van ieder zyde op dezelve getrokken den eenen veelhoek, en de loodlynen uit het einde van ieder zyde op dezelve getrokken den anderen veelhoek vormen.

DU FAY, *Mem. de l'Acad.* 1727. p. 299. doch niet zo algemeen. Hy spreekt slechts van éénen veelhoek.

BEWYS. Uit I. B. VII: I. B. XI: en I. B. IX.

AANMERKING. Het 8 Gevolg van het XVIII Voorstel van het VI Boek zal den aart dier inwendige veelhoeken nog nader leeren kennen.

XVII. VOORSTEL.

De inhoud van eenen regelmatigen veelhoek is gelyk aan dien van eenen driehoek, waar van de grondlyn den omtrek van den veelhoek is, en de hoogte de loodlyn uit het middelpunt op eene der zyden van den veelhoek nedergelaten.

St. p. 135. pr. 13.

BEWYS: Uit het VI Voorstel.

GEVOLG.

De inhoud van eenen regelmatigen veelhoek is gelyk aan dien van eenen rechthoek, waar van de hoogte de loodlyn is uit het middelpunt op eene der zyden getrokken, en de grondlyn, de helft van den omtrek des veelhoeks. VI Voorstel, 1 Gev.

AANMERKING. De inhoud der veelhoeken wordt dus ook tot die der rechthoeken gebragt.

XVIII. VOORSTEL. Fig. 147.

Wanneer men op alle de zyden van eenen regelmatigen veelhoek, stippen (E, F, G, I, L) neemt even ver van de naaste hoeken (A, D, C, B, K), zullen de lynen, die deeze stippen vereenigen, eenen regelmatigen veelhoek van

even

eeven veel zyden uitmaaken, als de gegeeven veelhoek zelve: en wiens middelpunt het middelpunt des eersten veelhoeks is.

BEWYS: Voor het I. Uit de gelykheid der driehoeken A E L, E D F enz door I. B. VIII. — Voor het II. Uit de gelykheid der driehoeken A O L, E O D, enz. en dus der lynen L O, E O, F O enz. waar uit volgt dat O het middelpunt is.

AANMERKING. SIMPSON heeft dit alléén voor het vierkant beweezen, in zyn I. Boek pr. 28.

XIX. VOORSTEL. Fig. 146.

De inhoud van een *trapezium*, (C E B A) waar van twee zyden (C A, E B) rechte hoeken met de grondlyn (A B) maaken, is gelyk aan eenen rechthoek, waar van de grondlyn die van het trapezium is, en de andere zyde de halve som der rechthoeks-zyden in het *trapezium*.

St. p. 69. pr. 37.

BEWYS: Uit het VI Voorstel.

XX. VOORSTEL.

De inhoud van alle rechtlynige figuuren wordt tot die van de rechthoeken gebragt: en men kan altoos eenen rechthoek maaken, die gelyk is aan den inhoud van eene gegeeven figuur.

BEWYS. De Figuur wordt door lynen in driehoeken verdeeld: ieder driehoek is gelyk aan eenen bepaalden rechthoek (VI Voorstel I Gevolg): en men kan, door het geen reeds geleerd is, éénen rechthoek maaken, gelyk aan de som van verscheiden andere rechthoeken, en dus aan den gegeeven veelhoek: zie het 16 en 18 Werkstuk van het III Boek.

DERDE BOEK.

OVER DE

EVENREEDIGHEID.

INLEIDING,

BEHELZENDE

ALGEMEENE BEPAALINGEN.

I.

Wanneer eene grootheid, verscheiden maalen genomen, of herhaald, of, in andere woorden, wanneer eene grootheid, door eenig getal vermenigvuldigd zijnde, eene andere grootheid evenaart: is zy een *effen gedeelte*, een *opgaand deel*, (*pars aliquota*) van die tweede grootheid: Doch indien zy eens of meermaalen genomen dezelve niet evenaart, maar kleiner blyft, en nog eenemaal meerder genomen grooter wordt, is zy 'er een *oneffen* gedeelte van (*pars aliquanta*).

EUCL. V. 1 def. en zie daarop, zo als bestendig in dit geheele boek, de aanmerkingen van KORNIO.

AANMERKING: Ik zeg eene *grootheid*, en niet enkel een getal: want een kleiner lyn kan zo wel een even gedeelte van eene grootere lyn, of een kleine Cirkel van eenen grooteren Cirkel, of een kleiner vat van een grooter vat zyn, als een kleiner getal van een grooter: 1, 2, 5. zyn *effen*, doch 3, 4, 7, 8, 9. *oneffen* gedeelten van 10.

II.

Eene grootheid wordt een *veelvoud* of *vermeenigvuldigde* (*multiplex*) van eene andere genoemd, als deeze de eerstgemelde *meet*, of een *effen* gedeelte daar van is: en dat *effen* gedeelte wordt eene *ondervermeenigvuldigde*,

een *opgaand deel* (*submultiplex*) van de andere grootheid genoemd.

By v. 10 is eene *vermenigvuldigde* van 1, 2, 5: doch niet van 3, 6, 7, 8, 9: en 1, 2, 5 zyn *ondervermenigvuldigden* van 10.

EUCL. V. 2 bep. en VII. 5 bep.

AANMERKING. Ik zeg grootheid, en niet alleen *getal* om de reeds aangehaalde reeden: welke ook voor de volgende bepaling geldt.

I. GEVOLG.

Hier van de benamingen *dubbeld*, *drievoud* enz. *onderdubbeld* of *helft*, *onderdrievoud* of *derde gedeelte*, enz.

III.

Twee (of meerder) grootheden worden gezegd *gelykvouden*, of *gelykvermenigvuldigde* (*aequimultiplicia*), te zyn van twee (of meerder) anderen, wanneer zy deeze grootheden even veel maalen bevatten, ieder namelyk die grootheid, van welke zy de *vermenigvuldigde* het *veelvoud* is.

By v. 20, 40, 60 zyn *gelykvermenigvuldige* of *gelykvouden* van 4, 8, en 12, of van 5, 10, 15, of van 10, 20, en 30; maar zy zyn het niet van 5, 8, 20: altoos die zelfde orde in acht nemende.

IV.

Men noemt *magten* van een *getal*, de getalen die men verkrygt wanneer dat getal, door zich zelven *eens*, *twee*, *drie*, *vier* maalen en zo voorts vermenigvuldigd wordt. Men verkrygt namelyk de *tweede magt*, ook wel *quadraat* of *vierkant* genoemd, wanneer een getal *ééns* door zich zelven vermeenigvuldigd wordt: de *derde magt*, ook *Cubus* of *Taarling* genoemd wanneer een getal *twee* maalen: de *vierde magt* wanneer het *drie* maa-

maalen; de *vyfde magt* wanneer het *vier* maalen en zo voorts door zich zelf vermenigvuldigd wordt.

En omgekeerd: wanneer men een getal heeft, noemt men *wortels* van het zelve die getalen, welke, door zich zelven vermenigvuldigd, het eerstgemelde uitmaaken: en dat wel *tweede*, ook *quadraat* of *vierkants* wortel, *derde*, ook *cubieke* of *taerling wortel*, *vierde*, *vyfde* enz. wortel die getalen, welke *eens*, *twee*, *drie*, *vier* maalen door zich zelf vermeenigvuldigd, het gegeeven getal uitmaaken.

By voorbeeld: 4, 8, 16, 32. enz. zyn, in die orde, de 2, 3, 4, 5 magt van 2: doch 5 is de tweede of *quadraat* wortel van 25: de *derde* of *cubieke* wortel van 125: de *vierde* van 625: de *vyfde* van 3125 en zo voorts.

I. AANMERKING Wy zullen in het IV Boek VII Voorstel, 8. Gevolg N. 4 en in het XI. B. XI. Voorstel 2 Gevolg zien, waarom de tweede en derde magten, ook *quadraten* of *vierkanten* en *Cubussen* of *Taarlingen* genoemd worden.

II. AANMERKING. Men kan *eerste* magt van een getal noemen, dat getal zelve, dat is, dat getal door *één* vermeenigvuldigd: en dit gesteld zynde zal men, in plaats van de magten uit te drukken door de vermeenigvuldiging zelve, by v. door $a \times 1$, $a \times a$, $a \times a \times a$, $a \times a \times a \times a$, dat lastig is, de zelven door eenen *exponent of aanwy-*

enz. de tweede, derde, vierde enz. wortel van a dus is $4 = \sqrt[3]{64}$: om dat 4, tweemalen door zich zelven vermenigvuldigd, of de derde magt van 4, juist 64 oplevert.

III. AANMERKING. Hier uit volgt 1. dat wanneer men magten van een getal door magten van het zelfde getal multipliceert, of divideert, de *aanwyzer* van het *product* of *quotient* de *som* of het *verschil* der aanwyzers zyn zal. 2. Dat men de divisie door eenen aanwyzer, met het teeken (−) *minus*, ter aanduiding van de aftrekking zal kunnen aanwyzen: zo als $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ enz. door a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} enz. 3. Dat men de wortels zal kunnen aanduiden, niet alleen door de teekenen $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ enz. maar ook door gebrookene aanwyzers, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ enz. by v. $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$: want a of $a^1 = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1$. 4. Dat de magt *nul* van een getal altoos de *eenheid* is: want $1 = \frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0$. Zo dat men altoos in plaats van 1 de magt 0 van welke grootheid men wil stellen kan.

IV. AANMERKING. Ik gebruik hier het woord *getal* en niet *grootheid*, om dat de magten in eene wezenlyke vermeenigvuldiging bestaan, en dus in den eigenlyken zin niet dan op getalen toegepast kunnen worden: men kan wel zeggen 4 gemultipliceerd door 4, en dat getal opgeven; maar men kan geen lyn door eene lyn, geen cirkel door eenen cirkel *multipliceeren*: en indien men wel eens van de de *multiplicatie* van twee lynen, en zo voorts, spreekt, of de zelve door het teeken $\times$ aanduidt, geschiedt zulks maar kortheidshalven: en het beteekent altoos stilzwygend het getal dat de grootheid van eene lyn of eenen cirkel, by v. uitdrukt, vermeenigvuldigd door het getal dat de grootheid van eene andere lyn of cirkel uitdrukt.

V.

Men noemt *gelykfoortige* grootheden die, welke zodanig gefteld zyn dat eene vermeenigvuldigde van de kleinfte de grootfte kan evenaaren, of overtreffen: of wel, grootheden die uit de zelfde foort van eenheeden beftaan.

VOORBEELD. Lynen zyn onderling gelykfoortig: parallelogrammen zyn het ook onderling: een oxhoofd is gelykfoortig met eenen emmer, of een pint: om dat eene meenigte van emmers of pinten een oxhoofd kunnen uitmaaken.

Maar eene lyn, een parallelogram, een oxhoofd; zyn onderling ongelykfoortig.

VI.

Men noemt meetbaare, of ook *rationeele* grootheden; of getalen, die, welke eene gemeene maat hebben: 't zy de kleinfte de maat van de grootfte zy, dat is, juist eenige maalen in de zelve begreepen worde of opgaa, het zy eene derde grootheid de maat, of een gedeelte van beiden zy.

EUCL. X. 1 def.

AANMERKING. Ik zeg hier *grootheden* en niet enkel getalen, om dat dit op alle grootheeden toepasfelyk is: een once, een pond, een fchip-pond zyn meetbaare grootheden: even als een anker, een oxhoofd, een pyp; en zo voorts.

II. GEVOLG.

Alle Breuken, of gebrokens, zyn onderling meetbaar: want men behoeft ze flechts tot den zelfden noemer te brengen.

III. GEVOLG.

In alle getalen hoe genaamd is de *eenheid*, het zy eene *waare* het zy eene *betreklyke* eenheid, de gemeene maat.

AANMERKING. De waare eenheid heeft dan alleen plaats wan-

wanneer men de getalen in het afgetrokken beschouwt, zouden ze op iets te passen; zo als wanneer ik zeg 100, 1000, enzovoorts: maar wanneer ik zeg, 100 oxhoofden, 20 roeden, 20 voeten, 20 vierkante roeden, doel ik op eene betrekkelyke eenheid; naamelyk op een oxhoofd, eene roede, een voet, een vierkant waar van de zyden eene roede zyn: en de getalen 20 roeden, 20 voeten, zyn ongelyk groot, hoe wel beiden 20, dat is hoe wel beiden even veel eenheden bevattende: want de eenheid van eene roede is 12 maalen grooter dan die van eenen voet.

VII.

Men noemt *onmeetbaare* grootheden (ook *irrationeele* of *furden*), die, welke geene gemeene maat hebben: dat is waar van de eene noch door de vermeenigvuldiging van de andere, noch door die van eenig opgaand deel derzelve kan gevormd worden.

EUCL. X. 2 def.

I. AANMERKING. Ik zeg grootheden, en niet getalen: want eigenlyk gesprooken zyn het alleen grootheden die onmeetbaar zyn: zo als by voorbeeld de diagonaal van een vierkant en zyne zyde: de diameter van een' cirkel en deszelfs omtrek, verscheiden rechthoeken enz. zo als in het IV, VI, VII en VIII. Boek blyken zal: enz. welke grootheeden, hoe wel onderling onmeetbaar, bestaan, en aangeweezen kunnen worden. *Onmeetbaare getalen* zyn 'er *in den eigenlyken zin* niet, want wie een getal zegt, zegt een aantal eenheden, en dus iets dat met die eenheid meetbaar is. Men gebruikt wel is waar ook die uitdrukking *onmeetbaar* van getalen spreekende: doch het is in eenen oneigenlyken zin, en kortheidshalven. By voorbeeld, een wortel van een geheel getal, die zelf geen geheel getal is, kan even min door een gebroken als door een geheel getal, dat is, hy kan door geen getal hoe ook genaamd worden uitgedrukt. 'Er is by v. geen geheel getal, en ook geen breuk, die door zich

zelf vermeenigvuldigd 8, of door zich zelf twee maal vermeenigvuldigd 36 kan voortbrengen: en dus kan de vierkante wortel van 8, of de cubikwortel van 36, door geen getal, hoe genaamd, uitgedrukt worden; en daarom noemt men die wortels onmeetbaar: dezelven nogthans door een teeken ($\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{36}$) aanwyzende, handelt men daarmede als of het getalen waren, en men noemt ze dus *onmeetbare getalen*, doch zeer oneigenlyk: men kan die wortels wel aanwyzen: men kan den eerstgemelden wel door eene lyn uitdrukken (namelyk door den diagonaal van eenen rechthoek, waar van de eene zyde 3 de andere 2 is:) maar niet door eenig getal: men kan wel een getal vinden dat 'er hoe langer hoe nader bykomt, dat er zo weinig van verschilt als men wil, doch nimmer een, dat dien wortel juist evenaart.

Wanneer men dan van onmeetbare getalen spreekt, duidt men dezelven door een teeken aan, en spreekt niet van het geen zy zyn, want zy zyn er niet, maar van het geen zy zouden zyn, indien men ze door getalen uitdrukken kon, het geen onmooglyk is.

II. Aanmerking. Wy hebben in de voorgaande aanmerking gezegd, dat men de wortels van getalen, wanneer zy geen geheele getalen zyn, door geen getal hoe genaamd kan uitdrukken, en dat dus die wortels, ten opzichte dier gemelde getalen, volstrekt *onmeetbaar* zyn: men kan derhalven die wortels noch door een geheel getal, noch door eene breuk uitdrukken: en dus door geen getal hoe genaamd.

Wy hebben insgelyks gezegd dat de diagonaal en de zyde van een vierkant onmeetbaar zyn: dit volgt uit II. 7 en IV. 7. het 7 Gevolg. N°. 4. Want zy A^2 dat getal: en zy a een getal, wiens vierkant a^2 juist kleiner zy dan A^2: maar zo, dat het vierkant van $\overline{a+1}$ juist grooter zy: dan is de wortel van A^2 grooter dan a,

maar

maar kleiner dan $\overline{a+1}$: dus a met eene breuk: ſtel $a+\frac{1}{n}$: dit getal door zich zelf multipliceerende krygt men deszelfs vierkant of $a^2+\frac{2a}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2=A^2$: en daar A^2 een geheel getal is, moet $a^2+\frac{2a}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2$ het ook zyn: het deel a^2 is het: het deel $\frac{2a}{n}$ kan het zyn: men ſtelle zulks: maar $\frac{1}{n^2}$ blyft altoos een breuk: en dus de geheele ſom een breuk. Stel dat $\frac{2a}{n}$ eene breuk is: dan zal $\frac{2a}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2$ of $\frac{1}{n}\times\left(2a+\frac{1}{n}\right)$ echter eene breuk blyven: dus is altoos het vierkant $a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}$ eene breuk, daar het, indien $a+\frac{1}{n}$ de wortel van A^2 was, een geheel getal moest zyn: dus is het de waare wortel van A^2 niet. In andere woorden, eene waare breuk, of eene oneigenlyke breuk die niet opgaat, eens of meermalen met zich zelf vermenigvuldigd zynde, zullen de uitkomſten altoos breuken zyn, die niet opgaan en die dus niet tot geheele getalen kunnen gebragt worden. Dus $\frac{7}{5}$ met $\frac{7}{5}$ multipliceerende komt 'er $\frac{49}{25}$: insgelyks eene breuk die niet opgaat. Het zelfde heeft plaats voor $\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}=\frac{343}{127}$, voor $\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}$ enz. Daar dan alle breuken ook breuken voor magten hebben, zal ook omgekeerd *een geheel getal* geen breuk tot wortel kunnen hebben.

III. AANMERKING. Er zyn dan getalen, waar van men den quadraatwortel, er zyn insgelyks getalen, waar van men den cubiekwortel in getalen kan uitdrukken: er zyn anderen, waarvan zulks niet mogelyk is: de eerstgemelde worden *quadraat getalen*, en *cubieke getalen* genoemd: zo

als EUCLIDES het uitdrukt in de 18 en 19 prof. van het IX. Boek: en de wortel zelf wordt de *zyde* genoemd.

IV. AANMERKING. Indien dan A, en B, onderling *onmeetbaar* zyn, en C een effen deel van B is dat er *n* maalen ingaat; zo zal het zelfde deel C, een zeeker getal malen *n* by voorbeeld genomen, nog kleiner zyn dan A, doch eene maal meer, namelyk $\overline{n+1}$ maal genomen, grooter: zo dat, daar n C = B is, men hebben zal nC ≺ A, $\overline{n+1}$ C ≻ A; zonder dat er eenig getal $\overline{n+\frac{1}{m}}$ is dat door zyne vermenigvuldiging met C, gelyk aan A worden kan. S. p. 205. def. 1.

VIII.

Wanneer men twee gelykſoortige grootheden vergelykt, ten einde de grootte van de eene uit die van de andere *onmiddelyk* te bepaalen, noemt men dit derzelver *reeden* na te gaan: en die bepaaling zelve is de *reeden* die de grootheden onderling tot elkander hebben.

Zie vooral KOENIG op de 5. bepaaling van het V. boek van EUCLIDES.

AANMERKING. Men kan de grootheden onderling op verſchillende wyzen vergelyken: voornamelyk op twee wyzen, waar van de eene *Geometriſche*, de andere *Arithmetiſche* reeden genoemd wordt: waaruit de *geometriſche* en *arithmetiſche* proportien, of *evenreedigheeden*: en uit deeze onderling, doch op twee verſchillende wyzen, vereenigd, de *Logarithmen* en de *Harmoniſche evenreedigheid* geboren worden. Wy zullen dit alles verklaaren.

I. AFDEELING.

OVER DE GEOMETRISCHE EVENREEDIGHEID.

BEPAALINGEN.

IX.

Wanneer men twee gelykſoortige grootheden met elkander vergelykt, ten einde te weeten welke vermeenigvuldigde of *hoeveelvoud* de eene van de andere zy, of, 't geen op het zelfde uitkomt, hoe veel maalen de laatstgemelde in de eerſte begreepen is, of een hoeveelſte deel zy 'er van is, wordt men gezegd de *geometriſche reeden*, of ook enkel by uitſtek de *reeden*, die 'er tusſchen die grootheden plaats heeft, na te gaan: zo dat de *geometriſche reeden*, of enkel de *reeden*, tusſchen twee grootheden, aantoont *hoe veel maalen* de eene de andere bevat.

De grootheden welke die *reeden* uitmaaken worden derzelver *leden* genoemd: de grootheid die men het eerst noemt, wordt *voorgaande*, de andere *volgende* genoemd: 'er is dus in iedere *reeden* een *voorgaand* en een *volgend lid*.

Zie TACQUET op de definitien van EUCLIDES V. — W. 's §. 605. — St. 206. def. 4.

I. GEVOLG.

'Er zyn geene grootheden, mits zy gelykſoortig zyn, die niet eene bepaalde geometriſche reeden tot elkander hebben.

II. GEVOLG.

Men verdeelt de geometrische *reeden*, in *meetbaare* en *onmeetbaare*. Eene reeden is meetbaar wanneer zy door getallen uitgedrukt wordt, of kan worden: doch *onmeetbaar*, of *irrationeel*, wanneer de grootheden die men vergelykt onderling *onmeetbaar* zyn, en haare reeden dus door geen getal uitgedrukt kan worden: in dat geval kan men de reeden slechts aanduiden door een teeken, by v. zo als de reeden van $\sqrt{2}$ tot 1; of door lynen: men weet dan wel niet hoe veel maalen de eene grootheid in de andere begreepen is, doch men weet de uitersten tusschen welken dat getal in valt: zo als by v. de reeden van $\sqrt{2}$ tot 1 is grooter dan $1.\frac{41421}{100000}$ doch kleiner dan $1.\frac{41422}{10000}$.

L. C. §. 288.

I. AANMERKING. Men moet echter niet denken dat wanneer men twee onmeetbaare grootheden vergelykt derzelver *reeden* tot elkander altoos *onmeetbaar* zy: zy kunnen eene meetbaare reeden tot elkander hebben, hoe wel ieder van haar met opzicht tot eene andere onmeetbaar zy: by voorbeeld de reeden van $\sqrt{2}$ tot $\sqrt{8}$ is die van 1 tot 2, dus *meetbaar*, hoe wel de grootheden elk in zich zelve met betrekking tot de eenheid onmeetbaar zyn.

II. AANMERKING. EUCLIDES geeft deeze bepaaling van het woord reeden: „ Reeden, zegt hy (3. bepaling) is „ de onderlinge betrekking van *veelvoudigheid*, die twee „ grootheden tot elkander hebben:" en hy voegt 'er in de 4. bepaaling by. „ Grootheden worden gezegd „ eenige reeden tot elkander te hebben, als de eene „ door vermeenigvuldiging de andere *overtreffen* kan." Men lette wel: hy zegt niet *evenaaren*: want dan zou de bepaaling slechts betreklyk zyn tot *meetbaare* grootheeden: maar *overtreffen*, het geen de *onmeetbaare* ook bevat. By veele vertaalers leest men in de derde bepaaling *betrekking van hoegrootheid* (in het latyn *secundum quantitatem*) in

plaats

plaats van *veelvoudigheid* (*secundum quantuplicitatem*); doch dit zoude even eens op arithmetische als op geometrische reedens toepasselyk zyn, het geen EUCLIDES niet bedoelde, zo als overvloedig uit zyn VII Boek blykt: doch dat men hier het grieksche woord *κατα πηλικότητα* door *volgens de veelvoudigheid* vertaalen moet, is door WALLIS (*Opera Mathematica* T. II. p. 666) en anderen aangeweezen: ook heeft GREGORY het aldus vertaald. Zie ook KORNIO over deeze plaats.

X.

Men noemt *aanwyzer* (*Exponent*) van eene reeden het *quotient* dat uit de divisie van de *voorgaande* door de *volgende* voortkomt, of begreepen wordt voor te komen.

W. a. §. 65. —— H. a. §. 126. —— S. p. 207. def. 6.

I. AANMERKING. In de daad, daar de *reeden* van twee grootheden aanduidt hoe veel maalen de eene in de andere begreepen is, en daar het *quotient* van eene divisie dit ook doet, is dat *quotient* de waare aanwyzer van die reeden: en dit wel altoos stilzwygend met betrekking tot die eenheid, die men tot grondslag legt.

AANMERKING. Andere schryvers noemen *aanwyzer*, of *quotient*, het quotient dat uit de divisie, niet van de *voorgaande* door de *volgende*, maar van de *volgende* door de *voorgaande* voortkomt: doch dit komt op het zelfde uit, mits men in de bewyzen en stellingen het woord *aanwyzer* of *quotient* altoos in den zelfden zin neeme.

III. AANMERKING. TACQUET noemt *noemer* het geen wy *aanwyzer* noemen. Zie zyn V. Boek, III. gedeelte §. 2, 3.

GEVOLG.

Wanneer de *voorgaande* grooter is dan de *volgende*, is de *aanwyzer* een *geheel getal*, of een *geheel getal met eene breuk*:

zo de *voorgaande* kleiner is, is de *aanwyzer* eene *zuivere breuk*: zo de aanwyzer *meetbaar* is, is de reeden *meetbaar*; doch zo hy *onmeetbaar* is, is de reeden *onmeetbaar*; en omgekeerd.

IV. AANMERKING. Wanneer de aanwyzer onmeetbaar is, kan hy door geen getal uitgedrukt, doch slechts door een teeken aangeduid, of door lynen uitgedrukt worden, zo als $\frac{1}{\sqrt{2}}$: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$. En dit is de reeden waarom wy in de bepaaling gezegd hebben *voortkomt*, of *begreepen wordt voort te komen*.

V. AANMERKING. De reeden wordt in woorden dus uitgedrukt: A *tot* B: en in plaats van het woord *tot* gebruikt men het teeken (:) of (,) dus A : B of A, B: ook wel, in navolging van LEIBNITS, het teeken van *divisie*, eene streep namelyk, $\frac{A}{B}$: en in de daad daar de reeden aanduidt hoe veel maalen de eene grootheid de andere bevat, bestaat zy in eene divisie, en wordt door het in 't werk stellen van die divisie bekend.

XI.

Twee *reedens* worden *gelyk*, of *de zelfde* genoemd, wanneer haare *aanwyzers* evengroot zyn: doch van twee *reedens* is die het grootst waar van de aanwyzer de grootste is: of, 't geen op het zelfde uitkomt, eene reeden is evengroot, grooter, of kleiner dan eene andere, naar maate haar aanwyzer evengroot, grooter of kleiner is dan die van de tweede reeden. Wanneer nu verscheiden grootheden onderling de zelfde reeden hebben, zegt men dat zy *evenreedig*, of *proportioneel* zyn: en de *evenreedigheid* of *proportie* heeft plaats als 'er eene gelykheid van reeden plaats heeft.

W. a. §. 66. S. p. 207. def. 8, 9. p. 215. def. 20.

I. AAN-

I. AANMERKING. De evenreedigheid werd voorheen meest aldus uitgedrukt door vier ſtippen (: :), namelyk

A : B : : C : D of

A , B : : C , D

doch daar de evenreedigheid in de daad eene gelykheid is van twee *reedens*, en dus van de *quotienten* uit twee *diviſiën* geſproten, wordt dezelve, in navolging van LEIBNITS veel beeter en eigenaartiger uitgedrukt op deeze wyze:

$$A : B = C : D : \text{of}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

II. AANMERKING. Wanneer de beide reedens meetbaar zyn valt het gemaklyk over derzelver gelykheid of ongelykheid te ondeelen, en zulks alleen uit den aanwyzer. Maar hoe oordeelt men, zal men zeggen, van de gelykheid of ongelykheid van twee *onmeetbaare reedens*? daar geen van beiden door getalen uitgedrukt kan worden, en dus geen van beiden naauwkeurig en in de daad bekend is.

Men oordeelt 'er van op tweederlei wyze: voor eerst, daar de onmeetbaare redens door een teeken of door lynen kunnen worden uitgedrukt (7 bep, I. Aanm.) oordeelt men dat zy gelyk zyn, als zy het zelfde teeken tot aanwyzer hebben, of door dezelfde lynen uitgedrukt worden; dus is de reeden $\sqrt{3} : \sqrt{6}$ gelyk aan de reede van $1 : \sqrt{2}$: of die van $\sqrt{6} : \sqrt{8}$ gelyk aan die $\sqrt{3} : \sqrt{4}$ zyn, en dus zyn $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 1 en $\sqrt{2}$: of $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ evenreedig:

Maar 'er is een tweede middel dat algemeener is, en zo wel op de meetbaare als op de onmeetbaare grootheden toegepast kan worden. Indien men twee redens, by v. A:B, en C:D heeft, zal men mogen vastſtellen, dat de reeden van A tot B gelyk is aan die van C:D, als men bewyzen kan dat zy noch kleiner, noch grooter zyn kan; of, wat op het zelfde uitkomt, wanneer men be-

bewyzen kan, dat men in ongerymdheden vervalt, indien men onderstelt dat zy ongelyk zyn, of dat de eene reeden grooter of kleiner dan de andere is: eene, naar ons oordeel, uitmuntende trant van bewyzen.

I. GEVOLG.

Wanneer vier grootheden evenreedig zyn: en de eerste en tweede *onderling meetbaar* zyn, zyn de derde en vierde insgelyks onderling meetbaar: doch zo de eerste en tweede *onderling onmeetbaar* zyn, zyn de derde en vierde ook onderling onmeetbaar.

BEWYS. Zo $A:B = C:D$ is $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$: en dus zo $\frac{A}{B}$ een getal is, moet $\frac{C}{D}$ 'er ook een zyn: en zo $\frac{A}{B}$ geen getal en dus onmeetbaar is, moet $\frac{C}{D}$ het ook zyn.

III. AANMERKING. Dit gevolg is de 10 propositie van het X. Boek van EUCLIDES: men lette wel dat wy zeggen de eerste en tweede, de derde en vierde *onmeetbaar onderling*, dat is, haare reeden onmeetbaar. Want wy hebben reeds gezegd (bep. 9. 1e Aanm.) dat onmeetbaare grootheden eene meetbaare reeden hebben kunnen: dus $\sqrt{2} : \sqrt{8} = 1 : 2$. Wy beschouwen dan hier de *onmeetbaare* grootheden, niet op zich zelven, (dat is met betrekking tot de eenheid) maar met betrekking tot elkander, *onderling*, dat is, derzelver reeden.

IV. AANMERKING. EUCLIDES heeft twee bepalingen van *gelykheid* van reedens gegeeven, de eene is de 20 bepaling van het VII boek, alwaar hy zegt: „ Getalen zyn „ evenreedig, als de eerste een gelykvoud, of een „ gelyk deel van de tweede is, als de derde van de vier„ de:" de andere, die niet alleen op getalen, maar op alle grootheeden, ook op de onmeetbaare, toepaslyk is, is de 7 van het V Boek, en komt hier op uit. „ Indien „ 'er vier grootheeden gegeeven zyn, en men evenver-

„ me-

„ menigvuldigden of gelykvouden neemt van de eerste en „ de derde: en andere gelykvouden van de tweede en „ de vierde: zullen die grootheden in de zelfde ree- „ den zyn; namelyk de eerste tot de tweede, de derde „ tot de vierde; indien, wanneer het gelykvoud van de „ eerste even groot, grooter of kleiner is, dan dat van „ de tweede, tevens ook het gelykvoud van de derde „ even groot, grooter, kleiner is, dan dat van de vier- „ de, en zulks *altoos*, en volgens welke vermenigvuldi- „ ging men *ook wille*," waar by EUCLIDES voegt: „ groot- „ heden die in de zelfde reeden staan, worden even- „ reedig genoemd."

By voorbeeld: indien A, B, C, D, gegeeven zyn: en men neemt gelykvouden *m* A en *m* C: insgelyks *n* B en *n* D, dan zal A : B = C : D zyn, indien wanneer *m* A 7 *n* B ook *m* C 7 *n* D: en wanneer *m* A L *n* B ook *m* C L *n* D: en wanneer *m* A = *n* B ook *m* C = *n* D: welke getalen men ook voor *m* en *n* neeme.

Deeze bepaling van EUCLIDES is algemeen, en bevat zo wel de *meetbaare* als de onmeetbaare grootheeden: doch zy is niet geheel duidelyk en volkomen, en niet uit de waare en eenvoudige natuur van het geen men oorspronglyk door *reeden* verstaat, ontleend: zie KOENIG ter deezer plaatse. De leere der *aanwyzers*, die of *meetbaar* of *onmeetbaar* zyn, is gemaklyker, en even algemeen als die van EUCLIDES: wy zullen echter in het I, II, en III voorstel toonen, dat de bepaling van EUCLIDES uit de onze, en de onze uit die van EUCLIDES volgt.

V. AANMERKING. Om de zelfde reeden geeft EUCLIDES deeze bepaaling van ongelyke reedens: „ Wanneer men „ gelykvouden van de eerste en derde grootheid, en an- „ dere gelykvouden van de tweede en vierde genomen „ heeft, en wanneer dan het gelykvoud van de eerste, „ dat van de tweede overtreft, zonder dat het gelykvoud „ van de derde dat van de vierde overtreffe, zal de

„ eer-

„ eerste grootheid grooter reeden hebben tot de tweede „ dan de derde tot de vierde."

II. GEVOLG.

Alle breuken, en alle producten of getalen door vermenigvuldiging of *multiplicatie* ontstaan, zyn *reedens*: want stel $\frac{A}{B} = q$ en $D \times E = C$, dan is er dezelfde reeden tusschen A en B, als tusschen *q* en de eenheid: en tusschen E en de eenheid als tusschen C en D.

IV. AANMERKING. De bepaalingen, die men in de meeste cyfferboeken van *multipliceeren* en *divideeren* geeft, zyn zeer gebrekkig. Naauwkeurig gesprooken bestaat de *multiplicatie* in het vinden van een getal, dat tot een der gegeevenen is, als het ander tot de eenheid: en de *divisie* bestaat in het vinden van een getal dat tot de eenheid is, als het geval dat *gedivideerd* moet worden, tot den *divisor* of deeler.

Zie hier over KOENIG op EUCL. V. def. 1, 2. —— H. a. §. 127. —— L. C. §. 287. — doch vooral D'ALEMBERT *Melanges*: V. p. 217.

III. GEVOLG.

De evenredigheid vereischt ten minsten drie grootheden.

EUCL. V. bep. 9.

VII. AANMERKING. Men maakt in de gewoone wyze van spreeken een bestendig misbruik van het woord *proportie*, dat men met het woord *reeden* byna altoos verwisselt, zeggende; de *proportie* van A tot B: dit is een misslag, 'er is geene *proportie* of evenreedigheid tusschen twee grootheden; maar twee grootheden hebben eene bepaalde *reeden* tot elkander: en dan eerst wordt eene *proportie* of *evenreedigheid* geboren, wanneer men twee *reedens* die

die gelyk zyn, met elkander vergelykt: het zy deeze te samen uit drie grootheden, het zy uit vier grootheden bestaan: in het eerste geval is A : B = D : C of $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$: in het tweede A : B = C : D of $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

XII.

Wanneer de grootheden, die gelyke redens tot elkander hebben, allen verschillende zyn, zegt men dat die grootheden *onderscheidenlyk* (*discrete*) evenreedig zyn: doch wanneer die grootheden zodanig gesteld zyn, dat 'er altoos eene van de voorige reeden in de volgende herhaald wordt, dat is, dat de volgende grootheid in de eerste reeden de voorgaande is in de tweede; de volgende in de tweede, de voorgaande in de derde, en zo bestendig voort: dan zegt men dat die grootheden *geduurig* (*continue*) evenreedig zyn: en die geduurige evenreedigheid wordt eene geometrische *reeks* of *progresfie* genoemd, in welke men *evenveraffstaande leden* noemt, die leden, welke door een even groot getal leden van enig bepaald lid gescheiden worden.

A, B, C, D, E, F, G, H zyn geduurig evenreedig, of maaken eene geometrische reeks uit, indien,
$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{D}{E} = \frac{E}{F} = \frac{F}{G}$ enz. of A : B = B : C = C : D = D : E = E : F = F : G enz.

W. *a.* §. 69. —— H. a. §. 121. —— St. p. 208. d. 12. p. 215. def. 21.

GEVOLG.

Hier van is het dat men zegt dat getalen of grootheden, die geduurig evenreedig zyn, eene geometrische *reeks* uitmaaken: die reeks wordt *aanwassende*, ook *opgaande*; of *verminderende*, ook *saamenloopende*, of *neder-*

neergaande genoemd, naar maate de leden bestendig aangroeien, of verminderen.

AANMERKING. Eene geometrische reeks, of geduurige evenreedigheid wordt aldus (∺) door vier stippen aangeduid ∺ A, B, C; D, E, enz.

XIII.

Wanneer drie grootheden *geduurig evenreedig* zyn noemt men de tweede of middelste *midden-evenreedige*, en de laatste, *derde evenreedige*: en wanneer vier grootheden *onderscheidenlyk evenreedig* zyn, noemt men de vierde of laatste *vierde evenreedige*. Als dan worden ook de eerste voorgaande, en de laatste volgende grootheid de *uitersten* of *uiterste leden* genoemd: de eerste volgende, en de tweede voorgaande, de *middelsten*, of *middelste leden*.

S. p. 209. d. 13, 14.

XIV.

De *voorgaande* worden met betrekking tot de *voorgaande*, en de *volgende* met betrekking tot de volgende de *gelykgeplaatste* (*homologi*) leden genoemd.

EUCL. V. bep. 12.

XV.

Wanneer men vier grootheden heeft, en men derzelver reeden beschouwt met betrekking tot de orde in welke men ze opnoemt, zegt men dat zy *rechtstreeks* tot elkander, of in *rechte reeden* staan, als de eerste staat tot de tweede zo als de derde tot de vierde: of in andere woorden, zo de reeden van de eerste tot de tweede gelyk is aan de reeden van de derde tot de vierde: maar men zegt dat zy *omgekeerd* tot elkander staan, of in *omgekeerde reeden* zyn, als de eerste staat

tot

tot de tweede zo als de vierde tot de derde: of de tweede tot de eerste zo als de derde tot de vierde.

L. C. §. 263. — St. p. 234. d. 23.

GEVOLG.

Hier uit volgt dat de omgekeerde reeden van twee grootheden gevonden wordt met de *volgende* grootheid door de *voorgaande*, in plaats van de *voorgaande* door de *volgende* te divideeren: $\frac{A}{B}$ is de omgekeerde reeden van $\frac{A}{B} : \frac{1}{B}$ is de omgekeerde reeden van B : 1.

L. C. §. 299.

XVI.

Men noemt *saamengestelde reeden* die welke uit verscheiden andere reedens wordt opgemaakt, en dat wel door vermeenigvuldiging der enkele reedens, (in dat geval ook wel *wortels* en *factoren* genoemd) uit welken de saamengestelde gevormd wordt: wanneer alle de wortels *rechtstreeks* genomen worden, is de samengestelde reeden *rechtstreeksche reeden* uit allen: zo zy allen *omgekeerd* genomen worden, is de samengestelde reeden *omgekeerde samengestelde reeden* der wortelen: en zo sommige wortel rechtstreeks, anderen omgekeerd genomen worden, is de samengestelde reeden uit rechtstreeksche en omgekeerde reedens gevormd.

VOORBEELD. Men hebbe de reedens $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{E}{F}, \frac{G}{I}$: zo is de reeden van P : Q samengesteld uit die van $\frac{A}{B}, \frac{C}{E}, \frac{E}{F}$ enz. indien $\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} \times \frac{E}{F}$: enz. dus is die van $\frac{21}{27}$ samengesteld uit $\frac{3}{9}$ en $\frac{7}{3}$: de reeden van R : S is de omgekeerde

samen-

samengestelde uit $\frac{A}{B}$ en $\frac{C}{D}$ indien $\frac{R}{S} = \frac{B}{A} \times \frac{D}{C} = \frac{1}{\frac{A}{B}\frac{C}{D}}$:

dus is $\frac{27}{21}$ omgekeerd samengesteld uit $\frac{3}{9}$ en $\frac{7}{3}$: de reeden van T: U is samengensteld uit de rechtreeksche van $\frac{A}{B}$ en de omgekeerde van $\frac{C}{D}$ indien $\frac{T}{U} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$. Dus is $\frac{8}{27}$ de samengestelde rechtstreeks uit $\frac{4}{9}$ en omgekeerd uit $\frac{3}{2}$.

L. C. §. 290. — St. p. 245. def. 5.

AANMERKING. EUCLIDES spreekt in zyn V Boek in het geheel niet van die samengestelling van reedens; doch in het VI Boek geeft hy 'er deeze bepaling van: Eene reeden „ wordt uit reedens samengesteld, als de hoeveelheeden of aanwyzers dier reedens onderling *gemultipliceerd*; de hoeveelheid (of den aanwyzer) van die reeden „ uitmaaken." Zie hierover WALLIS de *compositione rationum* in zyn *opera Mathem.* II. p. 666.

XVII.

Wanneer eene reeden uit gelyke reedens worde samengesteld, wordt zy *verdubbelde*, *driedubbele*, *vierdubbele* enz. genoemd, naar maate zy uit twee, uit drie, uit vier, gelyke redens samengesteld is, en die, (bep. 4.) de tweede, derde, of vierde magt van die reeden is.

$\frac{A \times A}{B \times B}$ of $\frac{A^2}{B^2}$; $\frac{A \times A \times A}{B \times B \times B}$ of $\frac{A^3}{B^3}$; $\frac{A \times A \times A \times A}{B \times B \times B \times B}$ of $\frac{A^4}{B^4}$ zyn de verdubbelde, driedubbele, vierdubbele reeden van $\frac{A}{B}$.

H. a. §. 130. — L. C. §. 291.

AANMERKING. Daar de bepaalingen door EUCLIDES van

ver-

dubbelde, *driedubbele* reeden enz. gegeeven, uit andere grondbeginselen afgeleid zyn, behooren wy dezelven na te gaan, vooral daar die bepaalingen eenigen invloed in het vervolg kunnen hebben.

Dit zyn de 10 en de 11 bepaaling van het vyfde Boek:

„ Zo drie grootheeden evenreedig (d. i. geduurig even-
„ reedig) zyn, wordt de eerste gezegd tot de derde eene
„ dubbele reeden te hebben van die welke zy heeft tot
„ de tweede.

„ Zo vier grootheeden evenreedig (d. i. geduurig even-
„ reedig) zyn, wordt de eerste gezegd tot de vierde eene
„ driedubbele reeden te hebben van die, welke zy heeft
„ tot de tweede: en zo voorts, zo lang de evenreedig-
„ heid duurt.

Wanneer ik dus zeg, de reeden $\frac{P}{Q}$ is de verdubbelde van $\frac{A}{B}$, duidt dit aan, volgens ons, dat die reeden uit de vermeenigvuldiging van de reeden $\frac{A}{B}$ door zich zelve gevormd wordt: volgens EUCLIDES, dat de reeden $\frac{P}{Q}$ die is van de eerste A tot de derde C van drie geduurige evenreedigen, waar van A en B de twee eerste zyn. Wanneer wy zeggen, dat de reeden van P tot Q de driedubbele is van de reeden van A tot B, geeft het volgens ons te kennen, dat die reeden uit de vermeenigvuldiging van de reeden $\frac{A}{B}$, twee malen door zich zelve, ontstaat, dat zy de reeden is van A^3 tot B^3: volgens EUCLIDES, dat de reeden van P tot Q de reeden is van de eerste tot de vierde van vier geduurig evenreedige grootheeden, waar van A en B de twee eerste zyn. Hoe veel nu die uitdrukkingen in den eersten schyn van elkander verschillen mogen, komen zy op het zelfde uit, zo als wy zulks in de Aanmerking op het XIV Voorstel zullen bewyzen.

EUCLIDES heeft zeekerlyk zyne bepaaling boven de andere, die natuurlyker is, en hem niet onbekend was, als rechtstreeks uit de 5 bep. van het VI Boek volgende, verkooren; om dat hy de verdubbelde reeden van twee lynen in het VI Boek wilde gebruiken: terwyl hy wel begreep, dat de multiplicatie in eenen strikten zin alleen op getallen, en niet op lynen of andere grootheeden kan geschieden; waarom hy dus ook, by het denkbeeld van de verdubbelde reeden van lynen, het denkbeeld van multiplicatie wilde vermyden.

XVIII.

Men noemt *onderverdubbelde* reeden, *onderdriedubbele* reeden, en zo voorts, eene reeden, die de tweede, of de derde wortel en zo voorts is van een gegeeven reeden.

Byv. $\sqrt{\frac{A}{B}}$ of $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$: $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$ of $\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$ zyn onderverdubbelde, en onderdriedubbele reedens van $\frac{A}{B}$.

H. a. § 130. —— S. p. 245. d. 6.

AANMERKING. Men maakt nog meerdere onderscheidingen van reedens, welke men allen by CLAVIUS over de bepaalingen van het V Boek van EUCLIDES zien kan. Zo als by voorb. *anderhalve* reeden: dat is, de reeden van de vierkante wortels der derde magten

$\frac{\sqrt[2]{A^3}}{\sqrt[2]{B^3}}$.

VOOR-

VOORONDERSTELLINGEN.

I.

Men vooronderstelt, dat, wanneer drie grootheeden gegeeven zyn, er eene vierde evenreedige tot dezelven gevonden kan worden:

II.

dat, zo twee grootheeden gegeeven zyn, 'er eene derde evenreedige gevonden kan worden.

AXIOMATA, OF ALGEMEENE KUNDIGHEEDEN.

I.

Gelyke grootheeden hebben dezelfde reeden tot elkander, gelyk ook elk tot eene derde grootheid.

Zo $A = B$, $C = D$; is

$A : B = C : D$

en

$A : E = B : E$.

EUCL. V. 7. — W. a. §. 72.

II.

Eene grootere grootheid heeft tot eene andere eene grootere reeden dan eene kleinere tot de zelfde: doch die derde heeft eene kleinere reede tot de groote dan tot de kleine: en eene grootere reeden tot de kleine dan tot de groote: en omgekeerd,

Zo $A > B$: is $A : C > B : C$

$C : A < C : B$

$C : B > C : A$.

EUCL. V. 8. 10.

III.

Grootheeden die tot dezelfde grootheid eene gelyke reeden hebben, zyn gelyk; en omgekeerd: zo

$A:B = C:B$

is $A = C$;

zo $A = C$

is $A:B = C:B$.

EUCL. V. 9. — W. a. § 73.

IV.

De *even-vermenigvuldigde* en *even-ondervermenigvuldigde*, of *gelykvoudige* en *gelykdeelige* van twee gelyke grootheeden zyn gelyk: en die van twee ongelyke grootheeden zyn in de zelfde reden als de grootheeden zelve.

zo $A = B$, is $m \times A = m \times B$ en $\frac{A}{m} = \frac{B}{m}$.

zo $\frac{A}{B} = q$ is $\frac{mA}{mB} = q$

zo $A:B = C:D$ is $mA:mB = C:D$ en $mA:mB = mC:mD$ en $mA:mB = nC:nD$.

EUCL. V. 15. en VII. 17. 18. —— W. a. §. 74.

GEVOLG.

Men kan dit ook aldus uitdrukken: zo twee grootheeden gelyk aan elkander zyn, wordt de gelykheid niet gestoord, indien zy door het zelfde getal gemultipliceerd of gedivideerd worden: en, eene grootheid blyft de zelfde, indien zy door de zelfde grootheeden gemultipliceerd en gedivideerd wordt.

L. C. §. 296. 297. — S. p. 222. pr. 10. p. 225. pr. 12.

V.

Indien twee reedens gelyk aan eene derde zyn, zyn zy onderling gelyk.

EUCL. V. 11. — S. p. 224: pr. 11. — W. §. 70.

VI.

VI.

Indien twee reedens gelyk aan elkanler zyn, en eene derzelven grooter of kleiner is dan eene derde, is de tweede het ook.

EUCL. V. 13.

EIGENSCHAPPEN

DER

GEOMETRISCHE EVENREEDIGHEDEN.

I. VOORSTEL.

Indien vier grootheeden A, B, C, D evenreedig zyn: en men neemt gelykvouden (m) van de eerste en derde (mA, mC) en andere gelykvouden (n) van de tweede en vierde (nB, nC): zal het gelykvoud van de derde altoos even groot, grooter of kleiner zyn dan dat van de vierde, naarmaate het gelykvoud van de eerste even groot, grooter of kleiner is, dan dat van de tweede, welke vermeenigvuldiging men ook neeme.

BEWYS. Uit de onderstelling is

$$A : B = C : D \text{ of}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

dus (*Axioma* 4.)

$$\frac{mA}{nB} = \frac{mC}{nD} : \text{dus}$$

zo mA of $>$ of $=$ of $<$ nB is ook

mC of $>$ of $=$ of $<$ nD

D. T. B. W.

AANMERKING. Men ziet dat de bepaaling der evenreedigheid, door EUCLIDES gegeeven, uit de onze volgt. Zie onze XI Bep. Aanmerk. IV.

II. VOORSTEL.

Zo de reeden van A tot B grooter is dan die van C tot D; kan men zodanige gelykvouden (m) van de eerste en derde (mA, mC) en zodanige andere gelykvouden (n) van de tweede en vierde neemen (nB, nD) dat, zo het gelykvoud van de eerste (mA) dat van de tweede (nB) overtreft, nogthans dat van de derde (mC) dat van de vierde (nD) niet overtreffe, maar of gelyk, of kleiner zy.

TACQUET op het V Boek van EUCLIDES Part. II. 1 Th. 1.

BEWYS: Zy $A:B > C:D$

$$\text{of } \frac{A}{B} > \frac{C}{D},$$

$$\text{dus } \frac{mA}{nB} > \frac{mC}{nD}:$$ nu kan, indien $mA > nB$ is, $\frac{mA}{nB} > \frac{mC}{nD}$ zyn, al is $mC > nD$, en het heeft zeeker plaats als $mC = nD$, of $mC < nD$ is.

III. VOORSTEL.

Indien men twee reedens heeft $A:B$ en $C:D$, en de gelykvouden (mA, mC) van de voorgaanden, zyn te gelyk, of even groot, of grooter, of kleiner, dan andere gelykvouden (nB, nD) van de volgen-

[redacted]

men, wanneer mC of $>$ of $=$ of $\angle\, mD$, kunnen hebben in elk dier drie gevallen of $mA > nB$, of $mA = nB$, of $mA \angle nB$; dat insgelyks tegen de gegeeven onderstelling aanloopt: dus is noch $A:B > C:D$: noch $A:B \angle C:D$ dus is $A:B = C:D$.

GEVOLG.

Indien men zodanige gelykvouden (mA, mC) van de voorgaanden neemen kan, en zodanige gelykvouden (nB, nD) van de volgenden, dat, terwyl het gelykvoud van de eerste voorgaande grooter is dan dat van haare volgende ($mA > nB$), nogthans het gelykvoud van de tweede voorgaande niet grooter maar gelyk of kleiner zy dan dat van zyn volgende (mC niet $> nD$), zal de reeden van de eerste voorgaande tot de volgende grooter zyn, dan die van de tweede voorgaande tot haare volgende ($A:B > C:D$.)

TACQUET V. B. Part. II. Th. 3.

BEWYS. Zo dit niet is; zy $A:B = C:D$, en dus (III Voorstel,) zo $mA > nB$: is $mC > nD$, dat tegen de onderstelling aanloopt.

zo $A:B \angle C:D$, of $C:D > A:B$; zal $\frac{C}{D} > \frac{A}{B}$, dus $\frac{mC}{nD} > \frac{mA}{nB}$ zyn, en dus, zo $mA > nB$, zal ook $mC > nD$ zyn, dat tegen de onderstelling aanloopt; dus is noch $A:B = C:D$, noch $A:B \angle C:D$: dus is $A:B > C:D$.

AANMERKING. Men ziet uit dit Voorstel en zyn Gevolg, hoe de gelykheid van reedens uit de leere der gelykvouden door EUCLIDES aangenomen (zie Aanmerking IV op de XI bepaling) afgeleid wordt: en dus dat de eene leer hieromtrent volmaakt met de andere overeenkomt. Het blykt verder, dat het om het even is of de grootheeden onderling meetbaar, dan of zy onmeetbaar gesteld worden.

Doch om dit verder optehelderen, zullen wy 'er het volgend Voorstel, dat onmiddelyk de onmeetbaare reedens betreft, nog byvoegen.

IV. VOORSTEL.

Indien men vier grootheeden A, B, C, D, ftelt: zo dat A onmeetbaar is met betrekking tot B; en C met betrekking tot D: doch B en D onderling meetbaar: en zo men dan verder ftelt, dat B in een aantal m van deelen, ieder gelyk aan b, en D in een dergelyk aantal m van deelen ieder gelyk aan d verdeeld zyn: en indien eindelyk, zo $A > nb$ doch kleiner $\overline{n+1}\,b$, en tevens $C > nd$ doch kleiner $\overline{n+1}\,d$ is, welke ook de grootheid der getalen m en n zyn moge: dan zullen de grootheeden A, B, C, D, evenredig zyn.

KARSTEN Geom. §. 182.

BEWYS. De gegeeven onderftellingen zyn $B = mb$; $D = md$; $A > nb$ en tevens $C > nd$: $A < \overline{n+1}.\,b$ en tevens $C < \overline{n+1}.d$.

Men moet bewyzen dat dan

$$A : B = C : D.$$

Zo dit geen plaats heeft, zy $A : B = E : D$, dan zal E grooter of kleiner dan C moeten zyn.

Uit het gestelde $A : B = E : D$: is

$$\frac{A}{B} = \frac{E}{D}: \text{ dus } \frac{A}{mb} = \frac{E}{md}$$

$$\text{maar } A > nb, \text{ en } A < \overline{n+1}.b$$

$$\text{dus } \frac{nb}{mb} < \frac{E}{md}: \text{ en } \frac{\overline{n+1}.b}{mb} > \frac{E}{md}$$

of

$$n < \frac{E}{d}: \text{ en } \overline{n+1}. > \frac{E}{d}: \text{ dat is}$$

$$nd < E, \text{ en } \overline{n+1}.d > E.$$

Doch men heeft ook

$$nd < C \text{ en } \overline{n+1}\,d > E:$$

men kan dan d, E, C beschouwen als vier grootheeden d, C, d, E, waarvan men gelykvouden neemt; namelyk n, of $\overline{n+1}$ van de eerste en de derde, en 1, van de

tweede

tweede en de vierde: en daar nu wanneer die van de eerste kleiner of grooter is, dan die van de tweede ($nd \angle C$; $\overline{n+1}.d > C$), die van de derde ook te gelyk kleiner of grooter is dan die van de vierde, ($nd \angle E$: $\overline{n+1}.d. > E$); zo volgt hier uit, dat men heeft

$d : C = d : E$: en dus (Axiom. 3) $C = E$.

E is dus noch grooter noch kleiner dan C, maar gelyk aan C; en gevolglyk

daar $A : B = E : D$ is ook

$A : B = C : D$. Dat te bewyzen was.

I. AANMERKING. Wy hebben reeds in de IV Aanmerking op de VII Bep. getoond, dat wanneer twee grootheeden C en D onderling onmeetbaar zyn, de onderstelling van $nd \angle C$ en $\overline{n+1}. > C$, plaats heeft.

II. AANMERKING. Wy hebben, wel is waar, in ons Bewys geen gewag gemaakt van het derde dat in de veelvouden plaats moet hebben, om 'er de gelykheid van reedens uit te kunnen opmaaken: namelyk, dat, zo $nd = C$ ook $nd = E$ zyn moet, doch hier is, uit hoofde der onmeetbaarheid tusschen C en D, dat geval onmogelyk: want had dat geval plaats, dan zouden C en D onderling meetbaar zyn, en de gelykheid der beide redens, $A : B$ en $C : D$, volgde van zelf.

III. AANMERKING. Wy zullen ons dan nu in het vervolg niet meer met de meetbaarheid of onmeetbaarheid in de Voorstellen ophouden, en den leiddraad onzer XI Bepaaling volgen: alleenlyk zullen wy in de aanmerkingen hier en daar een woord tot nadere opheldering voegen.

V. VOORSTEL.

Wanneer vier grootheeden eene Geometrische evenreedigheid uitmaaken: is het product van de beide uitersten gelyk aan dat der beide middelsten: en omgekeerd: wanneer twee producten, ieder uit twee grootheeden bestaande, gelyk zyn, zyn die grootheeden

den in eene Geometrische evenreedigheid: de eerste namelyk van het eerste product, tot de eerste van het tweede product, zo als de tweede van het tweede product, tot de tweede van het eerste product.

EUCL. VII. 19. —— W. 2. §. 109. —— S. p. 215. pr. 6.

BEWYS. Uit de 10 en 11 Bep. en Gevolg van Axioma 4.

I. AANMERKING. Wy verstaan hier zo wel de *producten* die in de daad door getalen uitgedrukt konnen worden, als die welke men slechts kan aanwyzen: en dus is dit Voorstel zo wel op de *onmeetbaare* als op de *meetbaare* grootheeden toepaslyk.

II. AANMERKING. Men vindt dit Voorstel niet in het algemeen by EUCLIDES: maar alleen voor de getalen in het VII Boek, doch wy zullen in het IV Boek 7 Voorstel 8 Gevolg N°. 2. aantoonen, dat het 16 Voorstel van het VI B. van EUCLIDES met dit Voorstel overeenkomt.

I. GEVOLG.

Indien drie grootheeden geduurig evenreedig zyn, is het product der uitersten gelyk aan de tweede magt der middelsten.

EUCL. VII. 20. —— S. p. 16. Gev. 1.

II. AANMERKING: Wy zullen in het IV Boek 7 Voorstel 8 Gevolg N°. 2. aantoonen, dat het 17 Voorstel van het VI B. van EUCLIDES met dit Voorstel overeenkomt.

II. GEVOLG.

De getalen, die twee gelyke producten uitmaaken, kunnen altoos zo gesteld worden, dat 'er eene Geometrische evenreedigheid uit volge.

L. C. §. 302.

III. GEVOLG.

Hier uit volgen van zelf de regelen om eene vierde, eene derde, of eene midden evenreedige te vinden.

W. a. § 112. 113.

III. AANMERKING. Op dit gevolg steunt de geheele *Regel van drieën*, en op het zelve, gepaard met het 4 Axioma de regel van *drieën in het gebroken*, zo als wy zulks met voorbeelden zullen ophelderen.

L. C. §. 320-323. — W. a. § 114-119. — S. p. 218. Gev. 3.; p. 223.

VI. VOORSTEL.

Indien de producten van vier grootheeden, genomen in die orde als zy opgegeeven worden, namelyk van de eerste en tweede en van de derde en vierde, aan elkander gelyk zyn: dan staan die grootheeden in omgekeerde reeden tot elkander, de eerste tot de derde zo als de vierde tot de tweede: of de eerste tot de vierde, zo als de derde tot de tweede.

S. p. 219. pr. 8. p. 234. pr. 21.

BEWYS. Uit het 2. gevolg van het V. Voorstel.

GEVOLG.

Hier op steunt de manier om eene vierde *omgekeerde* evenreedige te vinden, dat is, eene grootheid die zodanig gesteld is, dat de eerste en tweede in omgekeerde reeden staan van de derde en vierde:

AANMERKING. Hier op steunt de *omgekeerde regel van drieën*, zo als wy door veele voorbeelden zullen ophelderen.

W.

W. a. §. 119.

De omgekeerde regel van driën, verschilt niet in aart van den gewoonen regel van driën; maar alleen hier in, dat de vraag in den laatstgemelden niet recht wordt opgegeeven. Men kan altoos onderkennen of men den rechten dan of men den verkeerden regel van driën moet gebruiken. Wanneer, in het gevraagde, het vierde lid, dat men zoekt, in dezelfde reeden grooter of kleiner moet zyn, dan het derde der gegeevenen, als het tweede grooter of kleiner is dan het eerste: heeft men den rechten regel van driën: doch wanneer het vierde lid in dezelfde reeden grooter of kleiner zyn moet dan het derde, als het tweede (niet grooter of kleiner) maar *kleiner of grooter* is dan het eerste; heeft men het geval van den verkeerden regel van driën: by voorbeeld: 40 menschen maaken een' muur van 45 roeden in eenen dag: hoeveel menschen zal men moeten hebben om in den zelfden tyd een' muur van 81 roeden te maaken? x stellende voor het gevraagde, heeft men niet $40:45 = 81:x$ maar $40:45 = x:81$.

VII. VOORSTEL.

Wanneer vier grootheeden (A, B, C, D) evenreedig zyn, zullen zy het insgelyks zyn by *verwisseling*, de *voorgaande* van de tweede reeden, in plaats van de *volgende* in de eerste, en de *volgende* in plaats van gemelde *voorgaande* stellende ($A:C = B:D$): en ook by *omkeering*; de *volgenden* in plaats der *voorgaanden* stellende.

EUCL. V. 16. en V. 4. Corol. en VII. 13. — W. a. §. 111. St. p. 220. Gev. 1. — L. C. §. 304.

BEWYS. Uit het 2 Gevolg van het V. Voorstel.

AANMERKING. De Verwisseling, (*alterna ratio*, ook by som-

sommigen *permutatio* genoemd,) wordt door EUCLIDES (V. B. bep. 13) aldus uitgelegd: „ het is te stellen, de *voorgaande* tot de *voorgaande*, zo als de *volgende* tot de *volgende*.

II. AANMERKING. Zo lang men de grootheeden in het afgetrokkene beschouwt, gaat de verwisseling altoos door: doch wanneer men 'er bepaalde denkbeelden aan hecht, van deeze en geene grootheid in het byzonder, gaat zy niet door of de vier grootheeden moeten gelykfoortig zyn. By voorbeeld, een pond vlaams staat tot een gulden, als een oxhoofd tot een anker: wederzyds zyn de voorgaanden het zesvoud van de volgenden: maar indien men by *verwisseling* zegt, een pond vlaams staat tot een oxhoofd, zo als een gulden tot een anker, heeft dit geenen zin, om dat 'er geen reeden hoegenaamd tusschen een pond vlaams en een oxhoofd zyn kan. Daarom voegen sommigen by dit Voorstel de voorwaarde, dat alle leden der evenreedigheid gelykfoortig zyn moeten; en dit geldt ook voor het volgend voorstel: doch wy beschouwen hier de grootheeden in het afgetrokkene. EUCLIDES in het 13 Voorstel van het VII Boek, van de getalen spreekende, spreekt, en zulks met reeden, van de verwisseling in het algemeen, en als altoos plaats hebbende.

III. AANMERKING. De Bepaaling van de omkeering, door EUCLIDES gegeeven, is deeze: „ de omkeering der reeden is te stellen, de *volgende* tot de *voorgaande*, zo als de *volgende* tot de *voorgaande*." Indien men dit vergelykt met onze XV. Bep., blykt het dat het op het zelfde uitkomt: want indien ik stel $A:B = C:D$: of $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ en daar uit opmaak $B:A = D:C$ of $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$, blykt het dat ik het omgekeerde neem. Zie gevolg van die XV. Bepaaling.

IV. AANMERKING. De vier leden eener evenreedigheid kun-

kunnen op verschillende wyze veranderd worden, als men *verwisseling* en *omkeering* te samen voegt: aldus

$$A:B=C:D \quad A:C=B:D$$
$$B:A=D:C \quad C:A=D:B$$
$$B:D=A:C \quad C:D=A:B$$
$$D:B=C:A \quad D:C=B:A.$$

En men zoude insgelyks uit die zelfde vier evenreedige grootheeden $A:B=C:D$ en dus uit $A\times D=B\times C$ acht omgekeerde reedens kunnen maaken, aldus

$$A:B=\frac{1}{D}:\frac{1}{C} \quad B:A=\frac{1}{C}:\frac{1}{D}$$
$$A:\frac{1}{D}=B:\frac{1}{C} \quad B:\frac{1}{C}=A:\frac{1}{D}$$
$$C:D=\frac{1}{B}:\frac{1}{A} \quad C:\frac{1}{B}=D:\frac{1}{A}$$
$$D:C=\frac{1}{A}:\frac{1}{B} \quad D:\frac{1}{A}=C:\frac{1}{B}.$$

het geen men altoos naar welgevallen doen kan: en de evenreedigheid zal altoos tusschen die grootheeden, hoe men die ook schikken moge, plaats hebben, indien de producten der uitersten en der middelsten $AD=BC$ geeven, of tot die gelykheid gebragt kunnen worden.

VIII. VOORSTEL.

Wanneer vier grootheeden evenreedig zyn, heeft men door *samentelling* de som van de eerste en de tweede $(A+B)$ tot de eerste (A) of tot de tweede (B) zo als de som van de derde en vierde $(C+D)$ tot de derde (C) of tot de vierde (D): en door *aftrekking*: het verschil der twee eersten $(A-B)$ tot de eerste (A) of tweede (B) zo als het verschil der twee laatsten $(C-D)$ tot de derde (C) of tot de vierde (D): en *gemengd*: de som der twee eersten, tot derzelver verschil:

schil; zo als de som der twee laatsten, tot derzelver verschil, en omgekeerd voor alle die gevallen.

EUCL. V. 17, 18. en VII. 11. — L. C. §. 304, 305. — S. p. 227 - 230.

BEWYS. Uit het V Voorstel, 2de Gevolg, en Axioma 5.

I. AANMERKING. EUCLIDES geeft deeze bepaaling van de samentelling: (*Compositio*), „ De samentelling van eene „ reeden is het neemen van de reeden der voorgaande en „ volgende, als éene grootheid, tot de volgende. V. B. bep. 15. De bepaaling van de aftrekking (*Scheiding*) is by hem deeze: „ De aftrekking eener reeden, is het neemen „ der reeden van de overmaat van de voorgaande, boven „ de volgende, tot de volgende." Het geen men in dit geval noemt *divisio*, of *dividendo*, noem ik hier *aftrekking*, of zo men wil *scheiding*, (dat in dit geval de waare beteekenis is, ook van het Grieksch woord Διαίρεσις, door EUCLIDES gebruikt) en niet *deeling* of *divisie* dat thans by ons geheel andere denkbeelden dan van eene *scheiding*, of *aftrekking*, of *substractie* verwekt.

GEVOLG.

Uit dit Voorstel kan men, by verwisseling en omkeering, veele andere evenreedigheeden afleiden, die het nodeloos zoude zyn, allen in woorden uittedrukken. Zie hier de voornaamsten.

De gegeevene zyn:

I. $A+B : A = C+D : C$:

II. $A+B : B = C+D : D$:

III. $A-B : A = C-D : C$:

IV. $A-B : B = C-D : D$:

V. $A+B : A-B = C+D : C-D$.

hier

hier uit volgen

VI. A : A+B = C : C+D

VII. B : A+B = D : C+D

VIII. A+B : C + D = A : C

IX. B : D = A + B : C+D

X. A+B : C + D = A—B : C—D.

en zo voorts.

II. AANMERKING. De I. evenreedigheid *verwisseld*, namelyk A+B : C+D = A : C vergeleeken, als onderstelling, met de IX. namelyk B : D = A+B : C+D als besluit, leevert de stoffe der 19 Propositie van EUCLIDES op: en de I vergeleeken als onderstelling, met de II als besluit, leevert het gevolg van die Propositie op: namelyk: zo samengestelde grootheeden evenreedig zyn, zyn zy het ook by *omwending* (*conversio*). Hy noemt namelyk *omwending* in de 17 Bepaaling, „ het neemen „ van de reeden van de voorgaande, tot de overmaat „ van de voorgaande boven de volgende.

IX. VOORSTEL.

In alle evenreedigheeden, zo de voorgaande van de eerste reeden grooter, even groot, of kleiner is dan zyne volgende: is de voorgaande van de tweede reeden ook grooter, even groot, of kleiner dan zyne volgende: of zo de voorgaande der eerste reeden grooter, even groot, of kleiner is, dan die van de tweede; zal de volgende van de eerste, ook grooter, even groot of kleiner zyn dan de volgende van de tweede: of zo de volgende van de eene grooter, even groot, of kleiner is dan die van de andere, is zyne voorgaande ook grooter, even groot of kleiner dan de voorgaande van de andere.

EUCL. V. 14. —— L. C. §. 306.

BEWYS. uit het V. Voorstel.

I. GEVOLG.

Indien de eerste grootheid van eene evenreedigheid de grootste is van allen, is de laatste de kleinste van allen.

II. GEVOLG.

De som van de grootste en van de kleinste is grooter dan de som der beide overigen.

BEWYS. Uit het I Gev. het VIII. Voorstel N°. 2. en het VII.

AANMERKING. Dit is de 25 Prop. van het V. B. van EUCLIDES, waar in die schryver stilzwygend vooronderstelt, dat, zo de eerste grootheid de grootste is, de vierde de kleinste is.

X. VOORSTEL.

Indien men twee evenreedigheden heeft ($A:B = C:D$ en $E:F = G:H$) ieder uit vier leden bestaande: zullen de leden van de eene, ieder in zyn' rang door de leden van de andere *gemultipliceerd* of *gedivideerd*, nog evenreedig zyn: (d. i.)

zo $A : B = C : D$
en $E : F = G : H$,

zal $AE:BF = CG:DH$: en $\frac{A}{E}:\frac{B}{F} = \frac{C}{G}:\frac{D}{H}$ zyn.

L. C. §. 307. —— S. p. 230. pr. 17.

BEWYS. Uit het V. Voorstel en zyn tweede Gevolg.

I. GEVOLG.

Indien vier getalen evenreedig zyn, zullen ook hunne magten en hunne wortels, van dezelfde orde, evenreedig zyn.

L. C. §. 308. —— S. p. 231. pr. 18.

II. GEVOLG.

Zo vier grootheden evenreedig zyn, staat de helft van de eerste, tot de tweede, zo als de derde, tot

 het

het dubbeld van de vierde: of meer algemeen; De evenreedigheid blyft ongestoord, al wordt eene der twee uiterste grootheden door eenig getal gedivideerd, en de andere tevens door het zelve gemultipliceerd. Het zelfde heeft plaats omtrent de beide middelsten.

TACQUET *Lemma* ad pr. II. ex *Archimede* — S. p. 233. pr. 20.

XI. VOORSTEL.

Indien men twee, of meerder, evenreedigheden heeft, (A:B = D:E en B:C = E:F), waar in de voorgaande of volgende van de eerste, ook, het zy voorgaande, het zy volgende zyn van de laatste: zullen ook de overige leden van de eerste, ieder in zyn rang, evenreedig zyn aan de overige leden van de laatste, (A:C = D:F.)

S. p. 232. pr. 19.

BEWYS uit het X Voorstel.

I. AANMERKING. Dit Voorstel behelst de 22 en 23 Propositien van EUCLIDES: in beiden noemt hy het besluit (*ex aequo*) uit *gelykheid*: doch het besluit, zo A:B = D:E: en B:C = E:F; is A:C = D:F, wordt *uit gelykheid met orde* genoemd: en het besluit, zo A:B = E:F: en B:C = D:E; is A:C = D:F, *uit gelykheid, zonder orde*. Beide de besluiten worden *uit gelykheid* genoemd, om dat het besluit in eene gelykheid van reedens bestaat: de gegeeven gelyke reedens zyn in het eerste geval $\frac{A}{B}, \frac{B}{C}$ en $\frac{D}{E}, \frac{E}{F}$ en in het tweede $\frac{A}{B}, \frac{B}{C}$ en $\frac{E}{F}, \frac{D}{E}$ en in beiden, besluit men de gelykheid tusschen $\frac{A}{C}$ en $\frac{D}{F}$: doch in het eerste geval gaat de gelykheid van reedens voort in dezelfde orde wederzyds: namelyk aan den eenen kant zyn gegeeven A, B, C, aan den anderen D, E, F: de ge-

gelyke reedens zyn in de zelfde orde wederzyds van de eerste en de tweede grootheid, $\left(\frac{A}{B}\text{ en }\frac{D}{E}\right)$ van de tweede en de derde $\left(\frac{B}{C}\text{ en }\frac{E}{F}\right)$; dus is het besluit met orde: in het tweede geval zyn de gelyke reedens niet wederzyds in de zelfde orde: zy zyn van de eerste en de tweede grootheid $\left(\frac{A}{B},\right)$ aan den eenen kant, doch van de tweede en de derde $\left(\frac{E}{F}\right)$ aan den anderen: en van de tweede en de derde $\left(\frac{B}{C}\right)$ aan den eenen, doch van de eerste en de tweede $\left(\frac{D}{E}\right)$ aan den anderen, dus besluit men wel uit gelykheid doch zonder orde. En hier uit zullen de drie volgende bepaalingen van EUCLIDES genoegsaam opgehelderd worden.

De 18. „ Men besluit uit gelykheid, wanneer 'er verscheiden grootheden gegeeven zyn, wederzyds gelyk in getal, en de eerste van den eenen kant tot de laatste is, als de eerste van den anderen, tot de laatste: of anders: Het neemen der uitersten, met achterlating van de middelste." En indedaad in het besluit wordt niets van de middelste gewaagd.

De 19. „ De evenreedigheid is *met orde*, als de voorgaande is tot de volgende, zo als de voorgaande tot de volgende: of als de volgende tot eene andere is, zo als de volgende tot eene andere.

De 20. „ De evenreedigheid is *zonder orde*, wanneer 'er wederzyds eene reeks van drie grootheden gegeeven zynde, de voorgaande tot de volgende van de tweede reeks staat als de voorgaande tot de volgende van de eerste: en zo als in de eerste de volgende tot een ander, aldus in de tweede eene andere tot de voorgaande."

By voorbeeld: gegeeven zynde A, B, C en D, E, F: de voorgaande A tot de volgende B, zo als de voorgaande E tot de volgende F: en de volgende B, tot eene ander C, zo als eene ander D tot de voorgaande E.

II AANMERKING. Ons Voorstel is algemeener, behelst alle mogelyke gevallen, en men behoeft nu niet op eenig onderscheid van *met orde*, of *zonder orde*, te letten.

III. AANMERKING. Dit Voorstel is de grond, waarop alle bewerkingen gegrond zyn, die men verricht in den regel van *Vyven*, den *Ketting regel*, *Gezelschaps regel* en zo voorts: waar in men het gevraagde vindt door eene aaneenschakeling van enkele evenreedigheden, waar in altoos eenige leden de zelfde zyn: en dus door *besluit uit gelykheid* verdwynen; zo als wy zulks door een aantal voorbeelden zullen ophelderen.

Zie L. C. §. 324. — W. a §. 120. en volgende.

I. GEVOLG.

zo A:B = D:E
en B:C = E:F
of zo A:B = E:F
en B:C = D:E

in beide de gevallen
is D ≻ of = of ≺ F naar maate
A of ≻ of = of ≺ C.

Dit blykt uit dit en het IX Voorstel: en het maakt het 20 en 21 van EUCLIDES uit, waarin hy ook deeze besluiten *uit ongelykheid*, *met* of *zonder orde*, noemt.

II. GEVOLG.

Men kan, in eene evenreedigheid, altoos voor twee lee-

leden andere, die met deezen evenreedig zyn, ftellen; by voorbeeld,

$$\begin{array}{l} \text{zo } A:B = CD : EF \text{ en} \\ \underline{C:E = I : K} \\ \text{is } A:B = ID : KF. \end{array}$$

VI. AANMERKING. Dit is de grond waarop de regel van *valsche positie* fteunt; zo als wy door voorbeelden zullen uitleggen.

L. C. §. 325.

XII. VOORSTEL.

Zo men twee evenreedigheden heeft, (A:B = C:D,) E:F = G:H, en de reedens uit welke zy beftaan gelyk zyn, $\left(\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \frac{G}{H}\right)$, zullen de fommen of verfchillen der grootheden, in die beide evenreedigheden ieder in haar rang genomen, ook evenreedig zyn.

BEWYS. Uit het V. Voorftel, en zyn 2 Gevolg.

L. C. §. 309.

AANMERKING. Van dit Voorftel is de 24 Prop. van het V. Boek van EUCLIDES een byzonder geval: namelyk, zo A:B = C:D en E:B = F:D, is A+E: B = C+F:D in woorden dus „ Zo vier grootheden (A, B, C, D) „ evenreedig zyn: en een vyfde tot de tweede ftaat, zo „ als de zesde tot de vierde, is de famentelling van de „ eerfte en de vyfde tot de tweede, zo als de famentel- „ ling van de derde en de zesde tot de vierde."

GEVOLG.

Indien men by de volgenden van vier evenreedige grootheden, andere grootheden voegt, of ze 'er van aftrekt, die in de zelfde reeden ftaan als de voorgaanden, zullen die fommen of verfchillen, in gelyke reeden met de voorgaanden blyven.

XIII. VOORSTEL.

Indien men twee evenreedigheden heeft (A:B = C:D: en E:F = G:H) en de voorgaande in beiden ook evenreedig zyn (A:C = E:G) zullen de sommen of de verschillen der grootheden in de beide evenreedigheden, ieder in haar rang genomen, ook evenreedig zyn.

L. C. §. 309.

BEWYS. Uit het VIII. Voorstel, en zyn tweede Gevolg.

AANMERKING. Dit en het voorgaand Voorstel leeveren de twee eenigste gevallen op, waar in men tot de evenreedigheid van de sommen of verschillen der leden van twee evenreedigheden besluiten kan.

EIGENSCHAPPEN

VAN DE

GEOMETRISCHE REEKSEN,

OF PROGRESSIEN.

XIV. VOORSTEL.

Indien verscheiden grootheden (A, B, C, D, E, enz.) geduurig evenreedig zyn, of eene Geometrische reeks uitmaaken, staat de eerste tot de derde in verdubbelde reeden van de eerste tot de tweede; tot de vierde in driedubbele reeden en zo voorts: in een woord, de eerste staat tot de grootheid die n in rang is, zo als de magt $n-1$ van de eerste tot de magt $n-1$ van de tweede.

L. C. §. 298. 318 — S. p. 242. pr. 28.

BEWYS. Uit de XII. Bep. het X en XI. Voorstel.

I. GE-

I. GEVOLG.

Dus is de reeden van het eerste lid tot eenig ander lid samengesteld uit de reedens van alle de tusschen in geplaatste leden tot elkander; dat is, daar alle die reedens gelyk zyn, uit de reeden van het eerste lid tot het tweede, zo dikwerf door zich *zelf* vermenigvuldigd, als 'er leden zyn tot aan het gegeeven lid toe.

AANMERKING. *De* bepaaling door EUCLIDES gegeeven van verdubbelde, of driedubbele reeden, van twee grootheden (A : B) dat zy namelyk de reeden is van het eerste lid eener geduurige evenreedigheid, waarvan de gegeeven grootheeden de twee eerste leeden zyn, tot het derde, of tot het vierde, komt dan met onze bepaaling zeer wel overéén. Zie hier boven XVII Bepaaling en Aanmerking op dezelve.

II. GEVOLG.

De middelevenreedige tusschen twee grootheden is altoos kleiner dan de grootste, doch grooter dan de kleinste.

Want zy $A : B = B : C$:

Dus $A^2 : B^2 = B^2 : C^2 = A : C$ (X Voorstel, 1 Gev. en dit Voorstel.)

Maar $A > C$: dus $A > B$ en $B > C$. (IX Voorstel.)

III. GEVOLG.

Ieder lid van eene geometrische reeks is gelyk aan het voorgaande, door de reeden van het tweede tot het eerste, dat is, (Bep. X. Aanm. 2.) door den *Aanwyzer* vermenigvuldigd.

IV. GEVOLG.

Alle Geometrische reeksen kunnen gevolglyk aldus worden uitgedrukt, indien A het eerste, B het twee-

de lid, en q de *aanwyzer*, of $q = \frac{B}{A}$, is; A, Aq, Aq^2, Aq^3, Aq^4, Aq^5, ------ Aq^{n-1}

L. C. §. 311. —— S. p. 237. Def. 25.

V. Gevolg.

Eenig lid (het n) van eene geometrische reeks, is gelyk aan het eerste door de magt $n-1$ van den aanwyzer gemultipliceerd.

VI. Gevolg.

Indien het eerste lid grooter is dan het tweede, en dus de *aanwyzer* eene breuk is, is ieder lid kleiner dan het voorgaand: en de reeks is eene *afneemende reeks*, waar van alle de leden volgens eene bestendige reeden hoe langer hoe kleiner worden, zonder echter immer *nul* te kunnen zyn: en indien het tweede lid grooter is dan het eerste, is de *reeks wassende*; alle leden worden hoe langer hoe grooter volgens eene bestendige reeden: het eerste lid is het kleinste van allen, doch het kan nimmer *nul* zyn.

VII. Gevolg.

Niets belet, dat men deeze reeks, die men gesteld heeft in A te beginnen, beschouwe als vóór A beginnende, namelyk:

$$\frac{A}{q^{n-1}}, \ldots \frac{A}{q^4}, \frac{A}{q^3}, \frac{A}{q^2}, \frac{A}{q^1}, \frac{A}{q^0}, Aq, Aq^2, Aq^3, Aq^4 \ldots Aq^{n-1}$$

of, (3 Aanmerk. op de IV Bepaaling.)

$$Aq^{-(n-1)} \ldots Aq^{-4}, Aq^{-3}, Aq^{-2}, Aq^{-1}, Aq^0, Aq^1, Aq^2, Aq^3, Aq^4 \ldots Aq^{n-1}$$

VIII. Gevolg.

Men kan ook het getal der leeden van eene gegeeven reeks vermeerderen, met tusschen twee naastvolgende leeden een aantal middelevenreedigen te neemen, waar door

de reeks altoos Geometrisch blyft: by voorbeeld in de voorgaande reeks.

$$A, Aq^{\frac{1}{4}}, Aq^{\frac{1}{2}}, Aq^{\frac{3}{4}}, Aq, Aq^{1\frac{1}{4}}, Aq^{1\frac{1}{2}}, Aq^{1\frac{3}{4}}, Aq^{2}, \text{ enz.:}$$

of

$$A, Aq^{0,25}, Aq^{0,5}, Aq^{0,75}, Aq^{1}, Aq^{1,25}, Aq^{1,5} Aq^{1,75}, Aq^{2},$$

en zo voorts, zo veel men wil.

Er is dus geen getal, of men kan het als een lid van zodanig eene reeks beschouwen; want 'er is geen getal dat niet aan eenige wortel van een gegeeven getal gelyk is, dus by voorbeeld,

is $5 = 10^{\frac{1}{1,43069}} = 10^{0,69897} = 10^{\frac{69897}{100000}} = \sqrt[100000]{10^{69897}}$. En dus kan 5 beschouwd worden als een lid van eene Geometrische reeks waar van 1 het eerste, en 10 het laatste lid is.

XV. VOORSTEL.

In alle geometrische reeksen is het product van twee leden, welke zy zyn mogen, gelyk aan het product van twee andere, die even ver van de gemelden afstaan, het eene van het eerste, het ander van het laatste: en zulks, het zy men leden neeme, die vóór het eerste, en na het laatste zyn: het zy men leden neemt die tusschen beiden invallen: en zo, in dit geval, het getal der tusschen invallende leden oneeven is, is het gemelde product gelyk aan de tweede magt van het middelste lid.

S. p. 238. pr. 24. —— L. C. §. 316.

BEWYS. Uit het 4 en het 1 Gevolg van het XIV. Voorstel.

XVI. VOORSTEL.

In alle geometrische reeksen, waarvan de eenheid het eerste lid is, (zo als $1, q, q^2, q^3 \text{ ----- } q^n$) is het product van twee leden gelyk aan een ander lid in de zelfde reeks, dat even ver staat van een der gemelde

melde leden, als het ander van het eerste lid der geheele reeks of van de eenheid.

BEWYS. Uit het XV. Voorstel.

I. AANMERKING. Deeze eigenschap is een der gronden waarop de aart der Logarithmen steunt.

II. AANMERKING. Men kan deeze reeks $1, q, q^2, q^3, \ldots q^n$, ook dus schryven: $q^0, q^1, q^2, q^3, \ldots q^n$; zie de 2 Aanmerking op de IV. Bepaaling.

I. GEVOLG.

Hier uit blykt de 8 Propositie van het IX. Boek van EUCLIDES, „ zo eenige getalen, beginnende met de eenheid, geduurig evenreedig zyn, is het derde een quadraat „ getal; zo als ook de volgenden om het ander getal; het „ vierde een cubiek getal, en dus vervolgens allen om „ het derde getal: het zeevende is en een quadraat „ en een cubiek getal, en dus vervolgens om het zesde „ getal." en dus ook het IX Voorstel: „ zo het eerste „ getal naast de eenheid een quadraat of een cubiek getal „ is, zyn alle de andere in de geheele reeks ook quadraat „ of cubiek getalen."

$1, q^2, q^4, q^6, q^8$, enz.: $1, q^3, q^6, q^9, q^{12}$, enz.

II. GEVOLG.

Men kan deeze reeks $1, q, q^2, q^3, q^4, \ldots q^n$ beschouwen als reeds voor de 1 begonnen te zyn: aldus

$$\frac{1}{q^n}, \ldots \frac{1}{q^3}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q}, 1, q, q^2, q^3, q^4, \ldots q^n:$$

of, wat op het zelfde uitkomt, IV Bep. 2 en 3 Aanm.

$$q^{-n}, \ldots q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0, q^1, q^2, q^3, q^4, \ldots q^n,$$

zo dat indien q een geheel getal is, de leden tot q^0 of 1 breuken zyn, waar van de noemers magten van q zyn; na de 1, zyn de leden zelf de magten van q.

XVII. VOORSTEL.

In alle geometrische reeksen is de som van alle de *voorgaanden* tot de som van alle de *volgenden*, zo als het eerste lid tot het tweede.

EUCL. V, 12. en VII. 12. — L. C. §. 310. — S. p. 229. pr. 15.

BEWYS. Uit het XII. Voorstel, en IV *Axioma*.

I. GEVOLG.

Indien A het eerste lid is, B het tweede, Z het laatste, *q* de *aanwyzer* of het quotient van B door A gedeeld, en S de som van de geheele reeks, zo is

$$S = \frac{A^2 - Z.B.}{A - B}$$: of, noemende *n* het getal der leden

$$S = \frac{A^2 - A^2 q^n}{A - Aq} = \frac{A(q^n - 1)}{q - 1.}$$

L. C. §. 327. — S. p. 241. p. 22.

II. GEVOLG.

Zo $\div\!\div$ A, B, C, D, ······· Y, Z, is

B — A : A = Z — A : A + B + C + D ········ Y.

of in woorden, „ zo eenige getalen geduurig evenredig zyn, en men trekt van het tweede en van het laatste „ een getal af gelyk aan het eerste, staat het overschot van „ het tweede tot het *eerste*, zo als het overschot van het „ laatste, tot de som van alle de *voorgaanden*.

EUCL. IX, 35.

BEWYS. A : B = B : C = C : D : ····· Y : Z : (dus Voorstel VIII. N. 2.)

A : B — A = B : C — B = C : D — C ···· Y : Z — Y :

en dus, door dit Voorstel:

$$A + B + C + \cdots Y : \overline{B - A} + \overline{C - B} + \overline{D - C} \cdots + Y + \overline{Z - Y} = A : B - A$$

of

A + B + C ···· Y : Z — A = A : B — A : of

B — A : A = Z — A : A + B + C ·· · Y

III.

III. GEVOLG.

Uit het Voorstel is by verwisseling:

$A+B+C \cdots Y : A = B+C+D \cdots +Z : B$;

Uit het 2 Gevolg, by verwisseling:

$A+B+C \cdots Y : A = Z-A : B-A$: en dus

$B+C+D \cdots +Z : B = Z-A : B-A$ of

$B-A : B = Z-A : B+C+D \cdots +Z$:

dat is in woorden: „ zo eenige getalen geduurig even-
„ reedig zyn, en men trekt van het eerste en van het laatste
„ een getal af, gelyk aan het eerste, staat het overschot van
„ het tweede tot het *tweede*, zo als het overschot van het
„ laatste tot alle de *volgenden* samen genomen.

XVIII. VOORSTEL.

Zo vier of meerder grootheden (A, B, C, D, en E) zodanig gesteld zyn, dat zy evenreedig zyn aan haare verschillen, ($A : B = A-B : B-C$ enz.) zullen zy geometrisch evenreedig zyn (∺ A, B, C, D, enz.

BEWYS. Uit het VII. en VIII. Voorstel.

AANMERKING. Dit Voorstel is van een groot nut in de Natuurkunde.

II. AFDEELING.

OVER DE ARITHMETISCHE EVENREEDIGHEID.

TWEEDE BEPAALINGEN.

XIX.

Wanneer men twee gelyksoortige grootheden met elkander vergelykt, ten einde te weeten, hoe veel de eene de andere overtreft, dat is, hoe groot het ver-

fchil is dat tusfchen beiden gevonden, wordt, wordt men gezegd de *arithmetische reeden*, die 'er tusfchen die twee grootheden plaats heeft, na te gaan: en dat verfchil zelf maakt die *arithmetische reeden* uit.

S. p. 207. def. 5. —— W. a. §. 65.

AANMERKING. Alle de *algemeene* bepaalingen in het begin van dit Boek gegeeven, hebben *hier* ook plaats: zo als ook die van *voorgaand* en *volgend* lid. (5. Bep.)

XX.

Arithmetische reedens worden *de zelfde* of *gelyke* reedens genoemd, wanneer het verfchil der grootheden, tusfchen welke zy plaats hebben, het zelfde is; dat is, wanneer het voorgaand lid van de eene reeden zyn volgend lid even veel overtreft, of even veel door het zelve overtroffen wordt, als het voorgaand lid van ieder der andere reedens zyn volgend overtreft, of door het zelve overtroffen wordt.

En hier van worden grootheden gezegd in *arithmetische evenreedigheid* of *proportie* te ftaan, of *arithmetisch evenreedig*, of *proportionaal* te zyn, als dezelfde *arithmetische* reeden tusfchen haar plaats heeft.

S. p. 208. def. 9. 10. — W. a. §. 66.

VOORBEELD. $10:4=7:1$ arithmetisch: om dat $10-4=6$ en $7-1=6$; en in het algemeen is $A:B=C:D$ arithmetisch,

$$\text{zo } A-B=C-D: \text{ of}$$
$$B-A=D-C.$$

Het fpreekt van zelf dat men in die beide reedens het verfchil der termen in de zelfde orde neemen moet, in beiden het volgend lid van het voorgaande, of in beiden het voorgaande van het volgende aftrekkende.

XXI.

XXI.

De grootheden zyn *onderscheidenlyk* (*discrete*) evenreedig zo de leden der beide gelyke reedens verschillende zyn: doch *geduurig* (*continue*) evenreedig, wanneer het volgend lid in de eerste reede, het voorgaand lid is in de tweede; het volgend lid van de tweede, het voorgaand lid van de derde, enzov. De geduurige evenreedigheid, draagt den naam van *arithmetische reeks* of *progressie*: en *even ver afstaande* leden zyn die welke met betrekking tot een ander door een gelyk getal leden van dezelven gescheiden worden.

VOORBEELD. Indien A—B = B—C = C—D = E—F enz.: maaken A, B, C, D, E, F, enz. eene arithmetische *progressie* of reeks uit.

I. AANMERKING. Men ziet dat deeze bepaaling, op het woord *arithmetisch* na, dezelfde is als de XII bepaling: en de naamen van *middelevenreedige*, *derde evenreedige*, *vierde evenreedige*, *uiterften*, *middelften*, *eveneensgeplaatste* hebben hier dezelfde betekenis als in de XIII en XIV bepaalingen, die hier ook gelden.

II. AAMERKING. Eene arithmetische progressie wordt dus aangeduidt ÷: by voorb. ÷ A, B, C, D, E, enz. betekent dat A, B, C, D, E eene arithmetische reeks uitmaaken.

GEVOLG.

De reeks welke grootheden, die *geduurig* evenreedig zyn, uitmaaken, is *wassende* of *opgaande*, indien de grootheden bestendig grooter en grooter worden: doch *afneemende* of *neêrgaande*, indien de grootheden bestendig kleiner en kleiner worden.

EIGENSCHAPPEN
DER
ARITHMETISCHE EVENREEDIGHEDEN EN PROGRESSIEN.

XIX. VOORSTEL.

Wanneer vier grootheden eene arithmetische evenreedigheid uitmaaken, is de som der uiterften gelyk aan de som der middelften.

St. p. 209. pr. 1. — W. a. §. 105.

BEWYS. Uit de XX bepaaling. —

I. GEVOLG.

Wanneer drie grootheden geduurig arithmetisch evenreedig zyn, is de som der uiterften het dubbeld van de som der middelften, en dus is het middelfte lid de halve som der beide uiterften.

W. a. §. 106. 107. — S. p. 210. pr. 2.

AANMERKING. Hier uit blykt hoe men gemaklyk eene vierde, derde, of middelevenreedige vinden kan.

XX. VOORSTEL.

Hoe minder twee getalen van elkander verschillen, hoe minder de middel-evenreedige, arithmetisch genomen, verschilt van de middel-evenreedige, geometrisch genomen.

L. C. Aftron. §. 26.

BEWYS. Uit het 1 Gevolg van het XIX, en het 1 Gevolg van het V Voorftel.

XXI. VOORSTEL.

Wanneer verscheiden grootheeden eene arithmetische reeks uitmaaken, groeien zy aan of nemen zy af, met een bestendig verschil, zodat eene arithmetische reeks altoos deeze gedaante heeft

$A, A \pm V, A \pm 2V, A \pm 3V \ldots A \pm \overline{(n-1)} V.$

St.

S. p. 212. pr. 3.

BEWYS. Uit het voorgaand Voorſtel.

GEVOLG.

Indien het getal van leden oneven is, is de ſom van twee leden, die even ver van het middelſte af ſtaan, gelyk aan het dubbel van het middelſte: en dus is het middelſte de helft van de ſom dier twee andere leden.

S. p. 213. gevolg.

XXIII. VOORSTEL.

Wanneer *nul* het eerſte of het laatſte lid van eene arithmetiſche reeks is, is de ſom van twee leden gelyk aan een derde lid, dat even ver van een dier twee leden afſtaat, als het ander van het begin of einde van de reeks, of van den *nul*.

BEWYS. Uit het voorgaand Voorſtel.

I. AANMERKING. Het zelfde geldt dus ook voor de reekſen die ter wederzyde van den nul vervolgd worden: want men kan dezelven beſchouwen als uit twee reekſen beſtaande.

II. AANMERKING. Dit Voorſtel is het tweede grondbeginſel waar op de aart der Logarithmen ſteunt.

XXIV. VOORSTEL.

De ſom van alle de leden eener arithmetiſche reeks is gelyk aan de ſom der beide uiterſten, gemultipliceerd door de helft van het getal der leden.

St. p. 213. pr. 4.

BEWYS. Uit het XXII Voorſtel.

GEVOLG.

Dus is de ſom ook gelyk aan de helft van het getal der leden gemultipliceerd door de ſom of het verſchil van het dubbel van het eerſte lid, en het *verſchil* door het getal der leden min één gemultipliceerd.

$$S = \left(\frac{2A \pm \overline{n-1}\,V}{2}\right) n$$

III.

III. AFDEELING.

OVER DE HARMONISCHE EVENREEDIGHEID.

DERDE BEPAALINGEN.

XXII.

Drie grootheden (A, B, C) worden gezegd *harmonisch* evenreedig te zyn, wanneer de *geometrische* reeden van de eerste tot de derde (A: C) gelyk is aan de *geometrische* reeden van het verschil tusschen de tweede en de eerste (B—A) tot het verschil tusschen de derde en de tweede (C—B).

Dat is: zo A: C = B—A : C—B zyn A, B, C, *harmonisch* evenreedig.

HORREBOW §. 15. —— LAMI p. 461.

I. GEVOLG.

Het blykt, dat indien het tweede lid grooter is dan het eerste, het derde ook grooter dan het tweede zyn zal: dus is één der twee uiterste leden het grootst en het ander het kleinst der drie leeden. Waarom ook sommigen deeze bepaaling geeven: „ Drie getalen staan in eene harmonische „ evenreedigheid als de kleinste staat tot de grootste, zo als „ de overmaat van de middelste boven de kleinste, tot de „ overmaat van de grootste boven de middelste.

II. GEVOLG.

Drie getalen kunnen geene harmonische evenreedigheid uitmaaken, als het verschil van het middelste en het kleinste grooter is dan het kleinste zelf.

Uit de XXII Bepaaling en het IX Voorstel.

LAMI p. 463.

III. GEVOLG.

Dit II Gevolg in acht genomen zynde, blykt het, dat men, twee getalen gegeeven zynde, een derde vinden kan, dat met de twee anderen in eene harmonische evenreedigheid staat.

LAMI pr. 1. p. 461.

Fig. 149.

I. AANMERKING. Indien men drie lynen heeft AD, AC, AB, zullen zy harmonisch-evenreedig zyn, indien

$$AD : AB = AD - AC : AC - AB:$$

zo dan AD de grootste, AC de tweede, en AB de kleinste is: en men op de lyn AD neemt, $AC = AC$, $AB = AB$, is $AD - AC = CD$ en $AC - AB = BC$ en dus $AD : AB = CD : BC$ of

$$AD : CD = AB : BC,$$

men zegt dan dat die lyn *harmonisch* gesneeden is: waar uit deeze bepaaling van den Heer LA HIRE (*Section Con.* Lib. 1. def. 1.) volgt ;,, Eene rechte lyn A*d* wordt gezegd ,, *harmonisch* gedeeld te zyn, indien de geheele lyn AD ,, tot een der uiterste deelen (AB, of CD), staat, zo ,, als het ander uiterste (CD of AB,) tot het middelste ,, deel: of, zo de rechthoek van de geheele lyn en het ,, middelste deel, gelyk is aan den rechthoek van de ui- ,, terste deelen.

Hier op steunt de oplossing van het XXII Vraagstuk van het I. Boek der Werkstukken.

II. AANMERKING. Deeze evenreedigheid wordt harmonisch genoemd, omdat zy de grondslag is van de harmonie. Drie snaaren, die even dik, en even gespannen zyn, geeven de drie voornaamste toonen uit, den octaaf, quint en quart, wanneer haare lengten zyn als 3, 4, 6. De twee die als 3 tot 6 staan, geeven *den octaaf*: de twee die als 4 tot 6 staan, geeven de *quint*: en de twee, welke als 3 tot 4 staan, maaken de *quart* uit: die getalen nu, 3, 4, 6, zyn zodanig gesteld dat $3:6 = 4-3 : 6-4$.

XXIII.

XXIII.

Verschillende getalen maaken eene harmonische reeks uit, als het eene staat tot het tweede dat 'er op volgt, zo als het verschil tusschen het middelste en het eerste, tot het verschil tusschen het gemelde tweede en het middelste, dat is, A, B, C, D, E enz. zullen een harmonische reeks uitmaaken indien

$$A : C = B - A : C - B$$
$$B : D = C - B : D - C$$
$$C : E = D - C : E - D \quad \text{enz.}$$
$$D : F = E - D : F - E.$$

AANMERKING. WOLF geeft in zyne latynsche *Algebra* §. 186. deeze bepaaling van vier *harmonische* evenreedigen; hy zegt „ vier grootheeden zyn harmonisch evenreedig, „ als het verschil tusschen de eerste en de tweede, staat „ tot het verschil tusschen de derde en vierde, zo als „ de eerste grootheid tot de vierde:" doch dan moet men die getalen afzonderlyk beschouwen, en niet als zynde in eene *harmonische reeks*: men zoude anders in veele feilen vallen; en dus achten wy die bepaaling onnaauwkeurig. De Heer WOLF kan eene dusdanige evenreedigheid wel *harmonische* evenreedigheid noemen: doch dit is niet die evenreedigheid die door alle andere schryvers dus genoemd wordt: dit zal duidelyker uit de 2 Aanmerking op het XXIX Voorstel blyken.

GEVOLG.

Wanneer getalen *harmonisch* evenreedig zyn, zullen hunne producten of quotienten het ook zyn, indien zy allen door een zelfde getal *gemultipliceerd* of *gedivideerd* worden.

LAMI p. 463. pr. 3.

XXV. VOORSTEL.

Wanneer het tweede van twee gegeeven getalen grooter is dan het eerste, kan men niet altoos getalen vinden, die met de voorgaande eene harmonische opgaande reeks, zo ver uit-

gestrekt als men wil, zullen uitmaaken: maar dit kan altoos geschieden wanneer het tweede getal kleiner is dan het eerste: en dus kan een nederdaalende reeks zo veel men wil verlengd worden.

BEWYS. Het blykt uit het 3 gevolg van de XXII bepaaling, dat men altoos eene derde harmonische evenreedige aan twee getalen vinden kan: doch al had men 'er reeds twee, drie enz., is het niet zeeker dat men 'er eene volgende vinden kan: want in de evenreedigheid $C : E = D - C : E - D$: daar $E > C$, moet $E - D > D - C$ zyn: dus $E + C > 2D$: doch daar $E > D$ en $C < D$, is zulks niet altoos mogelyk. Zie verder 2 Gev. van het XXVIII Voorstel. Maar, indien $B < A$, zal de evenreedigheid zyn

$C : A = B - C : A - B$: En dus A en B gegeeven zynde, is $A - B < A$: dus moet $B - C < C$ of $C > \frac{B}{2}$ zyn, dat altoos mogelyk is, om dat C nog niet gegeeven is. En al verder $E : C = D - E : C - D$: daar nu $C - D < C$: is ook $D - E < E$ of $E > \frac{D}{2}$ dat altoos mogelyk is: en dus zal ieder lid altoos grooter zyn dan de helft van het voorgaande.

XXVI. VOORSTEL.

In alle harmonische reeksen, is altoos het product der twee eerste leeden tot dat der twee laatsten, zo als het verschil der beide eersten tot dat der beide laatsten.

BEWYS. De leden der evenreedigheden van de XXIII bepaaling onderling en in hunnen rang multipliceerende, zullen de uitkomsten evenreedig zyn: (door het X Voorstel:) en deeze zullen door het IV *Axioma* deeze evenreedigheid opleveren,

$$AB : EF = B - A : F - E.$$

XXVII.

XXVII. VOORSTEL.

Indien A, B, C, D, E, enz. eene harmonische reeks uitmaaken, en Y het $n$ste lid is, en Z het $\overline{n+1}$, heeft men

$$B - n(B - A) : B - A = Y : Z - Y.$$

BEWYS. $A : B = B - A : C - B$; dus
$A : B - A = B : C - B$;
en $B : B - A = 2C - B : C - B$;
$B - (B - A) : B - A = C : C - B$;
en $B - 2(B - A) : B - A = B : C - B$.
D. T. B. W. 1°.
verder $B : C - B = D : D - C$:
dus $B - 2(B - A) : B - A = D : D - C$:
en dus $B - 3(B - A) : B - A = C : D - C$:
D. T. B. W. 2°.
verder $C : D - C = E : E - D$:
dus $B - 3(B - A) : B - A = E : E - D$:
en dus $B - 4(B - A) : B - A = D : E - D$
en zo voorts. D. T. B. W. 3°.

GEVOLG.

Uit dit Voorstel en uit het VIII. N°. 1. volgt:

$$B - \overline{n-1}(B - A) : B - n(B - A) = Z : Y$$

dus voor het derde lid

$$B - (B - A) : B - 2(B - A) = C : B$$

of $2A - B : A = B : C$.

Dit is het 5 Theorema van WOLF in zyne latynsche algebra §. 187. „Zo drie getalen *harmonisch* evenredig zyn, „ is het verschil tusschen het tweede en het dubbeld van „ eerste tot het eerste, als het tweede tot het derde:" en omgekeerd. Zie ook NORREBOW § 30.

2°. Uit $2A - B : A = B : C$ volgt
$C : A = B : 2A - B$
en $C + A : C = 2A : B$
of $C + A : 2A = C : B$.

Dit is het *Theorema* van WOLF in §. 191. „ Zo drie groot-
„ heden harmonisch evenreedig zyn, is de som van de
„ eerste en laatste tot het dubbel van de eerste, zo als de
„ laatste tot de middelste." Dit kan ook aldus uitgedrukt worden, en dan zyn het de *Theoremata* by HORREBOW § 23 en 22.
„ zo drie getalen harmonisch evenreedig zyn, is de som
„ der uitersten, tot een der uitersten, zo als het ander ui-
„ terste, tot de helft van het middelste: of zo als het dub-
„ bel van het ander uiterste tot het middelste."

AANMERKING. Het *Theorema* van WOLF in §. 192, dat namelyk, „ zo vier grootheden harmonisch evenreedig
„ zyn, de derde tot de vierde staat, zo als het verschil
„ tusschen de tweede en het dubbeld van de eerste tot
„ de eerste," is in den zin van onze bepaaling valsch, als steunende op zyne onnaauwkeurige bepaaling, waarvan wy in de Aanmerking op onze XXIII bepaaling gesproken hebben.

XXVIII. VOORSTEL.

Indien Z het *n*ste lid is van eene harmonische reeks, waar van A het eerste, en B het tweede lid is, is

$$Z = \frac{A \times B}{B-(n-1)(B-A)} = \frac{AB}{B+\overline{n-1}\,(A-B)}.$$

BEWYS: $A : C = B - A : C - B$

Dus het derde lid of $C = \frac{AB}{2A - B} =$

$$\frac{AB}{B+2A-2B} = \frac{AB}{B-2(B-A)}: \quad \text{D. T. B W. } 1^o.$$

$B : D = C - B : D - C$:

$$\text{Dus } D = \frac{BC}{2B-C} = \frac{B}{2B - \frac{AB}{2A-B}} \times \frac{AB}{2A-B}$$

$$= \frac{AB^2}{4AB-2BB-AB} = \frac{AB}{3A-2B} = \frac{AB}{B-3(B-A)}$$

D. T. B. W. 3°.

C:

$$C:E = D-C : E-D$$

Dus het vierde lid, of $E = \frac{DC}{2C-D}$ of

$$E = \frac{\frac{AB}{B-3(B-A)} \times \frac{AB}{B-2(B-A)}}{\frac{2AB}{B-2(B-A)} - \frac{AB}{B-3(B-A)}} =$$

$$\frac{A^2B^2}{AB(2B-6(B-A)-B+2(B-A))} = \frac{AB}{B-4(B-A)}$$

D. T. B. W. 3°.

En zo voorts voor alle de leden: en dus voor het *n* lid

$$Z = \frac{AB}{B-\overline{n-1}(B-A)} = \frac{AB}{B+\overline{n-1}(A-B)}.$$

I. GEVOLG.

Hier uit volgt 1°. dat men ieder lid van eene harmonische reeks vinden kan, als men de twee eersten kent, en weet het hoeveelste het gevraagde lid is; 2°. dat men een lid naar welgevallen, en de twee eersten gegeeven zynde, vinden kan het hoeveelste het gevraagde lid is.

II. GEVOLG.

Hier uit volgt dat, wanneer het tweede lid grooter is dan het eerste, en dus de reeks wassende is, men deeze niet zo ver men wil, verlengen kan, want $B - \overline{n-1}\ (B - A)$ zoude eindelyk $= 0$ kunnen worden; doch dat dit mogelyk is wanneer $B < A$, of de reeks afneemende is, zo als wy zulks reeds in het XXV Voorstel getoond hebben.

In het algemeen, zo de reeks wassende, en het verschil $(B - A)$ der twee eerste leeden een effen deel van het tweede lid (B) is, is de reeks eindig: want dan wordt $\overline{n-1}\ (B-A)$ eindelyk gelyk aan B: dus wordt de noemer $B - \overline{n-1}(B-A)$ nul: en de breuk waar van dat getal de noemer is, kan niet uitgedrukt worden.

Indien het verschil B—A een oneffen deel is van B, zo zal men eindelyk tot een getal komen, zodanig, dat B—m (B—A) nog kleiner is dan B, en dus dat de noemer B—m(B—A) nog *positief* is, maar dat $\overline{m+1}$ (B—A) grooter is dan B, en dus de noemer B—$\overline{m+1}$ (B—A) *negatief*, waar door dat lid, en alle de overigen ook *minus* zyn zullen. By voorbeeld, zy A, of het eerste lid 20: B, of het tweede, 36: dan is B—A = 16 en B × A = 720: dan zullen de leeden zyn

$$20, 36, \frac{720}{36-2\times 10}, \frac{720}{36-3\times 16}, \frac{720}{36-4\times 16}, \text{ enz.}$$

of

$$20, 36, \frac{720}{4}, \frac{720}{-12}, \frac{720}{-28}, \frac{720}{-44}, \text{ of}$$

$$20, 36, 180, -60, -25\tfrac{5}{7}, -16\tfrac{4}{11}:$$

en men heeft als dan: by voorbeeld

$36 : -60 = 180 - 36 : -60 - 180$ of

$36 : -60 = 144 \quad : -240 :$

of $6 : -10 = 12 \quad : -20 :$

insgelyks

$180 : 25\tfrac{5}{7} = 180 - (-60) : -60 - (-25\tfrac{5}{7})$

of

$$180 : -\frac{180}{7} = 180 + 60 : -60 + 25\tfrac{5}{7}$$

of

$7 : -1 = 240 : -34\tfrac{2}{7}$

$7 : -1 = 240 : -\frac{240}{7}$ of

$7 : -1 = 7 : -1$: en zo voorts in alle gevallen, mits behoorlyk op de teekenen +, — lettende.

XXIX.

XXIX. VOORSTEL.

Indien men eene bestendige grootheid achtervolgens door de leden van eene arithmetische reeks divideert; zullen de quotienten eene *Harmonische* reeks uitmaaken.

HORREBOW §. 10. —— LAMI p. 465.

BEWYS. Uit het voorgaand Voorstel blykt, dat eene harmonische rei A, B, C, D, E, enz. dus kan worden uitgedrukt,

$$\frac{AB}{B},\ \frac{AB}{B+(A-B)},\ \frac{AB}{B+2(A-B)},\ \frac{AB}{B+3(A-B)}$$

$$\frac{AB}{B+4(A-B)}\ \ldots\ldots\ \frac{AB}{B+\overline{n-1}(A-B)}$$

Maar AB is eene bestendige grootheid, en (XXI Voorstel,) B, $B+(A-B)$, $B+2(A-B)$, $B+3(A-B)$ .... $B+\overline{n-1}\,(A-B)$ maaken eene arithmetische reeks: waaruit dan het Voorstel volgt.

I. GEVOLG.

Getalen, die het omgekeerde zyn van de leden eener arithmetische rei, maaken eene harmonische rei uit.

I. AANMERKING. Indien men, zo als HORREBOW, dit Voorstel als de bepaaling van eene harmonische progressie aanneemt, kan men uit dezelve, zo wel onze bepaaling als de vorige voorstellen afleiden.

II. AANMERKING. Uit dit Voorstel blykt genoegzaam, dat de bepaaling van WOLF hier niet geldt: want men heeft hier niet

$$A:\frac{AB}{B+3(A-B)}=A-B:$$

$$:\frac{AB}{B+2(A-B)}-\frac{AB}{B+3(A-B)}$$

Want dan moest men hebben

$$A:A-B=\frac{1}{B+3(A-B)}:\frac{1}{B+2(A-B)}-\frac{1}{B+3(A-B)}$$

$$=B+2(A-B):A-B$$

$=2A-B:A-B$: dat valsch is.

II.

II. GEVOLG.

Wanneer men, uit eene harmonische reeks, leden uitneemt, die even ver van elkander afstaan, zullen zy ook eene harmonische reeks uitmaaken.

HORREBOW §. 12.

BEWYS. Het blykt om dat de noemers altoos in eene arithmetische reeks blyven.

XXX. VOORSTEL.

Wanneer drie getalen eene arithmetische evenreedigheid uitmaaken, zyn de producten van het eerste met het tweede, van het eerste met het derde, en van het tweede met het derde *Harmonisch* evenreedig.

LAMI. p. 464. prop. 4.

BEWYS. $\div$ I, K, L: dus

$I + L = 2K$:

$I - K = K - L$:

maar $I.K : K.L = I : L$ (IV *Ax.*)

dus $I.K : K.L = I(K - L) : L(I - K)$ (IV *Ax.*)

of $IK : KL = IK - IL, : IL - KL$

IK, IL, en KL, harmonisch evenreedig.

XXXI. VOORSTEL.

Wanneer men tusschen twee getalen I, K eene arithmetische middel-evenreedige (A) en eene harmonische middel-evenreedige (H) neemt, zullen die vier getalen eene geometrische evenreedigheid uitmaaken, waarvan de twee gegevene de uiterste, en de twee gevondene de middelste leden zullen zyn.

BEWYS. Door de onderstelling is $A = \frac{I + K}{2}$

en $I : K = I - H : H - K$: of

$H = \frac{2KI}{I + K}$: maar

$1 : I = K : KI$ (IV *Axioma.*)

dus

dus (X. Voorstel, 2. Gevolg.)

$$I+K : I = K : \frac{KI}{I+K} \text{ of}$$

$$\frac{I+K}{2} : I = K : \frac{2KI}{I+K}$$

dus

$$A : I = K : H.$$

I. ALGEMEENE AANMERKING.

De leer der harmonische evenreedigheid is van het grootste belang in veele stukken van de Natuurkunde, waaromtrent men HORREBOW ter aangehaalde plaatse §. 45. en volg. kan raadpleegen, zo als ook myne *Positiones Physicae* Lib. III. §. 105. Lib. IV. §. 115, & §. 294. § 333, 361.

II. ALGEMEENE AANMERKING.

'Er is nog eene andere soort van evenreedigheid die WOLF *tegen-harmonische* (*contra-harmonica*) noemt, in zyne latynsche *Algebra* §. 193: namelyk drie getalen zyn *tegen-harmonisch* evenreedig, zo het verschil tusschen het eerste en het tweede, staat tot het verschil tusschen het tweede en het derde, zo als het derde tot het eerste: dus zyn A, B, C, *tegen-harmonisch evenreedig*, indien

$$A - B : B - C = C : A: \text{ en dus is}$$

$$C^2 - BC = BA - A^2 \text{ of;}$$

$$C^2 + A^2 = B\ (C + A): \text{ en dus}$$

$$\frac{C^2 + A^2}{C + A} = B:$$

gevolglyk: Indien men de som der quadraaten van twee getalen door de som dier getalen divideert, is het quotient middel-*contra-harmonisch-evenreedig* tusschen die getalen.

Zie verder WOLF §. 193 —— 196.

IV.

IV. AFDEELING,

OVER DE LOGARITHMEN.

XXIV BEPAALING (a).

Indien men twee reekfen van getalen heeft, de eene, eene geometrifche reeks, de andere eene arithmetifche reeks: en men de zelven zodanig ftelt, dat 'er over ieder lid van de geometrifche reeks een lid van de arithmetifche reeks tegen over ftaat: worden de getalen van de arithmetifche reeks in het *algemeen* de *Logarithmen* genoemd van de getalen der geometrifche reeks, ieder van dat getal, tegen over welk het ftaat.

By voorbeeld: Geometrifche reeks 3, 6, 12, 24, 48,
Arithmetifche reeks 1, 2, 3, 4, 5,
Dan zyn 1, 2, 3, 4, 5, ieder in zyn' rang de Logarithmen van 3, 6, 12, 24, 48.

S. p. 393. def. 1. —— W. Tr. §. 21, 22.

AANMERKING. Wy zullen in de eerfte aanmerking op het volgend Voorftel een naauwkeuriger denkbeeld van Logarithmen geeven.

XXXII. VOORSTEL.

Indien men de geometrifche reeks

a^0 (of 1), a^1, a^2, a^3, a^4, - - - - - - - - a^n

heeft, zyn de aanwyzers 0, 1, 2, 3, 4, enz., de logarithmen van de getalen a^0 (of 1), a, a^2, a^3, enz. ieder in zyn' rang.

S. p. 395. def. 2.

BEWYS. Uit de XXIV Bep. het XIV Voorftel, 4 Gevolg, en het XXI Voorftel, 5 Gevolg.

I. AAN-

(a) De *eerfte* Bepaalingen zyn te vinden pag. 60, de *tweede* pag. 108, de *derde* pag. 115.

I. AANMERKING. In de berekening en dus in het gebruik der Logarithmen, onderstelt men altoos dat de eenheid, (en dus a^0. Zie IV Bep. 2 Aanm.) het eerste lid van de geometrische reeks is, en dus *nul* het eerste lid van de arithmetische reeks, of van de reeks der logarithmen: gevolglyk zyn, in eenen meer bepaalden en naauwkeuriger zin, de Logarithmen, „getalen in eene „arithmetische reeks met nul beginnende en tegen over „de getalen van eene geometrische reeks, die met 1 „begint, staande."

I. GEVOLG.

Dus is in het algemeen, indien a het getal is, waar van de Logarithmus 1 is, 1 = Log. a : 0 = Log. a^0 = Log. 1 : en x = Log. a^x.

II. AANMERKING. Dat getal a, waar van 1 de Logarithmus zyn zal, kan naar welgevallen genomen worden: doch het hangt van dit getal af, welke de getalen zyn waar van 2, 3, 4 enz. de logarithmen zyn zullen, daar die getalen de 2, 3, 4 magten enz. van a zyn. Dit is de reeden waarom men dat getal, waarvan 1 de logarithmus is, den grondslag of *bazis* van dat *stelsel* van Logarithmen noemt, en dus kunnen 'er zo veele verschillende stelsels van Logarithmen zyn, als men verschillende getalen tot grondslag aanneemt.

II. GEVOLG.

Wy hebben gezien in het 7 Gevolg van het XIV Voorstel, dat men de Geometrische reeks

$$A,\ Aq,\ Aq^2 \,\text{---------}\, Aq^{n-1}$$

aan den anderen kant van A verlengen kan: dus, stellende A = 1 heeft men

$$q^{-(n-1)} \cdots,\ q^{-4},\ q^{-3},\ q^{-2},\ q^{-1},\ q^0,\ q,\ q^2 q^3,\ q^4, \text{ of}$$

$$\frac{1}{q^{n-1}} \cdots \frac{1}{q^5}, \frac{1}{q^4}, \frac{1}{q^3}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q}, 1, q, q^2, q^3, q^4 \cdots q^{n-1}$$

En

En gevolglyk zullen $-(n-1)$, -4, -3, -2, -1 de logarithmen zyn der breuken $\frac{1}{q^{n-1}}$ ..... $\frac{1}{q^4}$, $\frac{1}{q^3}$, $\frac{1}{q^2}$, $\frac{1}{q}$

III. GEVOLG.

Insgelyks, indien men andere middel-evenreedigheeden tusſchen twee leeden, by voorbeeld 1 en q, q en q^2 neemt, zo als

1, $q^{0,25}$, $q^{0,5}$, $q^{0,75}$, q^{1}, $q^{1,25}$, $q^{1,5}$, $q^{1,75}$, q^{2}, enz zullen 0,25, 0,5, 0,75, 1,25, 1,5, 1,75, de logarithmen van die getalen zyn ieder in hun rang; en dus is 'er geen getal hoe genaamd, of men kan zyn logarithmus bepaalen: want het valt zeker tusſchen twee leeden van de reeks q, q^2, q^3 enz. in, welk getal men ook voor q neeme: en 'er is geen getal of het is eenige magt of wortel van het getal q (8 Gevolg van het XIV Voorſtel.)

XXXIII. VOORSTEL.

De Logarithmen (x en y) van een en het zelfde getal (z), welke tot verſchillende ſtelſels van Logarithmen behooren, zyn altoos in eene beſtendige reeden.

H. III. §. 208.

BEWYS. Zy het eene ſtelſel

a^0, a^1, a^2, a^3, ... a^x

het ander

b^0, b^1, b^2, b^3, ... b^y

Met ſtelle dat $a^x = Z = b^y$: zo als by voorbeeld, indien $a = 4$ is, en $b = 2$, is $a^4 = 256$, en $b^8 = 256$: dus $a^4 = b^8 = 256 = Z$, daar dan $a^x = Z$; $b^y = Z$: is $a^x = b^y$: x Log. $a = y$ Log. b en dus $x : y =$ Log. b : Log. a: dat is in eene beſtendige reeden.

XXXIV. VOORSTEL.

De som der Logarithmen van twee getalen is de Logarithmus van het product dier beide getalen door elkander gemultipliceerd.

S. p. 396. pr. 1. —— W. t. §. 23.

BEWYS. Uit het XXXII, het XXIII en het XVI Voorstel.

I. GEVOLG.

De Logarithmus van het product uit verscheiden getalen is de som der Logarithmen van ieder van die getalen.

II. GEVOLG.

De Logarithmus van eenige magt *n* van een getal *b*, dat is, van b^n, is het product van den aanwyzer *n* gemultipliceerd door den Logarithmus van het getal *b*.

BEWYS. Uit het I Gevolg en de IV bepaling.

S. p. 397. pr. 2. —— W. t. §. 25.

III. GEVOLG.

Indien men dan eene Tafel gemaakt heeft van de Logarithmen van alle de getalen, zal men, met te zien, welk getal tegen over de som der Logarithmen van twee of meerder getalen staat, weeten, dat dit getal het product van die getalen is: en men zal dus het zeer lastig werk van *multipliceeren*, tot het gemaklyk werk van *addeeren* herleiden.

XXXV. VOORSTEL.

Het verschil der Logarithmen van twee getalen is de Logarithmus van het quotient dat uit de divisie dier twee getalen voortkomt.

S. p. 398. pr. 3. —— W. t. §. 33.

BEWYS. Uit het XXXIV. Voorstel, gepaard met de III. Aanmerk. op de IV bepaling: of uit het XXXII Gev. 2., XXIII en XVI Voorstel.

I. GEVOLG.

De Logarithmus van den wortel *n* uit eenig getal *b* (of van $\sqrt[n]{b}$, of $b^{\frac{1}{n}}$) is het *n* gedeelte van den Logarithmus van dat getal zelf: (II Gevolg van het voorgaand Voorstel, gepaard met de III Aanmerking op de IV Bepaling.)

S. p. 399. pr. 4. —— W. t. §. 27—31.

II. GEVOLG.

Als men eene tafel heeft, waarin de logarithmen van alle de getalen gevonden worden, zal men het lastig werk van *divideeren* tot eene *aftrekking* van logarithmen, en het nog moeijelyker werk van worteltrekken tot eene ligte *divisie* herleiden.

III. GEVOLG.

Log. $\frac{1}{a}$ is dus = Log. 1 — Log *a*:

dus is Log. $\frac{b}{a}$ = Log. $b \times \frac{1}{a}$ = Log. *b* + (Log. 1. — Log. *a*.) of = Log. *b* — Log. *a*. Men noemt het *arithmetisch complement* van een' logarithmus de *rest* die men verkrygt, wanneer men een' logarithmus van o aftrekt; welke *rest* dus *negatief* is (XXXII Voorstel, 2 Gevolg). En dus komt het aftrekken van een' logarithmus met het byvoegen van zyn *arithmetisch complement* overéén. Zie, op het eind van dit Boek, het *Bericht* N°. VI.)

XXXVI. VOORSTEL.

Wanneer drie getalen *zeer weinig* van elkander verschillen, zullen de verschillen der logarithmen zeer ten naasten by de zelfde reeden volgen als die der getalen, waarvan zy de logarithmen zyn.

BEWYS. Uit het XXXII en uit het XX Voorstel.

XXXVII.

XXXVII. VOORSTEL.

In alle ſtelſels van logarithmen, zyn de logarithmen van de *bazis*, en van alle de getalen die magten zyn van de bazis, gegeeven: zy zyn namelyk, *geheele getalen*, de natuurlyke getalen 1, 2, 3, enz. zelve. De logarithmen van alle de andere getalen zyn breuken, en wel zuivere breuken voor alle de getalen tusſchen de eenheid en de bazis begreepen: gemengde breuken voor alle de overige getalen die grooter dan de bazis zyn.

BEWYS. Uit het XXXII Voorſtel en desſelfs 2 Gevolg.

GEVOLG.

In onze gewoone logarithmen, die men Tafel-Logarithmen, om dat zy de logarithmus-tafelen uitmaaken, of ook wel *Briggiaanſche* logarithmen noemt, omdat zy door HENRY BRIGGS, een' Engelschman, bereekend zyn, is 10 de bazis: dus is, zo als altoos, 0 de logarithmus van 1: 1 de logarithmus van 10^1 of 10: 2 de logarithmus van 10^2 of 100: 3 de logarithmus van 10^3 of 1000: 4 de logarithmus van 10^4 of 10000: en zo voorts. De verdere logarithmen worden door decimale breuken uitgedrukt; en dus zyn zy 0, met zo veele letters 'er achter als vereischt worden om de breuk te maken, voor alle de getalen tusſchen 1 en 10: 1, met letters tot breuk, voor alle de getalen tusſchen 10 en 100 enz.: doch voor waare breuken zyn zy *negatief*; namelyk — 1, met letters 'er achter tot breuk voor alle de getalen tusſchen 1 en $\frac{1}{10}$: —2, voor alle de getalen tusſchen $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{100}$ enz. Zie 2 Gev. van het XXXII Voorſtel.

De logarithmen beſtaan dan uit eene cyffer, 0, of 1, of 2, of 3 enz., die men het *character* of den *aanwyzer* noemt, en uit cyffer-letters achter het *character*

om de nodige breuk te maaken: en deeze noemt men het *aanvulsel* (*mantissa*).

Het *character* is dus een *geheel positief* of een *geheel negatief* getal, naar maate het tot den logarithmus van een getal dat groter of kleiner dan de eenheid is, behoort: en 'er zyn zo veel eenheden in het *character* als 'er cyffer-letters in het getal, of in den noemer van de *decimaale breuk*, waar van het de logarithmus is, gevonden worden min één: dus is 0 het *character* van alle getalen tusschen 1 en 10: 1 van de getalen tusschen tusschen 10 en 100: 2 van de getalen tusschen 100 en 1000 enz. —1 van alle de decimaale breuken tusschen $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{100}$: —2 van alle de decimaale breuken tusschen $\frac{1}{100}$ en $\frac{1}{1000}$ enz.

AANMERKING. In de gewoone kleine Logarithmus-Tafelen wordt het character altoos vóór het aanvulsel gevonden, en van het zelve met een stip afgescheiden: doch dit is nutloos, en kan geleegenheid tot veele misslagen geeven. Daarom wordt het character te recht weg gelaten in de grooter Tafelen van DOUWES, SHERWIN, GARDINER, CALLET, en zo voorts: Men vindt het character onmiddelyk door dit Gevolg.

XXXVIII. VOORSTEL.

De logarithmen van alle de getalen die noch de *bazis*, noch magten van de *bazis* zyn, worden bereekend door het geduurige vinden van geometrische midden-evenreedigen tusschen de magten der bazis, tusschen welken het gegeeven getal valt, en van overéénstemmende arithmetische midden-evenreedigen tusschen de logarithmen van de gemelde magten der bazis.

St. p. 406—411. —— W. t. §. 37.

BEWYS. Uit het XXXII Voorstel 3. Gevolg.

I. AANMERKING. Men wil by voorbeeld den Logarithmus van 5 bereekenen: De logarithmus van 1 is 0: die van 10 is 1: het getal 5 ſtaat tusſchen 1 en 10: ik beſchouw dan de getalen 1 en 10 als de uiterſten van eene geometriſche, en de getalen 0 en 1 als de uiterſten van eene arithmetiſche reeks: ik zoek dan wederzyds middel-evenreedigen; tot dat ik in de geometriſche reeks een getal kryg, dat zeer ten naasten by 5 is: aldus

Midden-evenreedige tusſchen 1 en 10 $= \sqrt{1 \times 10} = \sqrt{10} = 3,162277$: midden-evenreedige tusſchen 0 en 1 is ½ of 0,5, dus is 0,5 de logarithmus van 3,162277: dit getal is te klein: ik zoek dan weder eene midden-evenreedige tusſchen 10 en 3,162277: die gevolglyk kleiner dan 10, doch grooter dan 3,162277 zyn zal: (8 Gev. XIV Voorſtel:) deeze is $\sqrt{31,62277} = 5,623413$: de midden-evenreedige tusſchen 1 en 0,5 is 0,75, dus is 0,75 de logarithmus van 5,623413: dit getal is te groot: ik zoek dan eene midden-evenreedige tusſchen 5,623413 en 3,162277 welke kleiner dan 5,623413, doch grooter dan 3,162277 zyn zal; deeze is $\sqrt{5,623413 \times 3,162277} = 4,216964$: ik zoek insgelyks een midden-evenreedige tusſchen 0,5 en 0,75, deeze is 0,625: dus is 0,625 de logarithmus van 4,216964. Dit getal te klein zynde, neem ik weder een midden-evenreedige tusſchen 4,216964 en 5,623413 en zo voorts, tot dat ik tot midden-evenreedige een getal verkryg, dat zeer na by 5 komt. Zie ook de volgende III Aanmerking.

II. AANMERKING. Het blykt hier uit hoe het kome, dat, daar de logarithmen de aanwyzers zyn van getalen in eene geometriſche reeks ſtaande, nochtans in de Tafels de getalen, tot welken de logarithmen behooren, eene arithmetiſche reeks maaken, als zynde de natuurlyke getalen 1, 2, 3, enz. want men heeft alle de middelleeden, die tusſchen 0 en 1, tusſchen 1 en 2 enz. zyn, en die men mede heeft moeten bereekenen om de overigen te

vinden, weggelaaten. Het vinden van eenen logarithmus van een getal, byv. van 5, is eigenlyk vinden, welke magt dat getal van de bazis 10 zy: dus vindt men hier dat $5 = 10^{0,69897}$: en dus is 0,69897 de aanwyzer van die magt, de logarithmus van 5.

III. AANMERKING. Het volgt hier uit dat de Logarithmen slechts ten naasten by gevonden worden, daar alles steunt op worteltrekken uit getalen die allen *onmeetbaar* zyn: en gevolglyk dat de logarithmen ook naauwkeuriger zyn zullen, naar maate men de wortels naauwkeuriger, dat is tot meerder cyffer-letters, bereekent. De logarithmen zelve worden doorgaands tot 7 letters in het aanvulsel gebragt.

IV. AANMERKING. Het is op deeze wyze dat BRIGGS en VLACQ de logarithmus-tafels bereekend hebben: dan hoe lastig en langwylig dit werk ook zy, wordt het veel verligt, 1°. hier door, dat het genoeg is de logarithmen der *eerste* getalen, 1, 2, 3, 11, 13 te berekenen; daar de overigen door eene enkele optelling van logarithmen gevonden worden, by voorb. Log. 21. = Log 3. + Log. 7. 2°. Dat alle die midden-evenreedigen die men bereekent om den logarithmus van een getal te vinden, niet verlooren zyn, maar wederom in het vervolg in de tafels dienen kunnen; 3°. dat wanneer de getalen weinig verschillen, men de arithmetische midden-evenreedige neemen kan. Ook heeft men in het vervolg andere handelwyzen uitgedacht, op wiskundige gronden, doch welke hier niet kunnen uitgelegd worden, steunende, om den logarithmus, van welk getal men wil, veel gemaklyker te bereekenen.

V. AANMERKING. NEEPER, een Schotsch Edelman, de eerste uitvinder der logarithmen, heeft zyne logarithmen op eene andere bazis dan 10 bereekend: zyn bazis namelyk is het getal 2,7182818: dus is 1 de logarithmus van 2,7182818, daar

daar het by ons de logarithmus van 10 is. Die logarithmen worden de NEEPERIAANSCHE, ook de *natuurlyke* of *Hyperbolische* logarithmen genoemd: het eerste naar den uitvinder, het ander om dat zy ook uit de *quadratuur* van de *hyperbole* ontleend worden. Het zal genoeg zyn hier aan te merken, dat de NEEPERIAANSCHE of *Hyperbolische* logarithmus van 10 is 2,3025850; en dus (XXXIII Voorstel) dat de *hyperbolische* logarithmus van eenig getal, staat tot den logarithmus van het zelfde getal in de Tafels, zo als 2,3025850 tot 1,0000000: dat de tafel-logarithmen gevolglyk tot de hyperbolische herleid worden, zo men ze door 2,3025850 multipliceert; en de hyperbolische tot de tafel logarithmen, indien men ze door 2,3025850 divideert, of door $\frac{1}{2,3025850}$ dat is door 0,4342744 multipliceert.

H. III. §. 209——352.

BERICHT.

Ik zal in myne lessen zelve het gebruik der Logarithmus-tafelen door voorbeelden uitleggen, en toonen hoe het zelve op de voorgaande Voorstellen rust: het is onnuttig dit gebruik hier in te lasschen, om dat het voor alle Tafelen gevonden wordt. Het zal echter niet ondienstig zyn aan te merken, dat 'er vyf Vraagstukken op te lossen zyn.

I. *Te vinden den Logarithmus van een gegeeven* geheel *getal, dat in de Tafelen staat.* Dit lost zich van zelf op.

II. *Te vinden den Logarithmus van eene decimaale breuk, het zy zuivere, het zy gemengde breuk, doch die niet uit meer cyffers bestaat dan de getalen van de Tafels die men gebruikt.*

Men zoekt den logarithmus als of het een geheel getal was, doch zonder op het *character* (indien het in de Tafelen staat) te letten: met voegt het character by naar het Gevolg van het XXVII Voorstel.)

Wy zullen hier uitleggen hoe, en waarom, men voor het *character* der logarithmen van zuivere breuken, in plaats van *negatieve* characters, gebruiken kan 9 voor de getalen tusschen $\frac{1}{10}$ en 1, en dus in plaats van —1 : 8 voor de getalen tusschen $\frac{1}{10}$ en $\frac{1}{100}$ en dus in plaats van —2 : 7 voor de getalen tusschen $\frac{1}{100}$ en $\frac{1}{1000}$ en dus in plaats van —3 : en zo voorts: altoos zo veel eenheden van 10 aftrekkende, als 'er nullen vóór de eerste cyffer van de breuk gevonden worden.

III. *Te vinden den logarithmus van een getal, 't zy geheel, 't zy eene breuk, uit meer cyffers bestaande dan de getalen van de Tafel.* —— Men neemt de logarithmen van het naastvoorgaande, en het naast volgende getal, na dat men by ieder deezer getalen zo veele nullen gevoegd heeft, als 'er cyffers meer in het gegeven getal zyn, en de *characters* naar eisch gesteld heeft: men neemt hun verschil. Men neemt insgelyks het verschil tusschen die twee getalen, en tusschen het kleinste en het gegeven: vervolgens zoekt men door eenen regel van drieën een evenreedig gedeelte voor den logarithmus, zeggende:

Het verschil tusschen de twee getalen staat tot het verschil van hunne logarithmen, zo als het verschil tusschen het kleinste getal en het gegeevene, tot het verschil tusschen den logarithmus van het kleinste en den logarithmus van het gegeevene: welk verschil men dus by den eerstgemelden voegt. (XXXVI Voorstel.)

Wy zullen hier het gebruik aanwyzen van de kolommen van *Proportionaale gedeelten* die in de grootere Logarithmus-Tafelen gevonden worden: en de reeden geeven, waarom de gemelde regel naauwkeurig voor groote, doch onnaauwkeurig voor kleine getalen is.

IV. *Een logarithmus gegeeven zynde, het getal te vinden.*

Zo de logarithmus in de Tafels staat, is het overeenstemmend getal het gezochte. Zo niet, vergenoegt men zich met het getal wiens logarithmus het naast aan den gegeeven logarithmus komt: of, wil men naauwkeurig te werk gaan,

zoekt

zoekt men een evenreedig gedeelte door denzelfden regel als in het voorgaande vraagstuk, zeggende: het verschil tusschen de twee logarithmen staat tot het verschil tusschen hunne getalen, zo als het verschil tusschen de kleinsten logarithmus en den gegeevenen, tot het verschil tusschen het kleinste en het gezochte getal. — of wel in plaats van dien regel gebruikt men in de grooter Tafelen de kolom van *Proportioneele* of *evenreedige gedeelten.*

V. *Te vinden den Logarithmen van eene breuk, 't zy zuivere, het zy gemengde.* — Men trekt den Logarithmus van den noemer van den Logarithmus van den teller af; de *rest* is de gevraagde logarithmus: en het getal, dat over dien logarithmus staat, of tot denzelven behoort, is de *decimaale breuk* die aan de gegeeven breuk gelyk is.

Zie S. p. 413. en volgende.

VI. Hier moet men *ten zesden* byvoegen, dat, daar het *addeeren* altoos gemakkelyker valt dan het *subtraheeren*, men in plaats van Logarithmen *af te trekken*, meest altoos derzelver *arithmetische complementen* (XXXV Voorst. het III, Gev.) neemt, en *by telt*: het geen vooral veel verkort, wanneer men verscheiden logarithmen moet aftrekken: byv. In het bereekenen van deeze breuk $\frac{23 \times 303 \times 277}{13 \times 24 \times 47}$, zoude men op de gewoone wyze dus te werk gaan,

Log. 23	. . . .		1,3617278
Log. 303	. . . .		2,4814426
Log. 277	. . . .		2,4424798
			6,2856502
Log. 13	. . . .	1,1139434	
Log. 24	. . . .	1,3802112	
Log. 47	. . . .	1,6720979	
		. .	4,1662525
			2,1193977

waarvan het getal ten naasten by is
131,642

Doch men werkt korter aldus:

Log. 23	. . . . .	1,3617278
Log. 303	. . . . .	2,4814426
Log. 277	. . . .	2,4424798
Comp. ar. Log. 13	. . .	8,8860566
——— 23	. . .	8,6197888
——— 47	. . .	8,3279021
		2,1193977

En het valt altoos gemaklyk het *arithmetisch complement* van eenen logarithmus te neemen: want men neemt slechts (van de linker hand beginnende) het verschil van iedere cyffer van den gegeeven logarithmus met 9, behalven voor de laatste cyffer, wier verschil men neemt met 10.

VIERDE

VIERDE BOEK.

OVER DE GELYKVORMIGHEID DER FIGUUREN, EN DE REEDEN VAN DERZELVER ZYDEN EN INHOUDEN.

I. BEPAALING Fig. 70. 71.

Men noemt gelykvormige figuuren die geenen, in welke de hoeken onderling gelyk zyn, en de zyden, die om gelyke hoeken en tevens over gelyke hoeken ſtaan, dezelfde reeden tot elkander hebben.

EUCL. VI. 1 def. — W.g. §. 5. en §. 182. — S. p. 243, 1 bep.

VOORBEELD. In fig. 70 is ∠D = ∠A : ∠F = ∠C
∠E = ∠B : en FD : FE = CA : CB :
FE : DE = CB : BA
DE : FD = BA : CA.

en op de zelfde wyze in figuur 71: ∠A = ∠F : ∠E = ∠K : ∠D = ∠I : ∠C = ∠H : ∠B = ∠G : en BA : AE = GF : FK enz.

I. AANMERKING. In deeze bepaaling wordt van eene dubbele eigenſchap geſprooken, die niet altyd plaats heeft, zo als uit figuur 4 en 14 blykt: doch wy zullen in het II Voorſtel bewyzen, dat in driehoeken de eene altoos met de andere gepaard is: en dan in het XIV, wat 'er vereischt wordt op dat het zelfde in andere figuuren plaats zoude hebben.

II. AANMERKING. Het valt zeer moeijelyk eene naauwkeurige, alleszins voldoende, en op alle gevallen even toepasſelyke bepaaling van de *gelykvormigheid* te geeven: wy zullen in het XII Voorſtel van het VII Boek zien, hoe deeze bepaaling op den Cirkel toegepast kan worden.

III. AANMERKING. De gelykvormigheid van twee figuu-

ren wordt dus gezocht in de gelykheid van sommige deelen, van de hoeken namelyk: en de evenreedigheid van anderen, van de zyden: zo dat de gedaante van beide de figuuren de zelfde zy. Daarom is het niet genoeg dat de zyden, die gelyke hoeken bevatten, evenreedig zyn; by voorb. in Fig 70. AB:AC=DF:DE, en in Fig. 71. BA:AE=FK:GF; maar het moeten de zyden zyn die tevens over gelyke hoeken staan, AB:AC=DE:DF en BA:AE=GF:FK, om dat men dan de zyden in beide de Figuuren volgens de zelfde orde, of den zelfden rang neemt: 't geen de gelykheid van gedaante, en dus de gelykvormigheid in beide de figuuren te weeg brengt. Hier om is het dat ook die zyden, welke gelyke hoeken bevatten en over gelyke hoeken staan, met recht *eventensstaande* (*homologa*) genoemd worden.

IV. AANMERKING. EUCLIDES heeft de woorden, *die tevens over gelyke hoeken staan*, in zyne bepaaling achtergelaaten; het komt my voor dat zy 'er een weezenlyk gedeelte van uitmaaken.

II. BEPAALING.

Eene lyn wordt gezegd in *uiterste* en *middelste* reeden gesneeden te zyn, als de geheele lyn tot het grootste deel de zelfde reeden heeft als het grootste deel tot het kleinste.

EUCL. VI. 3 bep. —— St. p. 244. d. 3.

I. AANMERKING. Wy zullen straks (VII Voorstel 1 Gev.) bewyzen, dat, in dat geval, de rechthoek uit de geheele lyn en het kleinste stuk gelyk is aan het vierkant van het grootste stuk: en dus hebben wy in het X Voorstel van het II Boek, reeds van eenen driehoek gewag gemaakt, welks eene been in uiterste en middelste reeden gesneeden is.

II. AANMERKING. EUCLIDES heeft in de zes eerste Propositien van zyn dertiende Boek verscheiden eigenschappen

die

dier lynen voorgesteld: waar van deeze onder anderen in het oog loopt: dat, zo men aan de gegeeven lyn (L) een stuk voegt gelyk aan het grootste stuk (G), het geheel wederom in de zelfde reeden zal verdeeld zyn: want, stel K het kleinste gedeelte; dan is door de onderstelling

L : G = G : K : dus, III, 8. N°. 1.
L + G : G + K = L : G of
L + G : L = L : G.

Eucl. XIII. 5: zie verder hier onder het VII Voorstel, 6 en 7 Aanmerking op het VI Gevolg.

I. AFDEELING.

OVER DE GELYKVORMIGHEID VAN DRIEHOEKEN EN PARALLELOGRAMMEN, EN DE REEDEN VAN DEERZELVER INHOUD.

I. VOORSTEL. Fig. 64 en 137.

Indien men binnen eenen driehoek (ADE) eene lyn (BC) evenwydig aan een der zyden (DE) trekt: zal die lyn de beide overige zyden in gelyke reeden snyden: en omgekeerd; zo eene lyn twee zyden in de zelfde reeden snydt, zal zy evenwydig aan de derde zyde zyn.

EUCL. VI. 2. —— W. g. §. 184. —— S. p. 247. pr. 2.

I. BEWYS. Fig. 137.

I. GEVAL. Indien de lynen BA, en BD eene gemeene maat, stel de lyn AZ, hebben: dan behelst de lyn BA die maat by voorbeeld *m* maalen, en de lyn BD *n* maalen: en men bewyst uit het Gevolg van het XX Voorstel, I. B. dat, zo ZQ || DE, dan AC de lyn AQ ook *m* maalen,

en

en CE die zelfde lyn AQ *n* maalen, bevat, waar uit volgt (III. B. IV *Axioma* en XI Voorst.) dat men heeft BA : BD = AC : CE.

II. GEVAL. Indien de lynen BA, en BD geen gemeene maat hebben, laat dan AZ eene maat zyn van de lyn AB, en 'er *m* maalen in bevat zyn: dan wordt AQ ook *m* maalen in AC begreepen (I. B. XX. Voorst. Gev.) en AZ zal meer dan *n* maalen by voorbeeld, en minder dan $\overline{n+1}$ maalen in BD begreepen worden: zo als ook AQ meer dan *n* en minder dan $\overline{n+1}$ maalen in CE, en dus: daar BA = *m* × AZ, en AC = *m* × AQ; en BD > *n* × AZ, en < dan $\overline{n+1}$. AZ en CE > *n* . AQ en < $\overline{n+1}$ × AQ; heeft men hier (III. 3.)

AB : BD = AC : CE.

I. AANMERKING. Het omgekeerde wordt beweezen door de ongerymdheid daar men in vervalt met het tegendeel te stellen.

II. AANMERKING. Dit bewys komt ons voor uit den waaren aart der zaaken ontleend te zyn, en dus, *wysgeerig gesprooken*, de voorkeur boven anderen te verdienen. EUCLIDES heeft een ander bewys gegeeven, ontleend uit ons volgend VI Voorstel, dat namelyk driehoeken, die de zelfde hoogte hebben, in de reeden hunner grondlynen staan: doch de Heer D'ALEMBERT heeft reeds te recht aangemerkt, dat dit bewys slechts *indirect* is: daar het

en DBC beweezen te hebben, toont men uit het VI van dit Boek, dat de driehoeken DBC en BAC zyn als de grondlynen DB en BA: insgelyks ook de driehoeken BCE en BAC als de grondlynen AC en CE: waar uit dit Voorstel door (III. 5.) volgt.

Het omgekeerde wordt beweezen uit de ongerymdheid daar men in vervalt met het tegendeel te stellen.

GEVOLG.

De geheele zyden zyn in de zelfde reeden als haare stukken: namelyk

AD : AB = AE : AC

AD : DB = AE : CE

uit dit Voorstel en III, 8.

W. §. 185.

III. AANMERKING. Dit Voorstel stelt ons in staat om uit het I Boek der Werkstukken het 8. (1. Oplosfing) 9 en 10 Werkstuk op te losfen.

II. VOORSTEL. Fig. 65.

Wanneer de drie hoeken (A, ABC, ACB) van eenen driehoek (ABC) gelyk zyn aan de drie hoeken (DCE, CDE, E) van eenen anderen driehoek (CDE) ieder aan ieder, zyn die zyden, welke in beide de driehoeken gelyke hoeken bevatten, en over gelyke hoeken staan, in de zelfde reeden.

EUCL. VI. 4. —— W. g. §. 183. —— St. p. 249. pr. 4.

BEREIDING. Men vooronderstelt dat de beide driehoeken naast elkander staan, zo dat de beide grondlynen AC, CE, eene lyn uitmaaken: dan volgt uit de onderstellingen en I B. bep. 8. dat CD || AB: DE || BC: en dus indien men AB en DE verlengt, tot dat zy in F te samen komen en GD || AC is, dat BC = FD : BF = CD: GD = AC. (I. B. 19 Voorst.)

BEWYS. Uit de bereiding, en het I Voorstel.

I. GE-

I. GEVOLG.

Driehoeken, die gelyke hoeken hebben, zyn gelykvormig.

I. AANMERKING. Dus, zodra eene der voorwaarden van de gelykvormigheid, de gelykheid namelyk der hoeken plaats heeft, heeft, in de driehoeken, de andere, de evenreedigheid der eveneens geplaatste zyden, ook plaats.

II AANMERKING. Het is op dit Gevolg, en op het VII van het XI Voorstel in het I Boek, dat het gebruik van die lynen op den *proportionaal passer* steunt, die den naam draagen van *gelyke deelen*, op die instrumenten van fransch maaksel (*parties egales*), en welke op die van engelsch maaksel meest met een *L* de eerste letter van het woord *Leagues* bestempeld zyn. Hier op steunt ook het gebruik der *transversaale* lynen in alle plynschaalen om zo veel gelyke onderdeelen van eene maat als men wil te neemen.

II. GEVOLG. Fig. 70.

Wanneer twee driehoeken gelyke hoeken hebben, *en dus* gelykvormig zyn: zyn de hoogten (BG, EH) in de zelfde reeden als de eveneensstaande zyden, en de grondlynen (*zo nodig verlengd*) worden door de loodlynen (BG, EH) uit de toppen (B, E) op dezelven getrokken, in evenreedige deelen gesneeden.

St. p. 250. Gev.

II. AANMERKING. De woorden *zo nodig verlengd*, gelden, wanneer een der hoeken op de grondlyn stomp is: want dan valt de loodlyn buiten den driehoek. (I, 7: gev. 6.)

III. GEVOLG. (Fig. 137.)

Indien men op eene lyn AE een stip A neemt, en uit twee andere stippen (C, E) twee lynen (CB, ED) naar denzelfden kant zodanig trekt, dat zy en evenwydig aan

elkander, en in de zelfde reeden zyn als haare afstanden van het stip A, (BC:DE = AC: AE) zo zullen haare uiteinden D, B, met het stip A in ééne rechte lyn zyn.

BEWYS. Het volgt door dit Voorstel uit de ongerymdheid daar men in vervalt met het tegendeel te stellen.

AANMERKING. Dit Voorstel komt in de daad met EUCLIDES VI. 26. overeen: want het zal het zelfde zyn, indien men op AC, BC, en AE, ED, de parallelogrammen daar EUCLIDES van spreekt, voltooit.

II. AANMERKING. Dit Gevolg, of dit Voorstel, is in veele gevallen, ook in de Natuurkunde, van nut: men vindt het ook by R. SIMSON *Sect. Con. pr.* 34.

III. VOORSTEL. Fig. 66.

Wanneer de zyden (AB, AC, BC) van eenen driehoek (ABC) de zelfde reeden tot elkander hebben, als de drie zyden (DE, DF, EF) van eenen anderen driehoek (DEF), zullen de hoeken die tusschen de evenreedige zyden begreepen zyn, in beide de driehoeken gelyk zyn.

EUCL. VI. 5. — St. p. 251. pr. 5.

BEREIDING. Men vooronderstelt dat 'er op DF een driehoek DFG, gelykhoekig met ABC zy gesteld.

BEWYS. Uit het gegeevene, de evenreedigheid der zyden in de driehoeken DFG en ABC, en het XI. van het III. B. wordt besloten dat de zyden der driehoeken DGF en EDF onderling gelyk zyn: en dus uit het XII van het I. B. dat de hoeken het ook zyn: waar uit het Voorstel volgt.

GEVOLG.

Twee driehoeken, wier zyden evenreedig zyn, zyn gelykvormig.

AANMERKING. Dus wederom, wanneer het tweede vereischte voor de gelykvormigheid in driehoeken, de evenreedig-

digheid der zyden, plaats heeft, heeft ook het eerste plaats, namelyk de gelykheid der hoeken.

IV. VOORSTEL. Fig. 66.

Indien een hoek (A) van eenen driehoek (ABC), gelyk is aan eenen hoek (EDF) van eenen anderen driehoek (DEF): en de zyden, die deeze hoeken in beiden bevatten, evenreedig zyn (AB en AC, DE en DF), zullen de driehoeken gelykhoekig, en dus gelykvormig zyn.

EUCLIDES VI. 6. —— S. p. 252. pr. 6.

BEREIDING. Men ftelt dat de driehoek DFG gelykvormig is met BAC: namelyk ∠FDG = ∠C: ∠DFG = ∠A.

BEWYS. Uit de gegeven evenreedigheid, het II Voorftel van dit Boek, en het IX. van het III. wordt de gelykheid der lynen DE en FG, en dan uit het VIII van het I. Boek, de gelykheid der hoeken EFD en FDG, E en G opgemaakt: waaruit het Voorftel zelf blykt.

Het laatfte gedeelte blykt uit het 1. Gevolg van het II. Voorftel.

V. VOORSTEL. Fig. 66 en 67.

Indien twee driehoeken (ABC, DEF,) beide rechthoekig zyn, of beide ftomphoekig, of beide fcherphoekig, en in beide de laatfte gevallen een' hoek (C) van den eenen gelyk is aan eenen hoek (F) van den anderen: en indien verder de zyden die om eenen anderen hoek ftaan, evenreedig zyn: zullen die driehoeken gelykhoekig, en dus gelykvormig zyn.

EUCL. VI. 7. — S. p. 253. pr. 7.

I. BEWYS. I°. Voor de rechthoekige driehoeken: men ftelle in fig. 66. de hoeken B en E recht: die dus van zelf gelyk zyn: waarom 'er dan ook niet, zo als in beide de overige gevallen, nog boven dien een gelyke hoek vereischt wordt. Zy AB : AC = DE : DF. De bereiding is als in het IV Voorftel: namelyk, ftel den driehoek DGF gelykhoekig met

ABC:

ABC: dan is ∠FDG = ∠C : ∠DFG = A; dus ∠G recht: waaruit, namelyk uit het II Voorstel, de onderstelling, en het IX Voorstel van het III Boek, de gelykheid van DE en FG volgt: en dan uit het 6 Gevolg van het XI Voorstel van het I Boek, die van EF en DG, en van de scherpe hoeken.

II°. Indien beide de hoeken E en B of scherp of stomp zyn, en boven dien ∠C = DFE: men maakt even als in N°. 1. ∠DFG = A: waar uit volgt de gelykheid van DE en FG: dus uit het XIII Voorstel van het I Boek die van DG en FE, en die der overige hoeken; waar uit het Voorstel verder wordt opgemaakt.

I. AANMERKING. Men behoeft voor N°. 1. wanneer de driehoeken rechthoekig zyn, niet eens het gemelde 6 Gevolg te gebruiken: want uit het VII Voorstel van het II Boek, is

□ op DE + □ op EF = □ op DF = □ op DG + □ op GF
en daar □ op DE = □ op FG is: is □ op EF = □ op DG:
of EF = DG

II. BEWYS Uit de ongerymdheid daar men in vervalt, zo men het tegendeel stelt, Fig. 67. Men stelt CG = EF en CH = DF. Zy AB : BC = DE : EF: en de hoeken C en F of recht; of, zo zy niet recht zyn, dan gelyk, en daar en boven als dan de ∠B en ∠E beiden stomp, of beiden scherp: zo dan niet ∠HGC of ABC = ∠DEF laat het ∠CGI zyn: dan volgt uit de onderstelling, en het I Voorstel, dat IG = HG zyn zoude.

II. AANMERKING. Het blykt waarom de beide hoeken (by voorb. C en F) of stomp, of recht, of scherp moeten zyn, want daar men (I. 14. Gev. 1.) uit het stip A twee gelyke lynen trekken kan, die dus tot AC de zelfde reeden hebben, die namelyk van DE : DF, maar waar van de eene met BC eenen stompen, de andere eenen scherpen hoek zoude maaken, daar de hoeken C en F de zelfde zoude blyven, volgt het dat de soort der hoeken B en E bepaald moet zyn.

II. AANMERKING. Het geen wy in de II Aanmerking op het XIV. Voorstel van het I B. omtrent het XIII Voorstel van het zelfde Boek gezegd hebben, heeft hier ook plaats: zo dat sommigen dit Voorstel dus uitdrukken: driehoeken, die eenen hoek gelyk hebben, en twee zyden om eenen anderen hoek staande evenreedig, doch waar van die, welke over den gelyken hoek staat, grooter is dan die welke daar aan grenst, zyn gelykvormig.

En hier uit volgt dan ook dat rechthoekige driehoeken of stomphoekige, waar in de stompe hoeken gelyk zyn, zo 'er twee zyden die om eenen anderen hoek staan, evenreedig zyn, gelykvormig zyn: dat ook een onmiddelyk en byzonder Gevolg van ons algemeen Voorstel is. — KAESTEN § 208.

VI. VOORSTEL. Fig. 63.

Driehoeken (ABC, ACD) die de zelfde hoogte hebben, doch op verschillende grondlynen (BC, CD) staan: hebben tot elkander de zelfde reeden als de grondlynen zelve; en omgekeerd: het geen ook voor de Parallelogrammen plaats heeft.

EUCL. VI. 1. — S. p. 246. Gev. 1.

BEREIDING. Men verlengt de grondlynen BC, en CD, en neemt op dezelve zo veele deelen BE, EF, FG gelyk aan BC, als deelen DH, HI, IK, gelyk aan CD.

[redacted]

ſtaan als *m* tot *n*, dat is als de grondlynen: doch het loopt in het oog dat men dan ſtilzwygend onderſtelt, dat de grondlynen eene gemeene maat hebben, dat niet altoos waar is: en dus is dat bewys onvoldoende.

II. AANMERKING. Men kan thans het XX Werkſtuk van het III. Boek oplosſen.

VII. VOORSTEL. (Fig. 68.)

Parallelogrammen, (AD, GK) of driehoeken, die op verſchillende grondlynen, (CD, LK) en op verſchillende hoogten (DE, KH) ſtaan, zyn tot elkander in ſamengeſtelde reeden van de grondlynen en de hoogten, (zo als CD × DE : LK × KH.)

St. p. 245. pr. 1.

BEREIDING. Men onderſtelt dat de rechthoeken FD en MK ieder op de zelfde grondlyn en hoogte als de gegeeven parallelogrammen of driehoeken ſtaan: vervolgens dat de rechthoek MK op de zelfde lyn als de rechthoek FD, zodanig geſteld is, dat een der hoeken aan beide gemeen worde: men verlengt HK tot N.

BEWYS. Uit het VI Voorſtel van dit Boek en het X van het III wordt de reeden der rechthoeken FD en MK, opgemaakt te zyn, de ſamengeſtelde van CD × DE en CK × HK; waar uit die der gegeeven parallelogrammen of driehoeken volgt, door het 1 Gevolg van het I of het 1 Gevolg van het VI Voorſtel, beide in het II Boek.

I. AANMERKING. Zie daar wederom een algemeen Voorſtel dat niet beweezen kan worden, ten zy eerst een byzonder geval van het zelve beweezen zy: want het voorgaand Voorſtel is een byzonder geval van dit.

I. GEVOLG.

Indien parallelogrammen of driehoeken op gelyke grondlynen ſtaan, zyn zy in de zelfde reeden als hunne hoogten.

TACQUET op EUCL. VI, 1. Cor. — St. p. 246. Gev. 2

Hier op ſteunt de oploſſing van het XXII Werkſtuk uit het III Boek.

II. GEVOLG.

Gelykhoekige parallelogrammen, of driehoeken, zyn in ſamengeſtelde reeden der zyden die gelyke hoeken bevatten, en over gelyke hoeken ſtaan. Dit blykt om dat als dan de driehoeken EBD en HIK gelykvormig zyn; en dus de reeden van ED en HK die der zyden BD en IK is.

II. AANMERKING. Dit is de 23 Propoſitie van het VI B. by EUCLIDES. Die ſchryver, by wien men ons Voorſtel niet vindt, bewyst dit zeer vernuftig: namelyk (Fig. 32,) daar de ▭ AG en GD gelykhoekig zyn, vooronderſteld hy dat dezelve met de gelyke hoeken tegen elkander ſtaan: dan zullen FG en GI ééne rechte lyn, en HG en GE éénе rechte lyn uitmaaken: (II Voorſt. 3 Gev.) vervolgens ID en AH verlengende, bekomt men ▭HI: waarmeede men door het voorgaand Voorſtel, beide de gegeeven parallelogrammen AG, en GD vergelykende, het beſluit opmaakt.

St. p. 267. pr. 19.

III. GEVOLG.

Indien twee parallelogrammen, of twee driehoeken

[redacted]

bevatten in omgekeerde reeden van die welke den gelyken hoek in den anderen omvatten: en omgekeerd.

Het blykt om dat als dan ED en HK de zelfde reeden tot elkander hebben als BD: IK.

S. p. 259 pr. 12. p. 260. p. 13. Dit zyn de 14 en 15 Propofitiën van het VI B. van EUCLIDES: welke die fchryver op die wyze betoogt, die wy in de tweede Aanmerking hebben aangehaald.

IV. AANMERKING. Men is thans in ftaat de 2 Oplosfing van het XIII en XIV Werkftuk van het III. Boek te verrichten.

V. GEVOLG.

In alle rechthoeken, die gelyk aan elkander zyn, zyn de grondlynen in omgekeerde reeden van de hoogten; en omgekeerd: dat is, zo vier lynen evenreedig zyn, zal de rechthoek uit de twee uiterften gelyk zyn aan den rechthoek uit de twee middelften; en indien de twee middelften gelyk zyn, en dus de vierde in de daad derde evenreedige is aan de twee eerften, of, wanneer drie lynen geduurig evenreedig zyn, zal het vierkant op de middelfte gelyk zyn aan den rechthoek uit de uiterften.

V. AANMERKING. Dit zyn de 16 en 17 Propofitiën van EUCLIDES in het VI. Boek: die door hem op de reeds aangehaalde wyze betoogd worden. Wy zullen ftraks VIII. Gevolg N°. 2. zien, dat dit Voorftel volftrekt het zelfde is als het V. van ons III. Boek, met deszelfs 1 Gevolg: en men zoude verwonderd zyn dit gewigtig Voorftel in het V. Boek van EUCLIDES niet aan te treffen, indien het niet met de zo evengemelde 16 en 17 van het VI. Boek overéénkwam, en die Schryver niet de evenreedigheid meer bepaaldelyk in betrekking tot de Meetkunde befchouwd had.

VI. GEVOLG.

Uit het voorgaand gevolg blykt, dat eene lyn in uiterste en middelste reeden te snyden, het zelfde is, als eene lyn zodanig te snyden, dat het vierkant van het grootste stuk gelyk is aan den rechthoek uit de geheele lyn en het kleinste stuk: eene uitdrukking waarvan wy reeds in het X Voorstel van het II. Boek gebruik gemaakt hebben, terwyl die verdeeling zelf het onderwerp is van het XII Werkstuk uit het I. Boek der Werkstukken.

VI. AANMERKING. Hier uit volgt dat de beide deelen onmeetbaar zyn tot het geheel: want (Fig. 155.) zy BD eene lyn in uiterste en middelste reeden gesneeden in H; en zy BI = ⅔ BD: zo is door het voorgaand gevolg;

□ op BH = Rechth. uit BD, DH;

dat is

□ op $\overline{BD - DH}$ = Rechth. uit BD, DH: of II. 2 Gev. 2.

□ op BD − 2 Rechth. uit BD, DH + □ op DH = Rechth. uit BD, DH.

en dus

□ op BD − 2 Rechth. uit BD, DH + □ op DH + 5 □ op DI = Rechth. uit BD, DH + 5 □ op DI

of

□ op BD − 3 Rechth. uit BD, DH + □ op DH + 5 □ op DI = 5 □ op DI

of (II, 1 het 1 Gev.)

9 □ op DI − 6 Rechth. uit BI, DH + □ op DH = = 5 □ op DI

of (II. 2: Gev. 2.)

□ op (3 DI − DH) = 5 □ op DI;

en dus

3 DI − DH = lyn waar van het □ = 5 □ op DI of = DI √5

en

en dus $DH = 3DI - DI\sqrt{5} = \frac{3}{2}BD - \frac{BD}{2}\sqrt{5}$

$$= \frac{BD}{2}(3 - \sqrt{5})$$

Maar daar $\sqrt{5}$ onmeetbaar is, is ook DH onmeetbaar. Dit is de VI Prop. van EUCLIDES XIII. Boek.

VII. AANMERKING. Hier uit volgt wederom, daar $DH = BD - BH$, dat $3DI - DH = \frac{3}{2}BD - BD + BH$

$$= \frac{1}{2}BD + BH:$$

en dus dat $\square(\frac{1}{2}BD + BH) = 5\ \square$ op $\frac{1}{2}BD$ en

$$BH + \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}BD\sqrt{5}.$$

Dit is EUCL. XIII, 1.

VIII. AANMERKING. En even als $DH = \frac{BD}{2}(3 - \sqrt{5})$ is, is eene andere lyn $CK = \frac{CE}{2}(3 - \sqrt{5})$ en dus

$DH : CK = \frac{BD}{2}(3 - \sqrt{5}) : \frac{CE}{2}(3 - \sqrt{5})$

of (III. *Axioma* IV.) $= BD : CE:$

en insgelyks $BH : EK = BD : CE.$

dat is: „Wanneer eene lyn in uiterfte en middelfte reeden „ gefneeden is, is altoos de reeden van de geheele lyn tot „ ieder der ftukken beftendig, en voor alle de lynen die „ dus gefneeden zyn, de zelfde.

EUCL. XIV, 7: of volgens anderen, XIV, 2.

VII. GEVOLG. Fig. 68.

Zo de grondlyn CD de grondlyn LK *m* maalen, en zo de hoogte DE de hoogte KH *n* maalen bevat, is $\square$ GK: $\square$ AD $= 1 : m \times n$: en dus (9. III) indien men $\square$ GK, of den rechthoek MK voor de *éénheid* of voor de gemeene maat aanneemt, is het getal dat den inhoud van het parallelogram AD uitdrukt gelyk aan *mn*: dat is, het parallelogram AD zal zo veele parallelogrammen gelyk aan GK, of zo

 veele

veele rechthoeken gelyk aan MK bevatten, als 'er eenheden in het getal *m* × *n* zyn.

Men neemt den rechthoek MK zodanig, dat hoogte en grondlyn gelyk zyn: of dat het een vierkant is, waar van de zyde LK die *éénheid* is, welke tot het bepaalen der lengte van de zyden CD, DB, DE, gebruikt wordt: by voorb. één *duim*, één *voet*, ééne *roede* en zo voorts: en men noemt dien rechthoek MK, *vierkante éénheid*, om de zelve van de *lengte-éénheid*, die ter meeting van afſtanden of lengten dient, te onderſcheiden: en dus indien het ▭ CB 10 voeten bevat, duidt dit aan 10 *vierkante* voeten, of 10 vierkanten, wier zyden ieder éénen voet bedraagen.

Hier uit volgt: dat enkele en vierkante *éénheden* van verſchillende benaaming tot elkander ſtaan, als het getal deelen die in de enkele éénheid begreepen zyn tot het vierkant van dat getal: dus behelst één voet 12 duimen: en *één vierkante* voet 12 maal 12 of 144 vierkante duimen: het geen ook door EUCLIDES in de XI. Propoſitie van het VIII. Boek beweezen wordt.

IX. AANMERKING. Men ziet hier uit hoe men met EUCLIDES (VII. Bep. 16.) een product van twee getalen een *vlak getal* noemen kan, waar van de getalen die het zelve voortbrengen de *zyden* zyn: en dat *vlakke getalen* tot elkander ſtaan in ſamengeſtelde reeden hunner wortelen: (EUCL. VIII, 5.) en dat *gelykvormige vlakke getalen* zodanig zyn wier wortels evenreedig zyn. (VII. bep. 21.)

Dit is ook de reeden waarom de Ouden *vlakke plaatſen* (*loci plani*) en *vlakke vraagſtukken* (*problema planum*) alle die werkſtukken noemden, waarin producten van niet meer dan twee grootheden, of alleen *vlakke getalen* gebruikt worden.

VIII.

VIII. GEVOLG.

Uit het voorgaande Gevolg blykt, hoe en in welken zin men zeggen kan:

1°. Dat de vermenigvuldiging van twee lynen den rechthoek van dezelven uitdrukt of geeft: en gevolglyk hoe eene reeden uit twee reedens famengefteld door den rechthoek der lynen, die de enkele reedens uitdrukken, en eene verdubbelde reeden door het vierkant eener lyn aangeweezen wordt, en daar meede overeenkomt.

2°. Dat, wanneer vier lynen evenreedig zyn, de rechthoek der uiterften gelyk is aan den rechthoek der middelften, zo als in het V. Gevolg uit andere gronden beweezen is; en hoe dit overéénkomt met het V. Voorftel van het III. Boek.

3°. Dat, wanneer drie lynen evenreedig zyn, het vierkant op de middelfte gelyk is aan den rechthoek der uiterften, zo als reeds in het V Gevolg uit andere gronden beweezen is: en hoe dit overeenkomt met het 1 Gevolg van het V. Voorftel van het III Boek.

4°. Dat de inhoud van een parallelogram uitgedrukt kan worden door het produ&t van de grondlyn vermeenigvuldigd door de hoogte: en dat dit overeenkomt met het 1 gevolg van het I. Voorftel uit het II. Boek.

Insgelyks dat de inhoud van een vierkant uitgedrukt kan worden door de *tweede magt* of het quadraat van deszelfs zyde.

Het is ook om die reeden, dat de Ouden de uitdrukking *magt van eene lyn*, eene lyn heeft zo veel *magt*, eene lyn *kan* zo veel, gebruiken om de vierkanten op die lynen gemaakt aan te wyzen; dus by voorbeeld, drukte EUCLIDES het

het geen wy in de VII Aanmerking op dit Voorstel beweezen hebben, aldus uit. „ Indien eene lyn in uiterste „ en middelste reeden gesneeden is, *kan* het grootste deel „ te samen met de helft van de geheele lyn het vyf„ voud van het vierkant der halve lyn." Zo dan het getal eenheden waar door de inhoud van een vierkant uitgedrukt wordt, geen *quadraat getal* is, is de zyde van het vierkant altoos *onmeetbaar* met betrekking tot de eenheid die de lengte meet: en dit is altoos het geval van de diagonaal van een vierkant met betrekking tot de zyde; het geen ook EUCLIDES in de laatste Propositie van zyn X Boek beweezen heeft.

5°. Men ziet hier uit ten vyfden, dat de inhoud van eenen driehoek uitgedrukt kan worden door het product van de grondlyn vermeenigvuldigd door de halve hoogte: of door dat van de hoogte vermeenigvuldigd door de halve grondlyn: in één woord door het halve product van grondlyn en hoogte: en dat dit overéénkomt met het 1 Gevolg van het *VI. Voorstel* uit het II Boek.

6°. Dat de inhoud van eenen regelmatigen veelhoek uitgedrukt wordt door het halve product van den omtrek met de loodlyn vermenigvuldigd: en dat dit overéénkomt met het XVII. Voorstel van het II. Boek.

hoek te maaken, die aan eenen gegeeven rechthoek of vierkant gelyk is, overeénkomt met te vinden het quotient dat 'er voorkomt, wanneer men het product van twee getalen door een gegeeven getal divideert: immers komt het gevraagde hier op uit: eene lyn te vinden, die met eene gegeeven lyn eenen rechthoek, aan eenen gegeeven rechthoek gelyk, uitmaake: het geen het onderwerp van ons XV. Werkstuk in het III. Boek opleevert.

X. AANMERKING Alle de voorgaande uitdrukkingen zyn naauwkeurig als men ze behoorlyk gebruikt: doch zy zyn in zich zelf genomen niet geometrisch, en men boezemt niet alleen onnaauwkeurige, maar zelfs geheel valsche denkbeelden in, wanneer men dezelven, zo als veelen doen, in den beginnen gebruikt. De Ouden gebruiken nimmer dergelyke onnaauwkeurige denkbeelden, zo als by voorb.: de inhoud van eenen rechthoek *is gelyk* aan het product van de grondlyn met de hoogte: ook hebben wy, zo als behoort, overal het woord *wordt uitgedrukt door*, of *komt overéén met*, in plaats van het onnaauwkeurige en valsche *is gelyk aan* gebeezigd. Men kan in den eigenlyken zin geene lynen door elkander multipliceeren, of divideeren, maar alléén getalen; en dus ook die getalen welke de lengte van twee lynen, *met betrekking tot eene gemeene maat*, uitdrukken. De multiplicatie van twee lynen maakt nimmer eenen rechthoek of een vierkant: maar het getal van *vierkante éénheden*, dat is van gelyke vierkanten wier zyden men als *betrekkelyke éénheid*, of *gemeene maat* voor de *lengte* gebruikt, het welk de inhoud van een' gegeevenen rechthoek bevat, is gelyk aan het product der zyden van dien rechthoek, dat is, aan het product der getalen welke de lengte van die zyden, met betrekking tot de gemelde éénheid of gemeene maat, uitdrukken. Wil iemand echter de gemelde uitdrukkingen na dat derzelver waare zin eens naauwkeurig verklaard geweest is, gebruiken, hy doe zulks, doch slechts als verkorte manieren van spreeken, of verkorte aanduidingen.

.Zie

Zie hier over D'ALEMBERT, *Melanges Tome* V. p. 211. seqq. — TACQUET Scholion op de 34. en 44 Propositie van het I. en de 22 Propositie van het VI Boek van EUCLIDES: CLAVIUS op diezelfde plaatsen. — HENNERT G. §. 303—328.

IX. GEVOLG.

Indien men de Inhouden van twee parallelogrammen of drichoeken door I en *i*, de grondlynen door B en *b*, de hoogten door H en *h* uitdrukt, 'is ons Voorstel dit

$I : i = B \times H : b \times h$: en dus

1°. Zo de grondlyn onmeetbaar is tot de grondlyn, of de hoogte tot de hoogte, doch niet beiden te gelyk, zullen ook (III. B. XI. Voorst. 1 Gev.) de inhouden I en *i* onderling onmeetbaar zyn: dat is geene ruimte zal derzelver gemeene maat kunnen zyn.

2°. Indien en hoogte en grondlyn van beide de parallelogrammen onderling onmeetbaar zyn, kan den reeden van de Inhouden (I : *i*) meetbaar zyn: (III B. XI Bepaling.)

Dit is het geval by voorbeeld, indien men op den diagonaal en de zyde van een vierkant vierkanten beschryft.

3°. Indien vierkanten op lynen gemaakt worden, die onling onmeetbaar zyn, zullen hunnen inhouden, dat is die vierkanten zelf, niet tot elkander staan als een quadraat-getal tot een quadraat-getal, dat is als twee getalen, waaruit men de wortels trekken kan.

4°. Vierkanten kunnen onderling onmeetbaar zyn: want (Fig. 75.) zy AF onmeetbaar tot FD: by voorb. als $\sqrt{15} : 2$. Men stelle eene middel-evenreedige FB tusschen beiden: dan is $\overline{FB}^2 = 2\sqrt{15} = \sqrt{60}$; en dus het □ op FB: □ op FD $= \sqrt{60} : 4 = \sqrt{15} : 2$: en □ op FB : □ op AF $= \sqrt{60} : 15$.

Er zyn dus *onmeetbaare vierkanten*; er zyn lynen die onmeetbaar zyn, doch wier vierkanten meetbaar worden: en 'er zyn 'er die onderling onmeetbaar zyn, en wier vierkanten het ook zyn: EUCLIDES noemt de eerstgemelde lynen *onmeetbaar in lengte*: de laatstgemelden *onmeetbaar in lengte en in magt*. En hier uit volgt het IX Voorstel van zyn X B.

in

in deeze woorden: „ De vierkanten welke op lynen, die „ in *lengte meetbaar* zyn, gemaakt worden, ſtaan tot elkan„ der als een *quadraat getal* tot een *quadraat getal*, en om„ gekeerd. De vierkanten op lynen gemaakt die in lengte „ onmeetbaar zyn, ſtaan niet tot elkander als een *quadraat* „ *getal* tot een *quadraat getal*, en omgekeerd: En, (dit is „ het Gevolg) lynen die meetbaar zyn in lengte, zyn het „ ook in magt: die welke meetbaar zyn in magt, zyn het „ niet altoos in lengte: die welke onmeetbaar zyn in lengte „ zyn het niet altoos in magt: doch die welke onmeetbaar „ zyn in magt, zyn het ook altoos in lengte.

X. GEVOLG.

Uit de voorgaande Gevolgen, vooral uit het V. en VIII. blykt verder, dat men alle reedens, hoe ſamengeſteld zy ook zyn mogen, altoos door de reeden van twee rechte lynen kan uitdrukken.

Want zy M : N = A × B × C : D × E × F. De enkele reedens A en D, B en E, C en F kunnen altoos door rechte lynen worden uitgedrukt, het zy dezelven meetbaar of onmeetbaar zyn.

Ik ſtel P middel-evenreedige tusſchen A en B, Q tusſchen D en E: en R derde evenreedige aan P en Q: dan is

□ op P = Rechth. uit A en B:

□ op Q = Rechth. uit D en E

dus □ op P : □ op Q = A × B : D × E: maar

P : Q = Q : R: dus (8 Gev. N°. 8 en III, 14.)

□ op P : □ op Q = P : R: gevolglyk

P : R = A × B : D × E: en

M : N = P × C : R × F.

ſtel S middel-evenreedige tusſchen P en C, T tusſchen R en F: en U derde evenreedige aan S en T: dus

□ op S : □ op T = P × C : R × F.

maar □ op S : □ op T = S : U: dus

M : N = S : U; en op de zelfde wyze voor alle mogelyke gevallen.

VIII.

VIII. VOORSTEL. Fig. 70.

In gelykvormige driehoeken (ABC, DEF) zyn de rechthoeken der eveneens geplaatste zyden (AC, BC, DF, EF) doch wederkeerig genomen, (namelyk van AC en EF, BC en DF) gelyk aan elkander.

BEWYS Uit het II Voorstel en het 5 Gevolg van het VII.

AANMERKING Dit zal in het V Boek, in het 1 Gevolg van het XII. Voorstel op eene andere wyze beweezen worden.

IX. VOORSTEL. Fig. 69.

Indien eene lyn (BD) eenen hoek (CBA) van een driehoek (BCA) in twee gelyke deelen deelt, en tot op de overstaande zyde of de grondlyn (CA) verlengd wordt, zullen de stukken (AD, CD) van die overstaande zyde of grondlyn in de zelfde reeden staan als de aangrenzende zyden AB, BC, des driehoeks: en het vierkant van die zelfde lyn (BD), te samen met den rechthoek uit de gemelde stukken (AD, DC) van de grondlyn, is gelyk aan den rechthoek van de twee overige zyden (BA, BC).

VOOR HET I. BEREIDING. Men verlenge AB: en zy CE || BF.

BEWYS. Men betoogt eerst uit den aart der evenwydige lynen, en het IV Voorstel van het I. Boek; dat ∠ECB = ∠CEB, en dus (I, 11.) EB = CB: waar uit het bewys volgt door het I Voorstel van dit Boek.

VOOR HET II. BEREIDING. Stel ∠DAF = ∠ABF: verleng BD tot in F, en trek CF.

BEWYS. Men betoogt uit het gegeevene, en de bereiding △ ABF ∽ △ DAF, om dat ∠ABF = ∠CBD: en dus in de △△ CDB en FDA ook ∠BCD = ∠AFD, of

∠AFB

∠ AFB in den △ ABF: en dus in de △ △ BFA en CBD wederom ∠ BAF = ∠ CDB Waaruit, door het VIII. Voorstel van dit Boek, en het 3 Gevolg van het I van het II Boek, en wederom door het VIII. van dit Boek de zaak beweezen wordt.

I. AANMERKING. Dit zal op eene andere wyze in het 7 Gevolg van het XII. Voorstel van het V. Boek beweezen worden.

II. EN GEWIGTIGE AANMERKING Fig. 150, 151. Het eerste gedeelte van dit Voorstel is de derde Propositie van het VI. Boek van EUCLIDES, doch het zelfde geldt ook voor den uiterlyken hoek GBO: dan valt de lyn BD, die den gemelde hoek CBO in twee gelyke deelen (OBD, en DBC) deelt buiten de grondlyn CA: doch niet altoos aan denzelfden kant: want indien ∠ OBC = 2 ∠ BCA, en dus indien de △ CBA gelykbeenig is, zal BD ∥ AC zyn, en gevolglyk zal die lyn de grondlyn AC niet snyden. Indien OBC < 2 BCA, zal de lyn BD naar CB hellen zo als in Fig. 150: doch naar BA zo ∠ OBC > 2 BCA, zo als in Fig. 151.

Indien men dan in Fig. 150 CE ∥ AB stelt, is DA : DC = AB : CE: maar ∠ BEC = ∠ OBE (I. 4.) en dus = ∠ EBC: dus (I. 11.) EC = BC:

en dus DA : DC = AB : BC.

En indien men in Fig. 151. AE ∥ CB stelt, is

DA : DC = AE : BC :

maar ∠ AEB = ∠ CBQ = ∠ QBO = ∠ ABE: en dus (I, 11.) AE = BA : dus DA : DC = AB : CB.

Verder, men stelle in Fig. 150. QA zodanig dat ∠ QAB = ∠ BDC: dan is

is △ DCB ∽ △ BQA: want ∠ QBA = ∠ EBC: ∠ QAB = ∠ BDC: dus ∠ DCB = ∠ BQA: waar uit volgt (IV, 2.)

DB : BC = BA : BQ : dus (VII. Voorstel 5de Gev.)

Rechth. uit BC, BA = Rechth. uit DB, BQ = Rechth. uit DB, DQ — □ op DB (II, 1 Gev. 5.)
maar △ DCB ∽ △ DQA : dus
DB : DC = DA : DQ en
Rechth. uit DB, DQ = Rechth. uit DC, DA:
dus:

I. Rechth. uit BC, BA = Rechth. uit DC, DA, — □ op DB,
Men stelle in Fig. 151. QC zodat ∠ QCB = ∠ BDA:
dus is △ QCB ∽ △ BAD: waar uit volgt
DB : BA = BC : BQ en
Rechth. uit BA, BC = Rechth. uit DB, BQ
= Rechth. uit DB, DQ — □ DB (II, 1 Gev. 5.)
Maar △ DAB ∽ △ DQC: en dus
DB : DA = DC : DQ en
Rechth. uit DB : DQ = Rechth. uit DA, DC.

II. En dus Rechth. uit BA, BC = Rechth. uit DA, DC — □ op DB.

Uit het geen hier N°. I en N°. II. beweezen is, blykt, dat het tweede lid van ons Voorstel in dit geval het volgende wordt:

„ Het verschil tusschen het vierkant van die lyn en den
„ rechthoek der stukken van de grondlyn, is gelyk aan
„ den rechthoek der overige zyden.

Ons geheel Voorstel, zo wel op den innerlyken als op den uiterlyken hoek toegepast, wordt in den algemeensten zin het volgend.

„ Indien eene lyn eenen hoek van eenen driehoek, het
„ zy eenen innerlyken het zy eenen uiterlyken, in twee
„ gelyke deelen snydt, en zo nodig verlengd zynde, de
„ tegenovergestelde zyde of grondlyn ontmoet; zullen de
„ stukken door die lyn op de grondlyn gemaakt, in de zelfde
„ reden tot elkander staan als de aangrenzende zyden: en
„ de som of het verschil van het vierkant van die lyn en
„ van den rechthoek uit de gemelde stukken van de
„ grondlyn, zal gelyk zyn aan den rechthoek uit de ove-
„ rige

„ rige zyden: de fom namelyk, zo de innerlyke, het ver-
„ fchil zo de uiterlyke hoek gedeeld is geweest.

De Heer R. SIMSON heeft het eerste gedeelte van die eigenfchap voor den uiterlyken hoek als een belangryk byvoegfel op de derde Propofitie in het VI Boek van EUCLIDES voorgefteld, doch hy heeft niets van het tweede gemeld: (*Sect. Conicae* p. 36.)

GEVOLG.

AD + DC of AC : AD = AB + BC : AB: dus is de grondlyn tot een der ftukken van dezelve, zo als de fom der zyden tot de zyde aan het gemelde ftuk grenzende.

X. VOORSTEL. Fig. 153.

De lynen (CE, AF) die uit twee hoeken (C en A) van eenen drieboek (CAG) op de tegenovergeftelde zyden (AG en CG) getrokken worden, en de zelve in twee gelyke deelen fnyden, ontmoeten elkander in een ftip (D) dat op twee derde gedeelten is van ieder lyn, van den top af te reekenen: en indien men uit den derden hoek (G) door dat ftip (D) eene lyn (GB) op de derde zyde (CA) trekt, zal zy ook die zyde in twee gelyke deelen fnyden: zo dat de drie lynen die, uit de drie hoeken getrokken, de tegenoverftaande zyden in twee gelyke deelen fnyden, elkander in één ftip, dat op twee derde gedeelte van ieder lyn geplaatst is, ontmoeten.

VOOR HET I. GEDEELTE: BEREIDING. Men ftelle FY || AG

BEWYS. Men bewyst uit het I. Voorftel van dit, en het IX van het III. Boek dat FY de helft is van EG: dus ook van AE en men gaat voort uit de gelykvormige driehoeken ADE, YDF, om te toonen dat AD = 2DF.

VOOR HET II GEDEELTE. BEREIDING. Men ftelle FR || CA.

BEWYS. Men bewyst, even als in het voorgaande, dat CB = 2RF, en men gaat voort uit de gelykhoekige driehoeken ADB en RDF, waar uit het befluit volgt.

AANMERKING. Dit Voorstel is van veel nut in de Natuurkunde, daar het dient om het zwaarte-middelpunt van eenen driehoek te bepaalen, het welk het stip D zelf is.

XI. VOORSTEL. Fig. 153.

Indien men uit twee hoeken (G, C) van eenen driehoek loodrechte lynen (GB, CE) op de tegenoverstaande zyden (CA, AG) trekt, zullen zy zich binnen of buiten den driehoek in éénig stip D ontmoeten, naar maate de zyden op welke zy getrokken worden, eenen scherpen of eenen stompen hoek maaken; indien men verder uit den derden hoek (A) door dat stip eene lyn AF op de derde zyde (CG) trekt, zal deeze ook loodrecht op die zyde staan.

BEWYS. $\triangle CBD \backsim \triangle CAE \backsim \triangle GBA$: dus

$CB : BD = BG : BA$:

of, $CB : BG = BD : BA$:

en dus, daar de hoeken om B recht zyn, is

$\triangle ABD \backsim \triangle CBG$: (V. Voorstel): en dus

$\angle BAD = \angle DGF$:

$\angle BDA = \angle FDG$

dus $\angle ABD = \angle DFG$: dus $\angle DFG = \angle$.

I. GEVOLG.

De lynen, welke uit de drie hoeken van eenen driehoek op de tegenoverstaande zyden loodrecht getrokken worden, snyden elkander in één stip.

II. GEVOLG.

Indien de driehoek rechthoekig is, is het stip de rechte hoek zelf.

III. GEVOLG.

Indien de driehoek gelykzydig is, hebben dit Voorstel, en het voorgaande te gelyk plaats: vermits als dan de loodlynen juist die lynen zyn, die de zyden in twee gelyke deelen snyden.

XII.

XII. VOORSTEL. Fig. 56.

Indien men uit den rechten hoek (C) van eenen rechthoekigen driehoek (ABC) eene loodlyn (CD) op de schuinsche zyde (AB) laat vallen, zal deeze den geheelen driehoek in twee driehoeken (ACD, DBD) verdeelen, die onderling, en met den geheelen driehoek gelykvormig zyn.

EUCL. VI. 8. — S. p. 255, pr. 8.

BEWYS. Uit het 3. Gev. van het VII. Voorstel van het I B., en 1 Gevolg van het II Voorstel van dit Boek.

I. GEVOLG.

De loodlyn (CD) die op de grondlyn valt is midden-evenreedig tusschen de stukken van de grondlyn: dat is

$$AD : DC = DC : DB.$$

I. AANMERKING. Indien men het VIII. Voorstel van het II. Boek, op het 5 Gevolg van het VII. Voorstel van dit Boek toepast, zal men zien dat het gemelde VIII. Voorstel met dit Gevolg overeenkomt, hoewel uit andere gronden afgeleid.

II. GEVOLG.

Ieder der rechthoekzyden (BC of AC) is midden-evenreedig tusschen de schuinsche zyde (AB) en het aangrenzend stuk (BD of AD) van dezelve, dat is

$$AB : AC = AC : AD.$$
$$AB : BC = BC : BD.$$

II. AANMERKING. Dit komt overeen met het 2 Gevolg van het VIII. Voorstel van het II. Boek, zo men het 5 Gevolg van het VII. Voorstel van dit Boek daar op toepast.

III AANMERKING. Uit het vorige Gevolg wordt het Voorstel van PYTHAGORAS (II, 7.) zeer gemaklyk afgeleid, door het 5 Gevolg van ons VII Voorstel van dit Boek, en het 4 Gev. van het I Voorstel van het II. Boek.

III. GEVOLG.

Uit het 1 en 2 *Gevolg*, gepaard met het 5 Gevolg van het VII. *Voorstel is*,

□ op DC = Rechth. uit AD, DB en
□ op CB = Rechth. uit AB, DB;
gevolglyk
□ op DC : □ op CB = AD : AB.

Dit is in het XIII. B. van EUCLIDES het *Lemma* na de 13 Propositie.

IV. AANMERKING. En dus zyn DC en CB in onder-verdubbelde reeden van AD en AB, het geen men dus uitdrukt:

DC : CB = √AD : √AB;

de ouden zouden dit dus uitdrukken: dat de magten van de lynen DC en CB tot elkander staan als de lynen op AD en AB.

IV. GEVOLG. Fig. 156.

Indien men de loodlyn CD verlengt, tot dat de zelve de lyn AF, uit A loodrecht op CA getrokken in F ontmoet, zullen AD en CD midden-evenreedigen zyn, tusschen DF en DB:

want DF : AD = AD : DC
en AD : DC = DC : BD: dus
∺ DF, AD, DC, BD.

V. AANMERKING. Indien 'er dan een middel was, om, wanneer DF en DB rechthoekig op elkander geplaatst zyn, de lynen AF, AC, CB zodanig te trekken, dat AF en AC om A in de verlenging van de lyn BD, en AC en BC om C in de verlenging van DC rechte hoeken zouden maaken, zoude het beroemd vraagstuk om *twee midden-evenreedigen* tusschen twee gegeeven lynen te vinden, geometrisch opgelost zyn: doch dit is onmogelyk. PLATO heeft echter een middel uitgedacht, om zulks door twee winkel-haaken werktuiglyk te doen: en dit middel is

slechts

flechts eene toepassing van dit gevolg: zie onze II Aanmerking op het XX. Werkstuk van het I. Boek.

V. GEVOLG.

Indien men uit B, BI loodrecht op AB stelt, en uit I, IL loodrecht op ACI, zullen AB, AI, twee midden-evenreedigen zyn tusschen AC en AL: want uit het tweede Gevolg is

AC : AB = AB : AI

AB : AI = AI : AL

en dus ∺ AC, AB, AI, AL.

VI. AANMERKING. Hier op steunt een instrument door CARTESIUS uitgedacht, om twee of meerder midden-evenreedigen tusschen twee gegeeven lynen te trekken: ik zeg twee *of meerder*: want men kan met het trekken van loodlynen op AL, en AI, op de zelfde wyze voortgaan zo ver men wil, en 'er zullen altoos gelykvormige driehoeken ontstaan.

XIII. VOORSTEL. Fig. 70.

Gelykvormige driehoeken staan tot elkander in de zelfde reeden als de vierkanten hunner eveneensstaande zyden: of, in andere woorden, zy zyn in verdubbelde reeden hunner eveneensstaande zyden.

EUCL. VI. 19. — S. p. 260. pr. 14.

BEREIDING. Men stelle dat BG en EH de hoogte der driehoeken ABC en DEF zyn.

BEWYS. Uit het VII. Voorstel, en het 2 Gevolg van het II: of zonder bereiding, uit het 2 Gevolg van het VII. Voorstel, het II. Voorstel van dit B., en het 2 Gevolg van het XI. Voorstel van het III. Boek.

AANMERKING. Fig. 25. Wy hebben in het III. Boek, Aanm. op de 17 Bep. gezegd, dat die uitdrukking *verdubbelde reede* in den eersten opslag by EUCLIDES eene andere beteekenis schynt te hebben dan by ons: en wy hebben (Aanm. op III, 14.) getoond, hoe beide die betee-

kenisfen echter in de daad overéénkomen. Volgens de betekenis door EUCLIDES aan het woord *verdubbelde reden* gegeeven, moet men bewyzen, dat indien BH, derde evenreedige is aan BA, en DE, men hebben zal △BAC: △DEF = AB : BH: en dat bewys gaat aldus voort:

BC : BA = FE : DE,
dus BC : FE = BA : DE
maar BA : DE = DE : BH
dus BC : FE = DE : BH:

waarom, uit het 4 Gevolg van het VII. Voorftel

△BHC = △DEF:
doch △BCA : △BHC = AB : BH (IV, 6)
dus △BCA : △DEF = AB : BH.

II. AFDEELING.

OVER DE GELYKVORMIGE VEELHOEKEN.

XIV. VOORSTEL. Fig. 71.

Indien veelhoeken (M en N) die uit een gelyk getal zyden beftaan, door diagonaalen, (AC, AD : FH, FI) uit eenen der hoeken, (A en F) naar de andere hoeken getrokken, in driehoeken (BAC, CAD, DAE en GFH, HFI, IFK) gedeeld wor-

AANMERKING. Dit moest beweezen worden om aan te toonen, dat 'er gelykvormige veelhoeken zyn kunnen; en hoe men dezelven befchryven kan. Zię het 29 Werkftuk van het III. Boek.

GEVOLG.

Wanneer twee driehoeken gelykvormig zyn, zullen de parallelogrammen welke voor diagonaalen eene der zyden van die driehoeken hebben, en dus het dubbeld van die driehoeken zyn, ook gelykvormig zyn: en dus heeft al wat van de gelykvormige of gelykhoekige driehoeken beweezen is, ook voor de gelykvormige parallelogrammen plaats.

XV. VOORSTEL. Fig. 71.

Gelykvormige veelhoeken (M en N) worden door diagonaalen, als deeze op eene gelykvormige wyze getrokken zyn, in gelykvormige driehoeken gedeeld: en de inhouden dier veelhoeken zyn tot elkander als vierkanten op hunne eveneensftaande zyden, of in de verdubbelde reeden van die zyden.

EUCL. VI, 20. — S. p. 264. pr. *16.*

BEWYS. VOOR HET I. Uit het IV. Voorftel.

VOOR HET II. Uit de befchouwing dat de veelhoeken tot elkander ftaan als de fommen hunner driehoeken: dat deeze driehoeken tot elkander ftaan als de vierkanten hun eveneensftaande zyden: en dus als die der eveneensftaande zyden van de veelhoeken: waar uit het Voorftel volgt door het XII. Voorftel van het III. Boek.

AANMERKING. Men kan thans het 30, 31, 32, 33, 34 Werkftuk van het III. Boek oplosfen.

I. GEVOLG.

Zo vier lynen evenreedig zyn, ftaan de vierkanten op dezelve befchreeven in verdubbelde reeden dier lynen: en gevolglyk komt het geometrisch vierkant overeen met de ver-

 dub.

dubbele reeden: en men kan de *arithmetische quadraaten*, of *tweede magten* der getalen, welke de lengte van eenige lynen uitdrukken, in plaats der geometrische vierkanten gebruiken. Zie III. Boek XVII Bepaaling: en hier boven VII. Voorstel, het 8 Gevolg N°. 1. en N°. 3.

KOENIG op EUCL. VI, 20.

II. GEVOLG.

Uit dit Voorstel, op parallelogrammen toegepast, en vergeleeken met de IX. Aanmerking op het VII. Voorstel, blykt, in welken zin EUCLIDES gezegd heeft, in de XVIII. propositie van zyn VIII Boek, dat „ gelykvormige vlakke getalen tot elkander staan in verdubbelde reeden van de „ eveneensstaande zyden, en (pr. XXVI.) dat zy tot elkander staan als een quadraat-getal tot een quadraat-getal."

III. GEVOLG.

Zo drie lynen geduurig evenreedig zyn, staat de Figuur op de eerste tot de gelykvormige Figuur op de tweede, zo als de eerste lyn tot de derde lyn, (XIV. Voorstel van het III. Boek.)

TACQUET op EUCLIDES VI, 20 Cor. 2.

XVI. VOORSTEL.

Zo vier lynen evenreedig zyn, zullen de gelykvormige en eveneens geplaatste figuuren op de eerste en tweede lyn, in de zelfde reeden zyn als de gelykvormige en eveneens geplaatste figuuren op de derde en vierde: — en omgekeerd: — Zo twee gelykvormige figuuren in dezelfde reden zyn als twee andere gelykvormige figuuren, zullen de eveneens geplaatste lynen op welke deeze figuuren gesteld zyn, evenreedig zyn.

EUCL. VI, 22. — St. p. 266. pr. 18.

I. BEWYS. Volgens EUCLIDES: A, B, C, D, zyn de vier lynen.

VOOR

VOOR HET I. GEDEELTE. BEREIDING. Stel b derde evenreedige aan A en B: en d derde evenreedige aan C en D.

BEWYS.
$$\left.\begin{array}{l} A : B = B : b \\ C : D = D : d \end{array}\right\} \text{Bereiding.}$$
$$A : B = C : D$$
$$\text{dus } B : b = D : d$$
$$\text{en } A : C = b : d$$
$$\text{of } A : b = C : d$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Maar Fig. op A : Fig. op B} = A : b \\ \text{Fig. op C : Fig. op D} = C : d \end{array}\right\} \text{XV. Voorst. Gev. 3.}$$
$$\text{dus Fig. op A : Fig. op B} = \text{Fig. op C : Fig. op D.}$$

VOOR HET II. BEREIDING. Stel A : B = C : d.

BEWYS. □ op A : □ op B = □ op C : □ op d: door het I
en □ op A : □ op B = □ op C : □ op D XV. Voorst.
dus □ op d = □ op D en d = D.
dus A : B = C : D.

AANMERKING. Dit Bewys van EUCLIDES, dat wy voor het tweede gedeelte wat eenvoudiger voorgesteld hebben, is zeer fraai, en ten vollen geometrisch.

II. BEWYS. VOOR HET I. Uit het XV Voorstel, deszelfs 1 Gevolg, en het 1 Gev. van het X. Voorstel van het III. B.

VOOR HET II. Uit het 1 Gevolg van het X. Voorstel van het III. Boek: 1. Gevolg van het XV, van dit Boek.

XVII. VOORSTEL. Fig. 73.

Alle regelmaatige veelhoeken, die uit een evengroot getal zyden bestaan, zyn gelykvormig aan elkander; en hunne inhouden zyn als de vierkanten der eveneensstaande zyden, of der straalen, of der loodlynen, of in verdubbelde reeden dier zyden, straalen of loodlynen.

BEWYS. VOOR HET I. Uit het XIV. Voorstel; en den aart der gelykvormige veelhoeken.

VOOR HET II. Uit het XV en XIII. Voorstel.

GEVOLG. Fig. 144, 145, 147.

Dus zyn de veelhoeken waar van wy in het XV, en XVI. Voorstel van het II Boek gewag gemaakt hebben, gelykvormig aan de veelhoeken in welke zy staan: en in het geval van het XVIII. Voorstel, (Fig 147) zal de veelhoek EFGIL, in omtrek en in inhoud de kleinste zyn die hy zyn kan, wanneer de stippen E, F, G, I, L, op het midden der zyden AD, DC, CB, BO, OA staan: want dan is de straal OE loodrecht op AD, en dus de kortste lyn.

XVIII. VOORSTEL. Fig. 73.

De omtrekken der regelmatige veelhoeken, die uit een gelyk getal zyden bestaan, maar op ongelyke lynen beschreeven zyn, staan tot elkander zo als hunne straalen, of loodlynen.

BEWYS. Uit den aart der veelhoeken; namelyk uit het Gevolg van de 6 Bepaling van het II Boek, en II Voorstel van dit Boek.

GEVOLG.

In alle regelmaatige veelhoeken, die uit het zelfde getal zyden bestaan, is de reeden van den omtrek tot de loodlyn, of tot den straal bestendig de zelfde.

XIX. VOORSTEL.

Verschillende regelmatige veelhoeken staan tot elkander in samengestelde reeden hunner omtrekken en loodlynen.

BEWYS. Uit het XVII Voorstel van het II B. en uit het VII. Voorstel van dit Boek.

I. GEVOLG.

Dus, indien de omtrekken gelyk zyn, zyn de inhouden zo als de loodlynen: en indien de inhouden gelyk zyn, staan de omtrekken in omgekeerde reeden der loodlynen, (III. Axioma IV: en III, 5)

II. GEVOLG.

Indien dus een gelykzydige driehoek, een vierkant, en een re-

regelmatige zeshoek denzelfden omtrek hebben, is de inhoud van den zeshoek grooter dan die van het vierkant, en die van het vierkant grooter dan die van den driehoek.

BEWYS. Fig. 144. De loodlyn CX in den zeshoek PQRSTU $= \sqrt{CR^2 - RX^2} = \sqrt{RS^2 - \frac{1}{4}RS^2} =$

$\sqrt{\frac{3}{4}RS^2} = RS\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{O}{6} \times \sqrt{\frac{3}{4}} = O \times \sqrt{\frac{3}{4 \times 36}} =$

$O \times \sqrt{\frac{1}{48}}$, indien O den omtrek aanduidt.

De loodlyn in het vierkant is de helft van de zyde, dus hier $\frac{O}{8} = O \sqrt{\frac{1}{64}}$ dus kleiner dan voor den zeshoek.

In den gelykzydigen driehoek DAF, is de loodlyn $CX = \frac{1}{3} AX$ (XI. Voorstel, 3 Gev.) $= \frac{1}{3} \sqrt{AF^2 - FX^2} =$

$\frac{1}{3} \sqrt{AF^2 - \frac{1}{4} AF} = \frac{1}{3} AF \sqrt{\frac{3}{4}} = AF \sqrt{\frac{3}{9 \times 4}} =$

$AF \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{3} O \sqrt{\frac{1}{12}} = O \sqrt{\frac{1}{9 \times 12}} = O \sqrt{\frac{1}{108}}$,

dus kleiner dan voor het vierkant.

III. GEVOLG.

En dus indien de inhouden van eenen regelmatigen zeshoek, een vierkant, en eenen gelykzydigen driehoek gelyk zyn, heeft de zeshoek eenen kleineren omtrek dan het vierkant; het vierkant, dan de driehoek.

AANMERKING. De Byen, die aan haare celletjes eene zeskantige gedaante geeven, gebruiken dus van die figuuren, in welke geen tusschenruimte verlooren wordt, die, welke den grootsten inhoud onder den zelfden omtrek bezit, of die den zelfden inhoud met den kleinsten omtrek, en dus met de geringste hoeveelheid stoffe, daar stelt.

Zie LA CHAPELLE *Institutens de Geometrie* T. II p. 217—233.

XX.

XX. VOORSTEL. Fig. 72.

In alle rechthoekige driehoeken is de figuur op de schuinsche zyde gelyk aan de som der beide gelykvormige figuuren die op de rechthoekzyden staan.

EUCL. VI. 31. —— S. p. 280. pr. 30. en Gev.

BEWYS. Uit het XV. Voorstel III, 8: het XV. Voorstel: III, 11: II, 7: en III, 9:

I. AANMERKING. Het Voorstel van PYTHAGORAS (II. Boek VII. Voorstel) is slechts een byzonder geval van dit Voorstel: ook hangen zy beiden van eene meer algemeene eigenschap der driehoeken af, zo als wy dit reeds in de Aanmerking op het VII. Voorstel van het II. Boek gezegd hebben.

I. AANMERKING. Men kan thans het 35 Werkstuk van het II. Boek oplossen.

XXI. VOORSTEL. Fig. 154.

Indien men in eenen regelmatigen vyfhoek, uit de twee einden (H, K) van eene der zyden (KH), rechte lynen (HC, KE) naar het eind der aangrenzende zyden (KC, HE) trekt: zullen 1°. deeze den veelhoek verdeelen in eene ruit (CBEx), in twee gelykbeenige driehoeken (KxC, HxE) wier beenen gelyk zyn aan de zyden van den vyfhoek, en in eenen derden gelykbeenigen driehoek (KxH) wiens grondlyn de gebruikte zyde des vyfhoeks is: verder 2°. zullen de twee gemelde lynen (HC, KE) elkander in uiterste en middelste reeden snyden, en haar grootste stuk is gelyk aan de zyde van den vyfhoek. 3°. indien men uit iederen hoek lynen naar alle de overige hoeken trekt, zal ieder dier diagonalen zodanig door twee anderen gesneeden worden, dat het grootste stuk door de eerste deezer afgesneeden, weder door de tweede in uiterste en middelste reeden gesneeden wordt, zullende het kleinste stuk het middelstuk der twee snydingen zyn; en 4°. zullen deeze lynen door haare ontmoeting binnen den vyfhoek, en om het zelfde middel-

punt

punt eenen nieuwen vyfhoek maaken, die dan den gegeevenen gelykvormig, doch ten zynen opzichte omgekeerd geplaatst is, en wiens zyde tot die van den gegeeven veelhoek ſtaat, zo als het kleinſte ſtuk van de geſneeden geheele lyn tot die geheele lyn.

EUCL. XIII. 8. voor het tweede gedeelte.

BEWYS. VOOR HET I.

$\angle KHE = \frac{6R}{5}$ (II, 11. het 1 Gev)

dus $\angle KHC = \frac{2}{5}$ R: dus $\angle CHE = \frac{4}{5}$ R:

en $\angle CHE + \angle BEH = \frac{10R}{5} = 2$ R:

gevolglyk (I, 4.) CH ‖ BE.

op de zelfde wyze KE ‖ CB:

dus is CBEx eene ruit (I. bep. 13) en de zyden CB, BE, Ex, xC, zyn gelyk aan elkander:

dus zyn de △△ CxK, en ExH gelykbeenig en onderling gelyk: dus ook Kx = Hx: en dus is ook △HxK gelykbeenig.

VOOR HET II. In de △△ KxH en KEH is de $\angle HKE$ gemeen: $\angle KHx = \angle KEH$: $\angle KxH = \angle KHE$: en dus (II. Voorſt.) KE : EH = KH : Hx of

KE : Ex = Ex : Kx: en insgelyks

HC : xC = xC : Hx.

Dus ſnyden de lynen HC en EK elkander in uiterſte en middelſte reeden. (2. bepaling.)

VOOR HET III.

HC : xC = xC : Hx dus (III. 8.)

HC − xC : xC = xC − Hx : Hx

of

Hx : xC = xC − yC : Hx

of

Hx : xC = xy : Hx

dus

dus

$$Hx ; xy = xC : Hx = HC : xC$$

of

HC : xC = xC : Hx of Cy en dus, daar HC in uiterste en middelste reeden gesneeden is in x, is xC het ook in y. (IV, 7: de 8 Aanm.).

VOOR HET IV. Dat de vyfhoek ONvxy regelmatig is, blykt uit de gelykheid der driehoeken OBN, NEv, vHx, xKy, yCo, en dus is dezelve aan den gegeeven veelhoek gelykvormig. (XVI. Voorstel.)

Dat het middelpunt het zelfde is voor beiden blykt hier uit, dat de lynen die uit B en C loodrecht op HK en EH zouden getrokken worden, door het middelpunt van den gegeeven veelhoek gaan: en dat dezelven ook loodrecht op ON, yO, en door x en v gaan zouden, en dus door het middelpunt van den nieuwen veelhoek.

Verder: △OBN ∽ △KBH: dus

$$ON : KH = OB : BH.$$

I. AANMERKING. Alle de eigenschappen in dit Voorstel vermeld, zyn den vyfhoek *alléén* eigen, uitgezonderd deeze, dat de diagonaalen door haar onderlinge ontmoeting eenen nieuwen gelykvormigen veelhoek zullen maaken; dit is aan alle de regelmatige veelhoeken, van den vyfhoek te beginnen, eigen, doch met eenige byzonderheden, waarvan wy in het XXVIII Voorstel van het VI. Boek, handelen zullen.

II. AANMERKING. Indien men wederom den nieuwen vyfhoek op de zelfde wyze verdeeld, zal 'er een nieuwe vyfhoek ontstaan, op wien alle de gemelde eigenschappen toepaslyk zyn.

VYF-

VYFDE BOEK,

OVER DEN CIRKEL.

BEPAALINGEN.

I. Fig. 33.

Men noemt *Choorde*, *Spanlyn*, of *Pees* van een' cirkelboog eene lyn (BE, BD, AF) die, in den Cirkel getrokken, den omtrek wederzyds raakt, en dus eenigen boog (by voorb. BDE) bespant. Indien eene dergelyke choorde door het middelpunt gaat, draagt zy den naam van *middellyn*, of *diameter*, bespant wederzyds den halven cirkel; en deelt dus den cirkel in twee gelyke deelen.

EUCL. I. d. 17. — W. g. §. 14. — St. p. 89. d. 1.

I. GEVOLG.

Eene *Choorde*, *Span-lyn*, of *Pees* bespant altoos, of wederzyds den halven cirkel, zo zy door het middelpunt gaat, en dus middellyn is; of aan den eenen kant eenen boog (BDE) die kleiner, en aan den anderen kant eenen boog BAIFE die grooter is dan de halve cirkel: zo dat de beide boogen te samen den geheelen omtrek uitmaaken.

II. GEVOLG. Fig. 43.

Indien eene choorde (AE) door het middelpunt gaat, en gevolglyk middellyn is, of den halven cirkel (ADE) bespant, kan men uit eenig stip (D) van dien halven omtrek naar de uiteinden (E en A) van de middellyn choorden trekken (DE, DA) die ieder eenen boog (DE, DA) zullen bespannen; en daar deeze boogen altoos te saamen eenen halven omtrek uitmaa-

 ken,

ken, noemt men den eenen het *ſupplement* van den anderen, dat is, het *aanvulſel* om den halven cirkel uit te maaken: dus is de boog D E het *ſupplement* van den boog D A, en omgekeerd: waar van in het VIII Boek nader.

II. Fig. 33.

Men noemt *Cirkelſtuk* of *Segment* (B D E) een gedeelte van den cirkel binnen den omtrek van een' boog (B D E) en de choorde (B E), die denzelven beſpant, begreepen.

EUCL. I. d. 18, 19: — S. p. 103. d. 5. p. 104. d. 8.

III.

Men zegt dat een *hoek in een Cirkelſtuk* (B D E) geplaatst is, als zyn top (D) in den boog is, en zyne beenen (D B, D E) tot de uiterſten *(B, E)* van de choorde die het ſtuk beperkt, komen.

EUCL. III. d. 7. — S. p. 103. d. *6, 7.*

IV.

Een hoek wordt gezegd op eenen boog te ſtaan, wanneer zyne beenen tot de uiteinden van dien boog raaken: en hy wordt een *hoek in het middelpunt* of in *den omtrek* genoemd naar maate de top C of D van

[redacted]

Die boog EAF is dan kleiner, even groot, of grooter dan de halve omtrek, naar maate het cirkelstuk daar de hoek in staat grooter, even groot, of kleiner is dan de halve cirkel.

V. Fig. 33.

Men noemt *sector* een stuk dat tusschen twee straalen (*radii*) BC, CE, en eenen boog (BDE), tot wiens uitersten de straalen komen, begreepen is.

EUCL. III. d. 9. — St. p. 104. d. 9.

AANMERKING. Er is dus dit verschil tusschen een *segment* of *cirkelstuk*, en eenen *sector*, dat het *segment* door eenen boog en eene lyn, de choorde namelyk, doch de *sector* door eenen boog en twee lynen, maar die door het middelpunt gaan, gevormd wordt. Gevolglyk behoort de halve cirkel te gelyk tot de segmenten en de sectoren.

VI.

Men noemt *raaklyn* of *tangent* van den cirkel, eene lyn (HFK) dien den cirkel raakt, doch, verlengd zynde, niet snydt.

EUCL. III. d. 1. — St. p. 101. d. 4.

AANMERKING. Zoude 'er uit deeze bepaaling niet rechtstreeks volgen, dat eene raaklyn den cirkel maar in één stip raakt? doch 'et moet beweezen worden, dat 'er lynen kunnen zyn, die den cirkel in één stip raaken, en denzelven, hoe zy ook verlengd worden, niet snyden: het geen wy in ons VII. Voorstel doen zullen.

VII. Fig. 34.

Men zegt dat twee cirkels elkander raaken, wanneer zy elkander raakende zich niet snyden. De aanraaking geschied of *uiterlyk*, zo de eene geheel buiten den anderen valt, of *innerlyk*, zo de eene geheel binnen den anderen valt.

EUCL. III. d. 3. — S. p. 89. d. 2.

AXIOMATA

OF

ALGEMEENE KUNDIGHEDEN.

I.

Cirkels, die met gelyke ſtraalen getrokken zyn, zyn gelyk.

EUCL. III. Ax. 1.

II.

De middellyn is het dubbeld van den ſtraal of *radius*.

III.

Indien uit het middelpunt naar eenig ſtip eene rechte lyn getrokken wordt die korter is dan de *radius* of ſtraal, valt dat ſtip binnen den cirkel, zo als ook de geheele lyn: byv. CF fig. 34.

I. AFDEELING,

OVER DE LYNEN DIE IN OF TOT DEN CIRKEL GETROKKEN WORDEN.

I. VOORSTEL. Fig. 35.

Indien men in den omtrek van den cirkel twee ſtippen neemt (A, B), en dezelven door eene rechte lyn (AB) vereenigt, zal die lyn geheel binnen den cirkel vallen.

EUCL. III, 2.

BEREIDING. Trek op die lyn uit het middelpunt eenige lyn CD.

BEWYS.

BEWYS. Uit het 2 ged. van het XVI, uit het XI. en het XIV. Voorstel van het I. B. en het III. *Axioma* van dit Boek.

II. VOORSTEL. Fig. 77.

Wanneer drie stippen (A, B, D) niet in ééne rechte lyn zyn, staan dezelven altoos in den omtrek van eenen cirkel: of, in andere woorden, men kan altoos eenen cirkel trekken wiens omtrek door die stippen gaan zal.

BEREIDING. Trek BD, BA, AD: stel dat BD, en AD in twee gelyke deelen gedeeld zyn in K en L: en dat KC, en LC die loodrecht op BD en AD staan, elkander in C ontmoeten: trek CB, CD, CA: men moet bewyzen, dat CB, CD, CA onderling gelyk, en dus straalen zyn van eenen cirkel, wiens middelpunt C is.

BEWYS. Dat CB = CD en CD = CA is, volgt uit het VIII. Voorstel van het I. Boek.

GEVOLG.

De voorgaande bereiding en het bewys leveren deeze eigenschap der driehoeken op:

De loodlynen, welke uit het midden der zyden van eenen driehoek op dezelven getrokken kunnen worden, komen allen in één stip, het zy binnen het zy buiten den driehoek, te te samen; en de lynen, uit het zelve naar de hoeken van den driehoek getogen, zyn gelyk.

Hier uit volgt wederom, dat, zo de driehoek gelykzydig is, die loodlynen door de toppen van de overstaande hoeken zullen gaan, en die hoeken in twee gelyke deelen snyden (I 11, het 4 Gev.) en daardoor wordt het stip van snyding of vereéniging in dat geval het *middelpunt* van den driehoek geoemd, en het staat van den top af op twee derde gedeelten van ieder loodlyn. Zie IV, 11. het 3 Gevolg, en IV, 10.

AANMERKING. Men zie in het X Werkstuk van het IV Boek de manier om eenen cirkel door drie gegeeven stippen te trekken.

III. VOORSTEL. Fig. 41.

Een hoek (GEF) in het middelpunt is dubbeld van den hoek (GIF) in den omtrek, die op den zelfden boog (GF) ftaat.

EUCLIDES III. 20. — W. §. 112, 113. — S p. 104 pr. 10.

BEREIDING. Men trekt uit den top I, de middellyn IEL.

BEWYS. Uit I, 11 en 7, op den driehoek IEG en dan wederom op den driehoek IEF toegepast. Men neemt vervolgens de fom of het verfchil der hoeken LEF en LEG, LIF en LIG naar maate de lyn IL binnen of buiten den hoek FEG valt.

I. GEVOLG.

De fom of het verfchil van twee hoeken in den omtrek is de helft van de fom of het verfchil van twee hoeken in het middelpunt, die op de zelfde bogen rusten.

II GEVOLG. Fig. 89.

De fom der hoeken (EAF en EBF,) die, in den omtrek, op bogen rusten welke te famen den geheelen omtrek uitmaaken, zyn gelyk aan twee rechte hoeken: en de fom der hoeken, welke op bogen rusten die te famen den halven omtrek uitmaaken, zyn gelyk aan éénen rechten hoek; en omgekeerd.

[redacted]

BCA) het zy allen in den omtrek, op gelyke bogen DHB, BIA): en omgekeerd.

EUCL. III. 26. 27 —— W. §. 114.

BEREIDING. Men trekt de choorden DB, BA.

BEWYS. VOOR HET I. Uit het VIII Voorstel van het I Boek volgt BD = BA: en dus, vermits A op D valt, indien B op B en AB langs BD geplaatst wordt, zullen ook, weegens de gelykheid der straalen, de bogen DHB en BIA op elkander vallen en gelyk zyn.

VOOR HET II. Uit het ongerymde, door het I.

I. GEVOLG.

Een hoek, of in den omtrek, of in het middelpunt, die op een' dubbelen, driedubbelen boog enz. staat, is dubbeld, driedubbeld enz. van den hoek die in den zelfden of in eenen gelyken cirkel, het zy in den omtrek, het zy in het middelpunt op den enkelen boog staat; en omgekeerd.

II. GEVOLG.

In den zelfden cirkel staat de grootste hoek, het zy in het middelpunt, het zy in den omtrek, op den grootsten boog.

III. GEVOLG.

De hoek, die in het middelpunt recht is, rust op eenen boog die het vierde gedeelte is van den omtrek des cirkels.

IV. GEVOLG.

De bogen, die tusschen evenwydige choorden begreepen zyn, zyn gelyk en omgekeerd: (uit I, 4: en dit voorstel.)

V. GEVOLG.

Uit het bewys van ons voorstel blykt, dat, wanneer

neer in éénen en den zelfden cirkel twee choorden gelyk zyn, de bogen welke zy bespannen ook gelyk zyn: en het omgekeerde volgt even gemaklyk.

EUCL. III. 28, 29: — S. p. 10. pr. 16. — W. § 122.

I. AANMERKING. Op dit Gevolg rust het bewys der oplossing van het VIII Werkstuk in het IV Boek, en op het III Gevolg die van het VIII en IX.

VI. GEVOLG.

Ook volgt hieruit, dat de choorde van een grooter boog grooter is dan die van een kleiner boog.

II. AANMERKING. Men kan het IX Werkstuk van het III. Boek oplossen.

V. VOORSTEL. Fig. 42.

Een hoek (ABD) in den halven cirkel geplaatst is recht: een hoek (AGB) die in een kleiner cirkelstuk staat is grooter dan recht: een hoek (BAD) die in een grooter cirkelstuk staat is kleiner dan recht.

EUCL. III. 31. — W. g. § 115. 116 — S. p. 112. pr. 18.

BEREIDING VOOR HET I. Zy FCE een middellyn loodrecht op de middellyn AD: trek AF, FD: VOOR HET II, trek GD.

BEWYS. Men bewyst 1° uit I, 11, dat de ∠∠ AFC en CFD ieder half recht zyn: en dus uit het 3 Gev. van het III Voorstel dat ∠ABD = ∠AFD = L is.

2° Om dat ∠AGB > ∠AGD, en alle hoeken die op AEB rusten gelyk zyn aan ∠AGB:

3° Om dat ∠BAD < ∠ABD: en alle hoeken, zo als BGD, die op BD rusten gelyk zyn aan ∠BAD.

I. AANMERKING. Het blykt uit het gevolg van de IV bepaaling, dat men dit voorstel aldus zoude kunnen uitdrukken.

„ Een hoek in den omtrek is recht, of kleiner, of grooter dan recht, naar maate hy staat op den halven omtrek, of op eenen boog die kleiner, of op eenen boog die grooter dan de halve omtrek is.

II. AANMERKING. Het bewys van het eerste lid wordt gemaklyker, met de middellyn AD te beschouwen als bespannende den halven omtrek, en dus de som der bogen AE en ED, of hier het dubbeld van den boog AE, en dus met den hoek ACF, die recht is, te beschouwen als de helft van den hoek die de lynen AC en CD maaken: waar uit door het III Voorstel L ABD = L ACE = L

III. AANMERKING. Door het I gedeelte bewerkt men de 2 oplossing van het 4. werkstuk in het I Boek. Men kan thans ook oplossen: het 5, 6, 8, 26, 27 Werkstuk van het III Boek: het 1 (2 oplossing) van het IV Boek: die alle vooronderstellen dat men weet dat de hoek in den halven cirkel recht is.

I. GEVOLG. Fig. 157.

Indien men van de uiteinden A, en B van de middellyn naar twee of meerder stippen (D en E) in den omtrek lynen (AD en DB, AE en EB) trekt, zullen de sommen der vierkanten op de lynen naar het zelfde stip getogen altoos onderling gelyk zyn (II, 7) naamelyk

□ op AD + □ op DB = □ op AE + □ op EB:

en het zelfde heeft plaats al worden de lynen niet van de uiteinden der middellyn, maar uit twee stippen (I, K) op dezelve op gelyke afstanden van het middelpunt getrokken (II, 9, het 2de gevolg en de gelykheid der straalen;) dat is

□ op ID + □ op KD = □ op IE + □ op KE

SIMPSON *Elem. of Geom.* III. B. pr. 20.

II. GEVOLG. Fig. 157.

Daar alle de driehoeken in den halven cirkel rechthoekig zyn, volgt het dat in dezelven al wat wy in het VIII Voorstel van het II Boek en deszelfs gevolgen, zo als ook in het XII Voorstel van het IV Boek en deszelfs gevolgen gezegd hebben, insglyks plaats heeft: en dus indien DO en EP loodrecht zyn op de middellyn is

□ op AD = rechth. uit AB en AO

□ op AE = rechth. uit AB en AP

 dus

dus (III *Axioma* I en IV.)

□ op AD: □ op AE = AQ: AP, dat is de vierkanten der choorden zyn in de zelfde reeden als de stukken van de middellyn uit wier uiteinden zy getrokken worden.

VIVIANI, *Divinatio de locis solidis* pr. 9.

VI. VOORSTEL. Fig. 37.

Indien eene middellyn (BK) eene choorde (LH) in twee gelyke deelen snydt, snydt zy dezelve loodrecht; en omgekeerd: zo eene middellyn loodrecht op eene choorde staat, snydt zy dezelve en den bespanden boog in twee gelyke deelen. Doch twee choorden (BF, AE) kunnen elkander nimmer zodanig snyden, dat zy daar door beiden in twee gelyke deelen verdeeld zyn.

EUCL. III. 3, 4: — W. §. 125 — St. p. 91. pr. I p. 92, 2 Gevolg.

BEREIDING VOOR HET I. GEDEELTE: trek LC, BC; — VOOR HET II. trek CG.

BEWYS VOOR HET I. uit I, 11 en 8. of uit I, 10 —— *Voor het omgekeerde* uit I, 11 en 8 of uit I, 11 het 6 Gevolg.

VOOR HET II GEDEELTE uit de ongerymdheid daar men in vervalt met het tegendeel te stellen: want dan moest door het eerste gedeelte zo wel ∠ AGC als ∠ BGC recht zyn, dat onmogelyk is.

GEVOLG.

Zo eene choorde op eene andere choorde loodrecht valt, en haar tevens in twee gelyke deelen snydt, gaat zy door het middelpunt, en is eene middellyn.

AANMERKING. Door dit Voorstel lost men het 1, (1 oplossing) het 2 en 10 werkstuk van het IV Boek op.



VII. VOORSTEL. Fig. 38.

Eene rechte lyn BD, die loodrecht staat op het eind

eind van de middellyn, valt geheel buiten den cirkel, en raakt den cirkel in dat eenig ſtip, het uiteinde namelyk (B) van de middellyn; zo dat er uit dat ſtip tusſchen die raaklyn (BD) en den omtrek geen lyn getrokken kan worden die den cirkel niet ſnydt.

EUCL. III. 16: —— S. p. 101. pr. 9.

BEWYS. Voor het I uit het ongerymde. Men trekt namelyk uit het middelpunt de lyn CD tot het ſtip D waar in men ſtelt dat de lyn BD ook den omtrek raakt en dat dus tot den omtrek behoort, zo dat CD een ſtraal zoude zyn: de ongerymdheid volgt uit het XIV Voorſtel van het I Boek.

I. GEVOLG.

Eene lyn, die den cirkel raakt, raakt denzelven in één eenig ſtip.

S. p. 102: het 1 Gev.

I. AANMERKING. Men kan thans het 11, 12, 13, 14, 15 en 16 Werkſtuk van het IV Boek oplosſen.

II. AANMERKING. Fig. 43. De boog HA heeft eene helling op den tangent of op de raaklyn AB, en men kan die helling van HA op AB eenen hoek noemen, waar van het eene been eene rechte lyn, het ander een cirkel boog is: doch de helling van eenen cirkel boog op eene rechte lyn is geheel anders dan die van eene rechte lyn op eene rechte lyn; en dus kunnen die twee hoeken, indien men zich by het eenvoudig en oorſpronkelyk denkbeeld van eene helling houdt, niet met elkander vergeleken worden. Wanneer men zegt dat de hoek tusſchen de boog DHA en de lyn AB kleiner is dan eenige rechtlynige hoek tusſchen BA, en eene tweede lyn uit het ſtip A getrokken, vergelykt men niet de enkele helling doch de ruimte die dergelyke hoeken bevatten: dus is het waar, en klaarblykelyk, dat in Fig. 162 de kromlynige driehoeken GIE, GIL, kleiner zyn dan de rechtlynige GIE, GIL: doch wy hebben reeds te voren gezegd

zegd dat het denkbeeld van ruimte tot dat van eenen hoek niet behoort: 2de Aanm. op de 6 Bepaaling van het eerste Boek. Men heeft zeer veel over den aart van dien hoek door eene rechte lyn met eenen cirkel-boog gevormd, getwist: waar over men kan nazien CLAVIUS en TACQUET op EUCLIDES III, 16 en WALLIS *Opera Mathematica*, T. II. p 605.

II. AANMERKING. Fig. 158. Het is misschien met niet meerder naauwkeurigheid dat men rechtlynigen hoeken met hoeken uit twee cirkel bogen bestaande vergelykt: men zegt byv. dat indien twee gelyke cirkels B A F D, en B K D E G elkander snyden, en men uit één der snydings stippen B de raaklyn B F aan eenen der cirkels trekt, en dan in denzelven den boog B K D E G gelyk aan den boog B A F dien de gemelde raaklyn van den anderen cirkel afsnydt neemt, en eindelyk de choorde B E trekt, dat dan de kromlynige hoek F A B K D gelyk is aan den rechtlynigen hoek F B G: want zegt men de gemelde kromlynige hoek

F A B K D = F A B + F B K D. Maar

F A B = B K D E G: dus F A B K D = B K D E G + F B K D = ∠ F B G:

doch het blykt, naar ons inzien, duidelyk, dat men dan niet, zo als behoorde, de enkele helling van den omtrek of boog F A B op den boog B K D vergelykt met de helling van de lyn F B op de lyn G B: maar stilzwygend de ruimte door de bogen F A B en B K D bevat met de ruimte tusschende rechte lynen B G, B F en de bogen F D, D E G begreepen. Het is ook wel waar dat indien men uit B de raaklyn B I op den boog B A trekt, de rechtlynige hoek I B F door de twee tangenten gevormd wordt: maar de helling van I B op B F is niet vergelykbaar met die van den boog F A B op den boog B K D.

VIETA Oper. p. 382.

VIII. VOORSTEL. Fig. 38.

Eene lyn (C B) die van het middelpunt (C) naar het stip (B) van aanraking tusschen den cirkel en eene rechte lyn

lyn (B D) getrokken wordt, ſtaat loodrecht op die raaklyn: en omgekeerd; eene lyn in den cirkel, die loodrecht op de raaklyn in het ſtip van aanraking ſtaat, gaat door het middelpunt.

EUCL. III, 16, Cor: en 18, 19: — St. p. 102, 2, en 3. Gevolg.

BEWYS VOOR HET I: door de ongerymdheid waar in men vervalt als men ſtelt dat eenige andere lyn, zo als C D, loodrecht is: die ongerymdheid blykt uit I, 14.

VOOR HET II uit de ongerymdheid daar men in vervalt, indien men ſtelt dat eenige andere lyn B G door het middelpunt G gaat; die ongerymheid blykt uit het eerſte gedeelte.

IX. VOORSTEL. Fig. 43.

De hoek (D A B of D A F) welke de raaklyn (A B of A F) met de choorde (A D) maakt die uit het ſtip van aanraking (A) getrokken wordt, is gelyk aan den hoek (A E D, of A H D) die geplaatst is in het overhandſche cirkelſtuk (D E A of D H A) door die choorde gemaakt.

EUCL. III, 32 —— S. p. 113 pr. 20.

BEREIDING. Zy E C A eene middellyn, dus ⊥ op F A B trek E D en E H.

BEWYS. Uit de beſchouwing dat ∠ E D A recht is (door het V Voorſtel): dus dat ook ∠ D E A, en ∠ E A D te ſamen recht zyn, zo wel als ∠ E A D en ∠ D A B te ſamen.

Voor den hoek F A D, uit de beſchouwing dat ∠ F A D = L + ∠ E A D: dat ∠ E A D = ∠ E H D (door het IV Voorſtel) en ∠ A H D = L + E H D.

AANMERKING Hier op ſteunt de bewerking van het 5 en 6 Werkſtuk van het IV Boek.

X. VOORSTEL. Fig. 29.

Indien men binnen den cirkel een ſtip (A) neemt verſchillend van het middelpunt (C), waaruit men ver-

verscheiden lynen (AB, AG, AD, AH) naar den omtrek trekt, zal het volgende plaats hebben.

1° De grootste van allen is die (AD) welke door het middelpunt gaat.

2° De kleinste is het overige gedeelte (AF) van de middellyn.

3° De lynen (AG, AB, enz.) zullen des te kleiner zyn naar mate zy verder van de middellyn af, of van het middelpunt verwyderd, zyn.

4° Uit het zelfde stip (A) kunnen twee lynen (AG, AE) getrokken worden, en niet meer dan twee; welke gelyk aan elkander zyn: de eene zal aan den eenen de andere aan den anderen kant van de middellyn vallen, en zy zullen met dezelve gelyke hoeken (GAD en DAE) maaken; of even ver van het middelpunt afzyn.

5° Eindelyk, al het zelfde zal gelykelyk plaats hebben, (uitgezonderd N°. 2) indien het stip A op den omtrek zelven valt.

EUCL. III, 7 —— St. p. 93: pr, 3.

VOOR I EN II. BEREIDING: Men trekt de stralen CG, CB, CE, CH:

BEWYS. Uit de XIV bepaling en het XV Voorstel van het I. Boek.

VOOR HET III BEREIDING: Men trekt CL ⊥ op AG en CO op AB:

BEWYS: 1° Voor de △△ ABC, en ACG uit I, 17: en dan 2° uit I, 14 om te toonen dat CN en dus CO > CL.

VOOR HET IV. BEREIDING. Stel GIE ⊥ op AD: trek AE, en dan CM ⊥ op AE:

BEWYS: in △△ GAI en IAE is ∠GAD = ∠DAE: uit het VI voorstel, bereid. en I, 8: en in △△ CAM en CAL is CM = CI. of wel

BEREIDING. Stel ∠DAE = ∠DAG: en CM ⊥ op AE:

BEWYS. 1°. Uit I, 13. AE = AG: en dan uit I, 9 in △△ ACM en ACL, CL = CM.

Dat er geen andere lyn dan AE, getrokken kan worde, die gelyk is aan AG, blykt uit N° 3.

N°. 5. volgt van zelf.

GEVOLG.

Indien 'er uit eenig ftip, binnen den cirkel, tot aan den omtrek meer dan drie lynen getrokken kunnen worden, die gelyk zyn aan elkander, is dat ftip het middelpunt van den cirkel.

EUCL. III, 9. — St. p 95. Cor. 2.

XI. VOORSTEL. Fig. 40.

Indien men uit eenig ftip buiten den cirkel eenige lynen naar den omtrek trekt, zal het volgende plaats hebben:

1°. De langfte van allen, die den cirkel fnyden, en binnen in den omtrek komen, is die (AG) welke door het middelpunt gaat; de overige zullen des te korter zyn, naar maate zy grooter hoeken met de middellyn maaken, of verder van het middelpunt af zyn.

2°. De kortfte van allen die flechts tot aan den omtrek komen, is die (AL) welke, verlengd zynde, door het middelpunt gaat: en de overige zullen des te langer zyn, naar maate zy grooter hoeken met de middellyn maaken, of verder van het middelpunt af zyn.

3°. Men kan, het zy tot binnen, het zy tot buiten den omtrek, flechts twee lynen uit het zelfde ftip, (A) trekken, die aan elkander gelyk zyn, en deeze zullen de eene aan den eenen, de andere aan den anderen kant van het middelpunt vallen, en even ver van het zelve af zyn, of gelyke hoeken met de middellyn maaken.]

EUCL. III, 8: — S. p. 95. pr. 4.

VOOR

VOOR HET I. EN II. BEREIDING. Trek de straalen CK, CE, CP, CH, CD, CF: en CM ⊥ op DA: CQ ⊥ op FA.

BEWYS: Uit de XIV. Bepaaling en het XV Voorstel van het I Boek is AG > FA: uit het XVII. Voorstel van het I. Boek, is FA > DA: uit het XV. is AL < AE: en uit het XVI. AE < AK. Voorts uit het XIV. Voorstel van het zelfde Boek is CM > CQ.

VOOR HET III. BEREIDING. Stel DH ⊥ op AG: trek AH vervolgens CN ⊥ op AH:

BEWYS. In de △△ DAO en OAH, is uit het VI Voorstel, en I, 8. ∠GAD = ∠GAH, en HA = DA: en dan uit I, 9. CN = CM.

Of wel, BEREIDING; Stel AH = AD, trek CH: en dan CN ⊥ op AH.

BEWYS. Uit I, 12. in △△ DCA en HCA is, ∠DAG = GAH, HA = DA: en dus uit I, 9. in △△ CAM en CAN, CN = CM.

I. GEVOLG.

Van alle de choorden die in den cirkel getrokken kunnen worden, is de middellyn de grootste.

EUCL. III, 15. S. p. 100. pr. 8.

I. AANMERKING. Dit kan ook onmiddelyk beweezen worden uit de XIV. bep. en het XV. Voorstel uit het I. Boek.

II. AANMERKING. Men kan thans het 3 en 4 Werkstuk uit het IV Boek oplossen.

II. GEVOLG.

De choorden, die even ver van het middelpunt afstaan, zyn gelyk.

EUCL. III, 14. —— St. p. 99. pr. 7.

III. GEVOLG.

Van alle de lynen die tot den bollen omtrek komen, is de raaklyn de grootste; doch zy is de kleinste van allen, die tot den hollen omtrek komen.

IV

IV. GEVOLG.

Van eenig stip buiten den cirkel kunnen altoos tot denzelven twee raaklynen getrokken worden: deeze zullen onderling gelyk zyn; en de grootste zyn van alle de lynen die tot het holle, doch de kleinste van allen die tot het bolle van den omtrek getrokken kunnen worden.

III. AANMERKING. Het zelfde zal in het 4 Gevolg van het XIII. Voorstel op eene andere wyze beweezen worden: Men kan het ook onmiddelyk bewyzen uit het VIII. Voorstel van dit, en het 3 Gevolg van het XII. Voorstel in het I. Boek.

V. GEVOLG.

Uit een stip buiten den cirkel kan men maar twee lynen naar den omtrek trekken, die gelyk aan elkander zullen zyn.

IV. AANMERKING. Indien men dit Voorstel met het voorgaand vergelykt, zal men zien, dat het in de daad een en het zelfde Voorstel is; en dat het verschil alleen in de plaatsing van het stip A bestaat.

XII. VOORSTEL. Fig. 74.

Twee Choorden, (AD, BE), die zich naar welgevallen snyden (in F), snyden zich altoos zo, dat de rechthoek uit de deelen AF, FD) van de eene gelyk is aan den reehthoek uit de deelen (BF, FE) van de andere.

EUCL. III. 35. — S. p. 116. pr. 23.

EERSTE BEWYS. Uit de eigenschappen der rechthoekige driehoeken ontleend.

BEREIDING. Trek door F en het middelpunt C de middellyn NCG: vervolgens CD: en CHI op AG.

BEWYS. Uit het VI. Voorstel van dit Boek, en II, 7. het 4 Gevolg, is in de △△ CDH, en CFH.

□ op CD — □ op CF = □ op HD — □ op HF.

waaruit, door de gelykheid der ſtraalen CD, CN, CG en door het V. Voorſtel van het II. Boek, rechthoek uit NF en FG = rechthoek uit AF en FD. Men bewyst het zelfde voor den rechthoek uit BF en FE: waar uit het voorſtel volgt.

TWEEDE BEWYS. Uit de gelykvormige driehoeken.

BEREIDING. Men trekt AB en DE.

BEWYS. Uit het 3. Gevolg van het III. Voorſtel, is △ ABF ∽ △ FDE: en dus uit IV., 2.

AF: BF = FE: FD:

en dus uit IV., 7. het 5. Gevolg:

rechthoek uit AF en FD = rechthoek uit BF en FE.

I. AANMERKING. Dit voorſtel, aldus beweezen, levert ook een bewys op van het VIII. Voorſtel uit het IV. Boek.

II. AANMERKING. Het voorſtel is algemeen: doch wanneer er voor de choorden die zich ſnyden, byzondere omſtandigheden bykomen, zullen 'er ook uit het Voorſtel eenige byzondere gevolgen getrokken kunnen worden: zo als by v. wanneer de choorden elkander rechthoekig ſnyden: en in dat geval is of eene derzelven de middellyn, het geen de ſtof van het IV. en V. Gevolg opleevert: of zy zyn beide choorden, maar die rechthoekig geſneeden worden: en dit is het geval van het VI. Gevolg.

I. GEVOLG.

De deelen van eene choorde zyn altoos wederkeerig, zo als de deelen van eene andere choorde, die de eerstgemelde ſnydt: d. i.

AF: BF = FE: FD.

III. AANMERKING. Indien men het eerſte bewys van het Voorſtel gebruikt, volgt dit gevolg uit het Voorſtel, door IV. 7. het 4. Gevolg.

Maar indien men het tweede bewys gebruikt, is dit gevolg minder een gevolg van het Voorſtel, als de uitdrukking in woorden van dat gedeelte van het bewys zelf, waaruit het Voorſtel wordt afgeleid.

II. GEVOLG.

Op dat er een cirkel door vier gegeeven ſtippen, A, B, D, E getrokken zoude kunnen worden, moeten dezelven zodanig geplaatst zyn, dat de lynen die ze vereenigen zich in wederkeerige reeden ſnyden, of dat

AF : BF = FE : FD.

IV. AANMERKING. Men kan dus niet altoos eenen cirkel door vier gegeeven ſtippen trekken, daar zulks voor drie ſtippen, mits zy niet in ééne rechte lyn liggen, altoos mogelyk is, zo als wy dat in het II. Voorſtel beweezen hebben.

III. GEVOLG. Fig. 75.

Indien 'er uit eenig ſtip (B) van den omtrek eene lyn (BF) loodrecht op de middellyn getrokken wordt, zal het vierkant van die lyn gelyk zyn aan den rechthoek uit de deelen (AF, FD) van de middellyn, en dus zal ook die lyn midden evenreedig zyn tusſchen de gemelde deelen (IV., 7. het 5. Gevolg) d. i.

□ op BF = rechthoek uit AF, FD: en

AF : BF = BF : FD.

V. AANMERKING. Het zelfde kan uit het V. Voorſtel van dit Boek, en het VIII. van het IV. Boek onmiddelyk beweezen worden.

VI. AANMERKING. Hier op rusten de oplosſingen van het 14, 18, 19, 20 Werkſtuk van het I., de 3. oplosſing van het 15, het 19 en het gevolg van het 34. Werkſtuk van het III. Boek.

VII. AANMERKING. Indien dan het deel AF, *m* maalen het deel FD bevat, of AF = *m* × FD: zo is □ op BF = *m* × □ op FD. en □ op BD = □ op FB + □ op FD = *m* □ op FD + □ op FD = $\overline{m + 1}$ × □ op FD: dat is: het vierkant op de choorde BD bevat zo veele

N 2 maa-

maalen het vierkant van *FD*, als er in de middellyn AD deelen gelyk aan *FD* genomen worden.

IV. GEVOLG.

Die *zelfde lyn* (*BF*), eene loodlyn namelyk op eene *middellyn*, is altoos zodanig gesteld dat het vierkant *op dezelve* gelyk is aan het verschil der vierkanten op den radius, en op het deel van de middellyn dat tusschen het middelpunt en die loodlyn begreepen is, d. i.

□ op BF = □ op CD — □ op CF.

Uit het voorgaand gevolg, en II., 5. in aanmerking neemende dat AF = CD + FC, en FD = CD — FC.

Het zelfde kan onmiddelyk uit II 7. 1 Gevolg worden afgeleid.

V. GEVOLG.

De twee voorgaande gevolgen, namelyk dat □ op BF = rechthoek uit AF en FD, = □ op CD — □ op CF, zyn ook omgekeerd waar: namelyk, zo eenige lyn ABD zodanig gesteld is, dat men voor ieder stip van die lyn hebbe □ op BF = rechthoek uit AF, FD, of = □ op CD — □ op CF, dan is die lyn de omtrek van eenen cirkel waar van AB de middellyn is.

PAPPUS, *Coll. Mathem.* VII., p. 165.

VIII. AANMERKING. Dit leevert op het geen de hedendaagsche Wiskonstenaars noemen, de *Vergelyking* (*Aequatio*) van den Cirkel, of in het algemeen van eene kromme lyn. De lyn (AD) wier richting gegeeven is, wordt *as* of *middellyn* genoemd: men noemt het stip A of C, van het welk men de stukken AF, of CF der middellynen of assen, *afgesneedenen* of *abscissen* (*abscissae*) genoemd, begint te neemen, den *oorsprong* der *afgesneedenen* of *abscissen*: en de lynen BF noemt men *toegepasten* of *ordinaten*, (*ordinatae*, *applicatae*).

De kromme lyn is dan bepaald zo dra de betrekking die 'er bestendig tusschen de *afgesneeden* en *toegepaste* lynen plaats heeft, bekend is. Voor den Cirkel wordt die betrekking uitgedrukt door □

□ op BF = rechthoek uit AF, FD, of =
rechthoek uit AD, FD — □ op FD.

noemende dan BF, y; FD, x; AD, $2a$;
en in acht neemende het geen wy IV., 7. het 8. Gevolg en de 10. Aanm. gezegd hebben, is
$y^2 = (2a - x)x = 2ax - x^2$ de vergelyking die den aart der Cirkels aanduidt: of ook, stellende CF $= x$, dat is, de *abscissen*, niet van het uiteinde der middellyn, maar van het middelpunt neemende, is $y^2 = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$ de vergelyking van den Cirkel.

IX. AANMERKING. Wy hebben in de 9. Aanmerking op het VII. Voorstel van het IV. Boek gezegd, wat de Ouden door *vlakke plaatsen* of *vlakke werkstukken* verstaan: zy zyn namelyk die, waarin het gevraagde getal zo wel in het vierkant als door een ander, doch *gegeeven*, getal gemultipliceerd voorkomt: en het is door het derde en vierde voorgaand gevolg, dat zy dezelven geometrisch oplossen: immers kan men alle die Vraagstukken, of, zo als men het nu noemt, alle die *vergelykingen van den tweeden graad* tot deeze twee herleiden.

I. $x^2 \pm ax = b^2$: II. $x^2 \pm ax = -b^2$.

VOOR HET I. Stel (Fig. 60. Tab. V.) GL $= \frac{1}{2}a$, IG $= b$ rechthoekig op DL: beschryf uit L als middelpunt met den radius LI den cirkel DIKF, die de verlengde lyn LG in D en F snydt. Dan is de lyn DG het getal x dat de vergelyking $x^2 + ax = b$: en de lyn GF het getal x dat de vergelyking $x^2 - ax = b^2$ oplost.

Verder zy HF = DG: dan is DG = HF = GF — GH = GF — a.

Want: DL $= \frac{1}{2}a +$ DG: DF $= a + 2$DG: GF = DF — DG $= a +$ DG.

Indien men dan in het III. Gevolg voor de vierkanten de tweede magten, en voor de rechthoeken het multiplicatie-teeken gebruikt, het geen geschieden kan zo als

wy zulks in het 8. Gevolg N°. 1. en 10. Aanmerking op het VII. Voorstel van het IV. Boek getoond hebben: is

$$\overline{IG}^2 = DG \times GF = DG \times (a + DG) = \overline{DG}^2 + a \times DG = b^2$$

en

$$\overline{IG}^2 = DG \times GF = GF \times (GF - a) = \overline{GF}^2 - a \times GF = b^2.$$

VOOR HET II. Stel (Fig. 15. Tab. IV.) $AE = \frac{1}{2} a$: beschryf uit E met AE den Cirkel ADB: stel $AC = b$ loodrecht op AB: zy CD // AB: en DF ⊥ op AB: dus $EB = -\frac{1}{2} a$ $DF = CA = b$: dus is $\overline{FE}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{DF}^2 = \frac{1}{4} a^2 - b^2$: en $FE = \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - b^2}; = EG$: dus $BF = EB + EF = -\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - b^2}$

waar uit volgt:

1° $\sqrt{\frac{1}{4} a^2 - b^2} = BF + \frac{1}{2} a$, en dus

$$\frac{1}{4} a^2 - b^2 = \frac{1}{4} a^2 + a \times BF + BF^2$$

of $BF^2 + a \times BF = -b^2$

en dus voldoet BF aan het getal x dat de vergelyking $x^2 + a x = -b^2$ oplost.

2° $AF = AE - FE = \frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - b^2}$ en dus

$\sqrt{\frac{1}{4} a^2 - b^2} = \frac{1}{2} a - AF$: en dus

$$\frac{1}{4} a^2 - b^2 = \overline{AF}^2 - a \times AF + \frac{1}{4} a^2$$

[redacted]

dan dat eene lyn een getal $\frac{1}{2}a$ uitdrukke, en eene andere de wortel b uit een getal b^2, dat men als een vierkant getal, meetbaar of onmeetbaar, beschouwt: het eerste loopt in het oog: het tweede insgelyks, zo b^2 een vierkant getal is; zo niet, kan men b^2 behandelen als een product van twee getalen m en l, voor een derzelven, zo dit nodig is, de eenheid stellende: die getalen m en l kunnen door lynen worden uitgedrukt, en de lyn middenevenreedig tusschen dezelven is de gezochte lyn b.

De Heer KORNIA herleidt het geen wy nu gezegd hebben tot de 28 en 29 propositie van het 6 Boek van EUCLIDES: en in de daad, daar men hier x vinden moet, zoekt men, volgens de lyn a, eenen rechthoek $(a \pm x)\,x$ te plaatsen, gelyk aan eenen gegeeven rechthoek b^2, en wiens bazis $(a \pm x)$ groter of kleiner dan de gegeeven lyn a is: waar op de gemelde propositiën van EUCLIDES uitkomen.

VI. GEVOLG. Fig. 159.

Indien twee choorden elkander rechthoekig snyden, zal de som van de vierkanten der deelen (□ op AF + □ op BF + □ op FD + □ op FE) gelyk zyn aan het vierkant van de middellyn.

X. AANMERKING. Dit kan op verscheiden wyzen beweezen worden.

1° Als een gevolg van dit voorstel aldus: trek BD, DE, vervolgens door het middelpunt C, BI, en eindelyk BA, AI, ID uit ons voorstel is

AF : BF = FE : FD: dus:

□ op AF: □ op BF = □ op FE: □ op FD.

waaruit, door samentelling, verwisseling en wederom door samentelling der reedens volgt

□ op AF + □ op BF + □ op FE + □ op FD:
□ op FE + □ op FD = □ op BF + □ op FD: □ op FD:

of (II., 7.)

□ op AF + □ op BF + □ op FE + □ op FD: □ op ED = □ op BD: □ op FD.

Maar △ FDE ∽ △ IBD; want
∠ FED = ∠ BID (V. 3. 3. Gev.)
En ∠ EFD = ∠ BDI = ∟ (V. 5.) dus (IV. 16.)
□ op FD: □ op BD = □ op ED: □ op BI: en dus
(III. Axiom. 4.) □ op BI = □ op AF + □ op BF
+ □ op FE + □ op FD.

2°. Men kan ook dit gevolg bewyzen door het voorstel van PYTHAGORAS (II., 7.) Men trekt als dan CB, CD, CE, CA en de loodlynen CL, CM. Men neemt door II., 7., in de △△ BCL, ECL, ACM, en MCD, de waarde der vierkanten op CB, CD, CE, CA: de som van die vier vierkanten is gelyk aan 4 □ op CB, = □ op BI: en de som der gevonden waarden door II., 7. en II., 2. ontwikkelende vindt men dezelve gelyk aan □ op AF + □ op BF + □ op FE + □ op FD.

3° Men kan het ook bewyzen uit de beschouwing dat (III. Voorstel, 2. Gevolg) daar ∠ ABE + ∠ BAF = ∟, de bogen AE + BD den halven omtrek uitmaaken: insgelyks ook AB + ED: dat dus boog AI = boog ED, maar ∠ BAI = ∟ (IV. Voorstel) dus (II., 7.) □ op BI = □ op AB + □ op AI: = □ op AB + □ op ED: waaruit door II., 7. het voorstel volgt.

VII. GEVOLG. Fig. 88.

Indien in eenigen driehoek (EBF) eene lyn (BI) eenen der hoeken (EBF) in twee gelyke deelen (EBI, IBF) deelt en de overstaande zyde EF snydt: zal het vierkant van die lyn (BI) met den rechthoek der deelen (AI, FI) van de gemelde lyn (EF) gelyk zyn aan den rechthoek der twee overige zyden.

BEWYS. Men stelle dat de △ EBF in een cirkel staa, (II Voorstel), zy BI de gegeeven lyn die ∠ EBA = ∠ ABF maakt. Men neemt uit dit Voorstel aan dat rechth. uit AI en IB = rechth. uit EI en IF: men bewyst uit het I Gev. van het III Voorstel dat △ EIB ∽ △ ABF:

en dus uit IV, 2, vervolgens uit IV, 7, 5 Gevolg, en II, 1. het 5 Gevolg dat *rechth.* uit BE, BF = rechth. uit EI, IF + □ BI: waaruit de zaak volgt.

XI AANMERKING. Dit was reeds, doch uit andere gronden, in het IX Voorstel van het IV Boek beweezen.

XIII. VOORSTEL. Fig. 40.

Indien twee of meerder lynen (AD, AF, AG, enz.) uit een stip (A) buiten den cirkel, tot aan den omtrek van den cirkel getrokken worden en verlengd zynde denzelven snyden, zyn de rechthoeken uit elke geheele lyn en zyn stuk dat buiten den cirkel valt (uit AD en AK, uit AF en AE,) altoos gelyk aan elkander.

S. p. 119. Gev. 1.

EERSTE BEWYS. Uit de eigenschappen der rechthoekige driehoeken.

BEREIDING. Men trekt de straalen CD, CF, en dan CM ⊥ op AD en CQ ⊥ op AF:

BEWYS. in de rechthoekige driehoeken CAQ en CAM is (door II, 7: het 4 Gev.) □ op AQ — □ op QE = □ op AM — □ op MK: waar uit door II, 5 en het VI Voorstel van dit Boek het besluit opgemaakt wordt.

TWEEDE BEWYS. Uit de gelykvormige driehoeken.

BEREIDING. Trek FD, en EK.

BEWYS. Men toont 1° dat △ AFD ∽ △ AEK vermits ∠ DAF in beiden gemeen, ∠ FDK + ∠ FEK = 2 L. (III Voorstel 2 Gev.) = ∠ FEK + ∠ KEA: en dus ∠ FDK = ∠ KEA. Waaruit door IV. 3 volgt AD: AF = AE : AK: waaruit door IV, 7: het 5 Gev. het Voorstel volgt.

I. AANMERKING. Het blykt duidelyk dat dit Voorstel en het voorgaande één en het zelfde Voorstel zyn, dat men algemeener op deeze wyze zoude kunnen uitdrukken.

„ Indien men twee lynen trekt, die elkander binnen

„ of buiten den cirkel snyden: zyn de rechthoeken der
„ stukken van ieder lyn die tusschen het stip daar de lynen
„ elkander snyden en de beide stippen daar elke lyn den
„ omtrek snydt, onderling gelyk.

I. GEVOLG.

De snylynen worden door den cirkel in omgekeerde reeden gesneeden: dat is

AF : AD = AK : AE.

II. AANMERKING. Indien men het eerste bewys gebruikt volgt dit uit het Voorstel door II. 7, het 5 Gevolg: en zo men het 2 bewys gebruikt, is het minder een Gevolg, dan de uitdrukking in woorden van dat gedeelte van het bewys waar uit het besluit wordt opgemaakt.

II. GEVOLG.

Indien men uit een stip A buiten den cirkel eene raaklyn (AB) en eene snylyn (AF) naar welgevallen trekt, is het vierkant op de raaklyn (AB) altoos gelyk aan den rechthoek uit de snylyn (AF) en haar gedeelte (AE) dat buiten den cirkel valt: en omgekeerd.

EUCL. III. 36, 37. —— S. p. 118. pr. 24.

III. AANMERKING. Wy beschouwen dit als een onmiddelyk gevolg uit ons Voorstel: want wanneer DA een raaklyn wordt, valt het stip K op B: dus DA = KA en rechthoek uit DA, KA = □ BA. Anderen, zo als EUCLIDES, maaken van dit Gevolg het hoofd-voorstel, en van ons Voorstel een Gevolg: en dan wordt het beweezen, of uit de eigenschappen der rechthoekige driehoeken, of uit de gelykvormige driehoeken: in het eerste geval is door II. 7. 1 Gevolg: □ AB = □ AC — □ CB = □ AC — □ CG = Rechth. uit AG AL (II. 5.) — en dan gaat het bewys even als in ons Voorstel voort. —— In het tweede geval volgt het door IV. 3. en IV. 7, 5 Ge-

5 Gevolg uit de gelykvormigheid der driehoeken (Fig. 164.) A E B en F A B: want ∠ A is gemeen in beiden: en door het IX. Voorstel van dit Boek is ∠EBA = ∠ BFE.

IV. AANMERKING. Hier op rust de oplossing van het 13. Werkstuk van het I. Boek, en ook het bewys van de 1 Oplossing van het 10 in het III Boek.

III. GEVOLG.

De raaklyn is midden-evenredige tusschen de snylyn, en haar gedeelte dat buiten den cirkel valt.

Uit het II Gevolg, en IV. 7 Gev.

IV. GEVOLG.

De twee raaklynen, die men uit een stip naar den cirkel trekken kan, zyn onderling gelyk.

V. AANMERKING. Dit hadden wy reeds in het XI. Voorstel, 4 Gevolg, beweezen.

V. GEVOLG. Fig. 40.

Indien het buitenste deel (A K) van eene der lynen (A D) midden-evenreedig is tusschen de beide deelen van eene andere (A P): zal ook het buitenste deel (P A) van deeze midden-evenredig zyn tusschen de beide deelen van de eerstgemelde:

Want zo AP : AK = AK : HP, daar
AP : AK = DA : AH, is ook
DA : AH = AK : HP : en dus
DA — AK : DA = AH — HP : AH of
DK : PA = DA : AH: en dus
DK : PA = AP : AK.

VIETA. *Operum* p. 242.

VI. GEVOLG. Fig. 160.

Indien de beide lynen zodanig getrokken worden, dat het buitenste deel van de eerste staat tot derzelver binnenste deel, zo als het binnenste deel van de tweede tot derzelver buitenste deel, zullen de buitenste deelen van de eerste en de

de tweede, twee midden-evenredigen zyn tusfchen de binnenfte deelen van de tweede en eerfte: want,

Uit de onderftelling is

DK : AK = AP : HP of

DK : AP = AK : HP; dus

DK : AD = AP : AH en

AD : AH = AP : AK dus

DK : AP = AP : AK = AK : HP:

Of ∺ DK, AP, AK, HP.

V. AANMERKING Indien men dan twee lynen in den cirkel geometrisch zodanig trekken kon dat DK : AK = AP : HP, was het vraagftuk om twee midden-evenredigen te vinden geometrisch opgelost, en het is hier toe dat VIETA het vraagftuk gebragt heeft; doch dit is niet mogelyk. Men kan wel de zaak tot eene eenvoudiger oplosfing brengen: namelyk: aldus: Fig. 160. men befchryve eenen cirkel waarvan de middellyn eene der gegeeven lynen is: men trekke de andere, (de kleinfte), HP in den cirkel: men verlenge dezelve zo dat HL = HP: men trekke vervolgens PL ∥ LC. Men trekke eindelyk door het middelpunt C, de lyn DCKA zodanig dat AG = KC worde: dan is

AG : AP = GC : PL:

maar AG = ½ KD zo als PH = ½ PL:

dus AG : KD = PH : PL en dus

KD : AP = GC : PH.

maar AG = KC: dus GC = AK: dus

KD : AP = AK : PH of

KD : AK = AP : PH: en dus

∺ KD, AP, AK, PH: maar men kan de lyn DCKA geometrisch niet trekken zo dat AG = KC. zy. VIETA. p. 243.

VII. GEVOLG. Fig. 161.

Indien de hoek ABC recht is, en men den Rechthoek

AD

A D C B voltooit: verder door D en A, en door D en C, de lynen D C G en D A F, en eindelyk uit B, de snylyn G B O K, zodanig trekt dat B G ≐ O F, dan zullen A F, en G C, twee middel evenreedigen tusschen A B en B C zyn:

Want daar O F ≐ B G, is O G ≐ B F:

en dus

Rechth. F D, A F ≐ Recht B F, F O ≐ Rechth. O G, B G = Rechth. G D G C: en dus

1° G D : F D = A F : G C: maar (IV, 2.)

G D : F D ≐ A B : F A : dus

2° A B : F A = F A : G C.

3° G D — A B : G D = F D — F A : F D

of G C : G D = B C : F D

4° of G C : B C = G D : F D = F A : G C:

dus 2° en 4°

A B : F A = F A : G C = G C : B C: en dus

∺ A F, F A, G C, B C.

Indien men dan, A B rechthoekig op B C gesteld, en een Cirkel die door de stippen A, B, C gaat getrokken zynde, den rechthoek A B C D voltooid, en D A en D C verlengd zynde, men door het stip B, de lyn G B F zodanig trekken kon, dat B G ≐ F O, was het vraagstuk van twee evenreedige lynen opgelost, en het is tot die vraag dat PHILO van Byzantium, het gemelde vraagstuk gebragt heeft. Zie TACQUET op EUCL. VI. 13.

II. AFDEELING.

OVER DE CIRKELS DIE ELKANDER RAAKEN OF SNYDEN.

XIV. VOORSTEL.

Cirkels die zich snyden of raaken hebben het zelfde middelpunt niet.

EUCL.

EUCL. III. 5, 6:

ALGEMEENE AANMERKING. Dit Voorstel en de drie volgende rusten op dit grondbeginsel, dat twee cirkels, die elkander raaken of snyden, juist zo veel stippen gemeen hebben, als er stippen zyn in welke zy zich raaken, of snyden; gevolgelyk dat de lynen uit die stippen naar ieder middelpunt getrokken, gelyk zullen zyn.

BEWYS. Voor de cirkels die elkander snyden Fig. 44.; voor die welke elkander innerlyk raaken Fig. 45.; voor die welke elkander uiterlyk raaken, Fig. 46.; voor deze laatsten spreekt de zaak van zelf, daar de beide cirkels geheel buiten elkander staan: voor de twee eerste gevallen word het bewys opgemaakt uit de ongerymdheid die voortvloeit met het tegendeel te stellen; en die ongerymdheid wordt uit de gelykheid der straalen opgemaakt.

XV. VOORSTEL.

Zo twee Cirkels elkander innerlyk, of uiterlyk raaken, gaat de lyn, die door de beide middelpunten gaat, ook door het stip van aanraaking.

EUCL. III, 11, 12.

BEWYS. Voor beiden uit het ongerymde. Zo de cirkels elkander *innerlyk* raaken, Fig. 45, en het gestelde geen plaats heeft: laat dan I het middelpunt zyn van den cirkel A D B buiten F A: trek A I: dan moest (15. I.) D F > F B zyn: dat onmogelyk is. Zo de aanraaking uiterlyk is, (Fig. 46.) laat de lyn C F, die de middelpunten vereenigt buiten A vallen: dan moet (15. I.) C D + B F > C F zyn, dat onmogelyk is.

AANMERKING. Men kan thans de 17, 18, 19 Werkstukken van het IV Boek oplossen.

XVI. VOORSTEL.

Een cirkel raakt eenen anderen cirkel slechts in een stip

EUCL. III. 13 — S. p. 98. pr. 6.

BEWYS. Voor beiden uit het ongerymde. Zo de aanraaking in-

innerlyk geschiedt, Fig. 45, laaten B en A de twee stippen van aanraaking zyn: en (Voorstel VII) F en C de twee middelpunten: dan moest FB = FC + CB dat (15, I) onmogelyk is. Zo de aanraaking uiterlyk is, Fig. 46, laaten A en D de twee stippen van aanraaking zyn: dan moest CA + AF = CD + DF: dat (15, I) onmogelyk is.

XVII. VOORSTEL.

Twee Cirkels die elkander snyden, snyden zich in twee stippen, welke zodanig geplaatst zyn dat de lyn die dezelven vereenigt loodrecht staat op de lyn die door de middelpunten van beide de cirkels gaat, en door deeze in twee gelyke deelen gedeeld wordt, en zy kunnen elkander in niet meer dan twee stippen snyden.

EUCL. III. 10 — S. p. 97. Gev. 2.

I GEDEELTE. Fig. 48. Indien de beide Cirkels maar een stip gemeen hadden zouden zy zich slechts raaken: dus, daar zy zich snyden, snyden zy zich ten minsten in twee stippen.

Die stippen kunnen niet staan aan den zelfden kant van de lyn, die de beide middelpunten vereenigt: want dan zoude men aan éénen kant uit een ander stip dan het middelpunt twee gelyke lynen kunnen trekken dat onmogelyk is. (door het Gevolg van het VIII en 5 Gev. van het IX Voorstel.)

Die stippen A, F zullen dan aan verschillende kanten vallen, en dan volgt het Voorstel uit I. 11.'5 Gevolg.

II GEDEELTE Fig. 47. Uit het ongerymde: want dan moesten de beide Cirkels een en het zelfde middelpunt hebben: dat onmogelyk is: door het XIV Voorstel:

ZES-

ZESDE BOEK.

OVER DE INSCHREVENE EN OMSCHREVI VEELHOEKEN.

I. AFDEELING.

EIGENSCHAPPEN DER VEELHOEKEN DIE OF OM DEN CIRKEL BESCHREEVEN ZY

BEPAALINGEN.

I

Eene figuur wordt gezegd in eene andere figu ſtaan, of in dezelve beſchreeven te zyn, als de pen van haar hoeken op de zyden van die an figuur rusten.

En dus wordt eene figuur gezegd in eene ander ſtaan, of in dezelve beſchreeven te zyn, als de top van haare hoeken op den omtrek rusten: en de kel wordt gezegd in eene figuur beſchreeven te als zyn omtrek alle de zyden raakt.

EUCL. IV. 1, 3, 5 bep. — S. p. 122. def.

[redacted]

paalde grootte heeft te spreeken: maar wy hebben in het gevolg van het XVII Voorstel van het IV Boek gezien dat dit plaats heeft als de toppen E, F, G, I, L op het midden der zyden AD, DC, CB, BQ, QA rusten: waarom men dan ook dien veelhoek, als by uitstek, den veelhoek in den veelhoek beschreeven noemen kan

II.

Eene figuur wordt gezegd om eene andere figuur te staan, of, om dezelve beschreeven te zyn, als alle haare zyden de toppen van alle de hoeken van die andere figuur raaken.

En dus, wordt een cirkel gezegd om eene figuur beschreeven te zyn, of om dezelve te staan, als de omtrek van den cirkel de toppen van alle de hoeken raakt: en eene figuur wordt gezegd om den cirkel beschreeven te zyn, als alle haare zyden den omtrek van den cirkel raaken,

EUCL. IV. d. 2, 4, 6. —— S. p. 122. d. 2.

AANMERKING. Wy zullen in het I Gevolg van het XXI Voorstel zien hoe een regelmatige veelhoek om eenen regelmatigen veelhoek beschreeven wordt.

A X I O M A.

Een veelhoek kan noch in eenen veelhoek noch om eenen veelhoek beschreeven worden, ten zy deeze evenveel zyden hebbe.

I. VOORSTEL. Fig. 77.

Geen figuur kan in eenen cirkel beschreeven worden, ten zy er, in of buiten dezelve, eenig stip zodanig gesteld zy, dat alle de lynen van het zelve naar de hoeken van de figuur getrokken, (CB, CD, CA) onderling gelyk zyn.

BEWYS. Uit I Bep. en den aart van den cirkel.

II. VOORSTEL. Fig. 78.

Geen figuur kan om eenen cirkel beschreeven worden, ten zy 'er in dezelve eenig stip zodanig gesteld zy, dat de loodlynen (CI, CK, CL), uit hetzelve op alle de zyden van de figuur getogen, onderling gelyk zyn.

BEWYS. Uit II. Bepaling, en V. 7.

III. VOORSTEL.

Geen figuur kan om eenen cirkel beschreeven worden, ten zy, indien haare zyden *even* in getal zyn, de som van de eerste, derde, vyfde, zevende, enz. gelyk zy aan de som der tweede, vierde, zesde, achtste, enz. en, indien zy *oneven* in getal zyn, ten zy de som der eerste, derde, vyfde, zevende, enz. gelyk zy aan de som van de tweede, vierde, zesde, achtste, enz. en daarënboven van tweemaal dat stuk der laatste zyde dat tusschen de eerste en het stip van aanraking begreepen is.

PITOT. *Mem. de l'Acad. de Paris.* A. 1725. p. 45.

BEWYS. Uit II. Bepaling, en V. 11. Gevolg. 4.

IV. VOORSTEL.

'Er is geen driehoek, of dezelve kan in of om eenen cirkel beschreeven worden: en dus ook geene, of 'er kan een cirkel om of in denzelven staan.

BEWYS. I. Gedeelte. De inschryving des driehoeks in den cirkel, en dus de beschryving van deezen om denzelven, blykt uit V. 2.

II. Gedeelte. De beschryving des driehoeks om den cirkel.

BEREIDING. Fig. 78. Stel dat de lynen BC, en CD, welke de hoeken ABD en ADB in twee gelyke deelen snyden, in C samen komen: trek CD; en de loodlynen CI, CK, CL: men moet bewyzen (II. Voorstel) dat CI = CK = CL.

BEWYS. Uit I. 9.

GE-

GEVOLG.

De BEREIDING en het BEWYS van het II. gedeelte van dit Voorstel leeveren de volgende eigenschap der driehoeken op:

De lynen, welke de hoeken van eenen driehoek in gelyke deelen verdeelen, komen in één stip binnen den driehoek te samen: en de loodlynen die uit hetzelve op de zyden des driehoeks getrokken worden, zyn allen gelyk aan elkander. L. C. §. 502.

I. AANMERKING. De driehoek is de eenige figuur die altoos in of om den cirkel beschreeven kan worden: en in of om welke men altoos eenen cirkel beschryven kan.

II. AANMERKING. Men kan thans het 1., 2., 3., 4. en 5. Werkstuk van het V. Boek oplossen.

V. VOORSTEL. Fig. 79. 80.

Niet alle onregelmatige, maar wel alle regelmatige veelhoeken kunnen in of om den cirkel beschreeven worden. L. C §. 530.

BEWYS. Voor het I. uit het 1. en 2. Voorstel: en voor het II. uit het 1. en 2. Voorstel: en II. 14.

AANMERKING. Het eerste en tweede Voorstel van dit Boek, gepaard met het 14. van het II. toonen genoeg aan hoe men in en om eenen gegeeven regelmatigen veelhoek eenen cirkel beschryven moet: dus kan men het 13. en 14. Werkstuk van het V. Boek oplossen.

AANMERKING. Wy spreeken hier, en in de volgende Voorstellen, van het 8. af, van *regelmatige* veelhoeken in en om den cirkel beschreeven: doch CLAVIUS merkt te recht aan (op EUCL. IV. 16.) dat een gelykzydige veelhoek in den cirkel beschreeven altoos gelykhoekig, en dus regelmatig is: doch dat een gelykzydige veelhoek om den cirkel beschreeven, niet altoos daarom ook gelykhoekig is, ten zy het getal der zyden oneven zy: of, zo het even is, twee naastliggende hoeken gelyk zyn, of wel twee hoeken, waar van, de eene voor den *eersten* genomen

men zynde, de andere eene even plaats bekomt: by v. de 4, 6., enz. Verder, dat een gelykhoekige veelhoek, om den cirkel beſchreeven, altoos gelykzydig is, doch dat een gelykhoekige veelhoek in den cirkel beſchreeven het niet altoos is, ten zy het getal der zyden oneeven zy, of, indien het eeven is, ten zy twee naastliggende zyden gelyk zyn, of twee zyden het zyn, waar van, de eene voor de *eerſte* genomen zynde, de andere eene eeven plaats bekomt: by v. de 4., 6. enz.

VI. VOORSTEL. Fig. 88.

In alle vierhoeken, (AEBF), in den *cirkel beſchreeven*, zyn altoos de overſtaande hoeken te ſamen genomen (AEB en AFB: EAF en EBF) gelyk aan twee rechten.

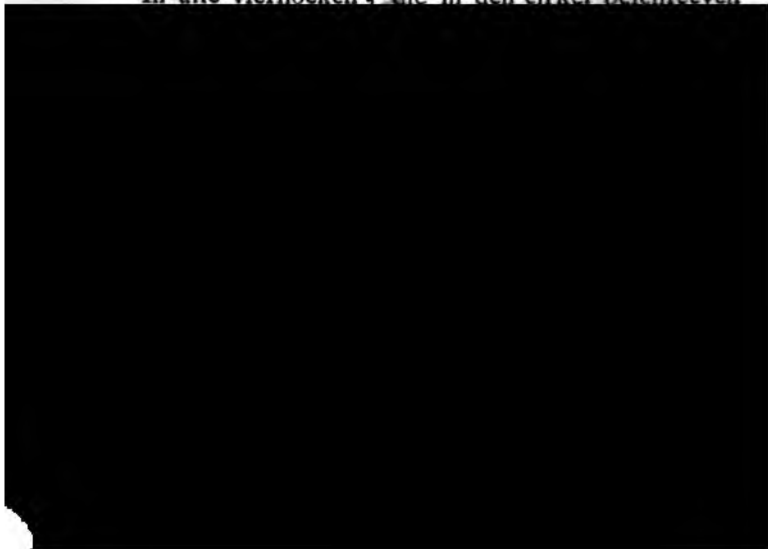
EUCL. III. 22. — S. p. 106. pr. 12.

BEWYS. Uit V. 3. Gevolg 2.

AANMERKING. 'Er kan dus geen vierhoek *in den cirkel beſchreeven* worden, of hy moet deeze *eigenſchap bezitten*: en dus kunnen 'er nooit een ruit, of een parallelogram in beſchreeven worden: maar wel een vierkant, of een rechthoek.

VII. VOORSTEL. Fig. 88.

In alle vierhoeken, die in den cirkel beſchreeven



vervolgens van △ GEB en △ EAF, en IV, 7. 8. Gevolg N°. 2: is Rechth. FB. AE = Rechth. AG. FE en Rechth. BE. AF = BG. EF: waar uit, en uit II. 1., 3. Gevolg, het besluit wordt opgemaakt.

I. AANMERKING. Dit Voorstel wordt het Voorstel van PTOLEMAEUS genoemd: om dat PTOLEMAEUS of hetzelve heeft uitgevonden, of 'er het eerst gebruik van heeft gemaakt, om de choorden van bogen te berekenen, zo als wy zulks in het VIII. Boek XL. Voorstel zullen aantoonen. Zie PTOLEMAEUS *Almagestum* L. I. Cap. 9.

II. AANMERKING. Indien men dit Voorstel met het voorgaande Voorstel, en met het 5. Gevolg van het 10. Voorstel in het V. Boek, vergelykt, zal men zien dat 'er in eenen vierhoek, op dat dezelve in den cirkel beschreeven zoude kunnen worden, drie dingen plaats moeten hebben: doch zy zyn zodanig, dat zo dra een van driën plaats heeft, de twee anderen ook plaats hebben.

III. AANMERKING. Men lost thans het 6., 7., 8., 9. en 10. Werkstuk van het V. Boek op.

VIII. VOORSTEL. Fig. 79.

Wanneer een regelmatige veelhoek in den cirkel beschreeven is, verdeelen 1°. de zyden den omtrek in zo veel gelyke boogen, als 'er zyden in den veelhoek zyn: 2°. die zyden zyn de choorden van die boogen: 3°. het middelpunt van den cirkel is dat van den veelhoek: 4°. de radius van den cirkel is die van den veelhoek zelven: en 5°. de choorde die, twee zyden van eenen gegeeven veelhoek bespant, is de zyde van eenen veelhoek die de helft van het getal zyden des gegeevenen veelhoeks bezit.

I. GEVOLG.

De zyde EF van eenen regelmatigen veelhoek in den cirkel beschreeven, is de choorde van den middelpunts-

puntshoek (FCE) of van eenen hoek die gelyk is aan $\frac{4R}{g}$ (II., 14. het 1. Gevolg.)

II GEVOLG.

De *zyde van den zeshoek in den cirkel beschreeven, is gelyk* aan den radius van den cirkel. (II. 14. het 2. Gevolg.)

AANMERKING. Hier door kan men het 15. Werkstuk van het V. Boek oplossen.

III. GEVOLG.

De loodlyn van eenen gelykzydigen driehoek in den cirkel beschreeven, is de helft van den radius: en de loodlyn uit eene van deszelfs hoeken op de overstaande zyde nedergelaten is anderhalfmaal de radius.

EUCLIDES XIV., 1. Cor. voor het eerste gedeelte.

IV. GEVOLG.

De zyde van het vierkant in den cirkel beschreeven staat tot den radius zo als $\sqrt{2}$: 1. en de inhoud van dat vierkant is de helft van het vierkant op de middellyn.

Dus is de zyde van het vierkant, in den cirkel beschreeven, onmeetbaar met betrekking tot den radius.

EUCL. X. 117.

IX. VOORSTEL.

De zyden en de omtrekken van gelykvormige regelmatige veelhoeken, in of om cirkels van verschillende middellynen beschreeven, staan in de zelfde reeden als de middellynen van die cirkels; doch hunne inhouden zyn in verdubbelde reeden van de middellynen.

EUCL. XII. 1.

BEWYS. Uit het 5. Voorstel: en uit II. 14. en IV. 15.

AANMERKING. Hier op, en op IV. 2., steunt het gebruik van die lynen op den proportionaal-passer welke

ke met het woord *Pol.* of *Polygoonen*, bestempeld zyn, en dienen om gemaklyk alle *Polygoonen* of Veelhoeken, op gegeeven lynen, of in gegeeven cirkels, te beschryven: doch de lyn der choorden is daar toe van nog meer dienst: zie de 2. Aanmerking op het 2. Voorstel van het VIII. Boek.

X. VOORSTEL. Fig. 79.

Indien men uit de uiteinden (F en E) der zyden van eenen regelmatigen veelhoek in den cirkel beschreeven, doch waarvan het getal der zyden *oneven* is, lynen (FB, EB) naar den top des tegenoverstaanden hoeks (ABD) trekt, zullen dezelven met de gemelde zyde eenen gelykbeenigen driehoek (FBE) uitmaaken, waarin een der hoeken (BFE of BEF) op de grondlyn tot den hoek (FBE) in den top staat, zo als $\frac{g-1}{2}$: 1.

TACQUET op EUCL. IV. 11.

BEWYS. Dat △ FBE gelykbeenig is volgt uit V., 3. het 3. gev.: het overige uit de beschouwing dat ∠ FBE = ½ ∠ FCE = ½ × $\frac{4\ L}{g}$: en zo dra de hoek FBE bekend is, zyn de hoeken BFE, FEB het ook, uit I. 7, het 3. gev.

AANMERKING. Het zelfde heeft ook plaats al is de veelhoek niet in den cirkel beschreeven, en is dus eene eigenschap van alle de regelmatige veelhoeken wier zyden *oneven* in getal zyn, in het algemeen.

GEVOLG.

De hoeken op de grondlyn zyn dus veelvouden van den hoek in den top; en zyn gevolglyk tot dien hoek in den

(gelykzydigen) driehoek = ...	= 1 : 1.
—— vyfhoek	2 : 1.
—— zevenhoek . . .	3 : 1.
—— negenhoek	4 : 1.

AANMERKING. Men kan thans het 11 en 12. Werkstuk van het V. Boek oplossen.

XI. VOORSTEL. Fig. 80.

Indien men uit het middelpunt van eenen cirkel eene loodlyn (CL) laat vallen op de zyde (GF) van eenen regelmatigen veelhoek in den zelven beschreeven, doch wiens zyden *even* in getal (g) zyn, en men vervolgens die loodlyn wederzyds tot aan den omtrek verlengt, om 'er eene middellyn van te maaken, zal die middellyn de zyde (GF) op welke zy valt in twee gelyke deelen (GL, LF) verdeelen: en de lynen (GH, FH) die men uit de uiteinden van de gemelde zyde (GF) naar het eind (H) van die middellyn trekt, zullen met die zyde eenen gelykbeenigen driehoek uitmaaken, waar in de hoeken (HGF of HFG) op de grondlyn tot den hoek (GHF) in den top zyn zullen, zo als $\frac{g-1}{2}$: 1.

TAQUET op EUCL. IV. 11.

BEWYS. Het zelfde als voor het voorgaande Voorstel.

GEVOLG.

De Hoeken op de grondlyn zyn dan hier veelvouden van dien in den top op deeze wyze:

De eerstgemelde staan tot de laatstgemelden
voor het vierkant als $\frac{3}{2}$: 1.
—— den zeshoek als $\frac{5}{2}$: 1.
—— —— achthoek als $\frac{7}{2}$: 1.
—— —— tienhoek als $\frac{9}{2}$: 1.
en zo voorts.

AANMERKING. Het blykt uit dit, en uit het voorgaande Voorstel, dat indien men door de Meetkunde dit algemeen vraagstuk kon oplossen, namelyk, eenen gelykbeenigen driehoek te maaken, waarvan de hoeken op de grondlyn tot dien in den top staan, zo als 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4 en zo voorts, tot 1, men ook alle regelmatige veelhoeken op eene *geometrische* wyze in den cirkel zoude kun-

kunnen beschryven: en dit vraagstuk hangt wederom, zo als van zelf blykt, en reeds zeer wel door PAPPUS in zyne *Collectiones Mathematicae* is opgemerkt, van dit ander af, eenen cirkelboog in twee deelen, die eene bepaalde reeden tot elkander hebben te verdeelen. Dan, dit vraagstuk is in het algemeen, in eenen *geometrischen* zin, dat is door behulp van rechte lynen en cirkel alleen, niet op te lossen.

Men heeft tot nu toe geen middel gevonden, om rechtstreeks andere veelhoeken in den cirkel te beschryven dan den driehoek, den vierhoek, den vyfhoek, den zeshoek, en die veelhoeken welke uit deezen door eene herhaalde verdeeling van de boogen in twee gelyke deelen, of wel door het volgende Voorstel, gevormd kunnen worden. Men kan geen' zeevenhoek, negenhoek, elfhoek, enz. geometrisch in den cirkel beschryven.

Men gebruikt het middel van den gelykbeenigen driehoek, in dit en in het voorgaande Voorstel vermeld, niet voor den driehoek, het vierkant, of den zeshoek, die men op eenvoudiger wyzen beschryven kan; doch wel voor den vyfhoek.

XII. VOORSTEL. Fig. 79. of 162.

Indien men uit het stip E van den omtrek de choorde EF trekt, die de zyde is van eenen veelhoek van g zyden, en de choorde IE, die de zyde is van een veelhoek van G zyden: zal de boog FI zo veele zyden bevatten van eenen veelhoek waarvan het getal zyden $G \times g$ zyn zal, als 'er eenheeden in het verschil van G en g begreepen zyn.

BEWYS. Uit het 1. Gev. van het VIII. Voorstel.

I. GEVOLG.

De choorde van den boog FI zelf zal de zyde zyn van eenen veelhoek van $\frac{G \times g}{G - g}$ zyden: en dus, zo

$\frac{G \times g}{G - g}$ een geheel *getal is*, en gevolglyk, zo Gg een veelvoud *van G — g* is, zal die veelhoek in den cirkel *beschreeven kunnen* worden. Insgelyks, indien G × g geen veelvoud is van G — g, maar G — g gelyk *is* aan 2, of eenige magt van 2, zal de veelhoek beschreeven kunnen worden: want de boog F I zal zo veel zyden van den veelhoek bevatten als die magt van 2 bedraagt; en dus kan men door eene herhaalde verdeeling in twee deelen, welke *geometrisch* geschiedt, den boog voor ieder zyde bepaalen: dat niet geschieden kan zo G — *g* = 3, of 5, of 6 enz. is. By voorbeeld, zo E F de zyde was van eenen driehoek, en I E die van eenen vyfhoek, zoude de boog I F twee zyden van eenen vyftienhoek bevatten. Men kan dus nu het 16. Werkstuk van het V. Boek oplossen.

II. GEVOLG.

De beschryving van veelhoeken op eene gegeeven lyn hangt af van de beschryving van veelhoeken in den cirkel.

AANMERKING. Het valt zeer gemaklyk dit te verrichten door behulp van die lynen welke op den *proportionaal-passer* met het woord *Pol.* of *Polygoonen* bestempeld zyn.

XIII. VOORSTEL. Fig. 162.

Indien men den radius (C I) van den Cirkel in uiterste en middelste reeden deelt in Z, is het grootste stuk C Z de zyde van den tienhoek in den cirkel beschreeven.

BEREIDING. Men stelle I E = C Z; men trekke C E, E Z,

Uit II. 10, Gev. 1, is

$\angle$ CIE = $\angle$ CEI = 2 $\angle$ ICE

maar $\angle$ CIE + $\angle$ CEI + ICE = 2 L: (I. 7)

dus 5 $\angle$ ICE = 2 L

en

en $L\,ICE = \frac{2\,L}{5} = \frac{4\,L}{10}$

dus $IE = CZ$ de zyde van den tienhoek (VIII Voorstel Gev. 1.)

I. GEVOLG.

Dus is de zyde van den tienhoek onmeetbaar met betrekking tot den radius (IV, 7. 6 Aanmerking.)

II. GEVOLG.

De loodlyn (CK) van den vyfhoek is de helft der som van den radius (of zyde der zeshoeks) en van de zyde des tienhoeks te samen genomen.

EUCL. XIV. 1.

BEWYS. Zo $IF = IE = CZ$ de zyde des tienhoeks is, is FE de zyde des vyfhoeks: en CK de loodlyn (door het VIII Voorstel:)

Nu is $CK = CZ + ZK$: maar $IE = CZ = ZE$ (II. 10. Gev. I.) dus $ZK = KI$ (I, 11 Gev. 4.) dus $CK = CZ + \frac{1}{2} ZI = CZ + \frac{1}{2} (CI - CZ) = \frac{1}{2} CZ + \frac{1}{2} CI$

$= \frac{IE + CI}{2}$

III. GEVOLG.

Indien men de som van den radius of zyde des zeshoeks, en van de zyde des tienhoeks neemt, is de geheele lyn in uiterste en middelste reeden gesneeden: en het grootste dee is de radius.

Want uit dit Voorstel is CZ de zyde des tienhoeks, en

$CI : CZ = CZ : ZI$: dus

$CI : CZ + CI = CZ : CZ + CI$ of

$CI : BZ = CZ : CI$ of BC

is $CZ : BC = BC : BZ$.

EUCL. XIII. 9.

Zie verder voor de grootte van de geheele loodlyn BK, van de loodlyn CK uit het middelpunt getrokken, en van den radi-

dius CI, met betrekking tot de grootte van de zyde des vyfhoeks, No. III. en No. VI van onze aanmerkingen op het XXXI Voorstel van het XI Boek,

XIV. VOORSTEL. Fig. 162.

Het vierkant van de zyde des vyfhoeks is gelyk aan de som der vierkanten van de zyde van den tienhoek, en van de zyde van den zeshoek, of van den radius.

EUCL. XIII, 10.

BEREIDING. Zy C*b* loodrecht op IE, of op de zyde des tienhoeks, en dus I*b* = *b*E: Men trekke, uit *I*, IO, naar het stip O daar C*b* de lyn FE, zyde des vyfhoeks, snydt: dus is IO = OE.

BEWYS. ∠ ECO = $\frac{1}{2}$ ∠ ICE: ∠ IFE = ½ ∠ ICE (V, 3) dus ∠ ECO = ∠ IFE: Maar ∠ IFC = 2 ∠ FCI, (om dat FI de zyde is van den tienhoek) = ∠ FCE: dus ∠ FCE — ∠ ECO = ∠ IFC — ∠ IFE: of ∠ OCF = ∠ CFO: en dus 1° OC = FO: 2° de derde ∠ COF = ∠ FCE. en △ FCO ∽ △ FCE

dus

FE: FC = FC: FO

Insgelyks △ EIO ∽ △ FIE: en dus

FE: IE = IE: OE:

en dus (IV. 7. Gev. 5.)

□ op IE + □ op FC = rechth. uit OE, FE + rechth. uit FO, FE = recht uit FE, FE = □ op FE

I. GEVOLG.

Uit dit Voorstel, en het eerste Gevolg van het XIII, blykt dat de zyde van den vyfhoek onmeetbaar is met betrekking tot den radius: en insgelyks tot de zyde des tienhoeks.

II. GEVOLG.

Het vierkant van de zyde (FE) van den vyfhoek, te samen met het vierkant van de choorde (FB) die twee zyden van

den

den vyfhoek bespant, is gelyk aan vyf maalen het vierkant van de zyde des zeshoeks, of van den radius.

Want □ op FB + □ op FI = □ op BI = 4 □ op CI. maar □ op FE = □ op FI + □ op CI: dus □ op FB + □ op FE + □ op FI = 4 □ op CI + □ op FI + □ op CI: of □ op FB + □ op FE = 5 □ op CI. EUCL. XIV, 2, *Lemma*.

III. GEVOLG. Fig. 163.

Indien men op de middellyn AB, uit het middelpunt C, de loodlyn CD trekt; vervolgens den radius CB in twee gelyke deelen deelt in E; DE trekt, en uit E met den radius ED den boog DF beschryft, zal de choorde FD de zyde van den vyfhoek, en het stuk FC die van den tienhoek zyn in den cirkel beschreeven:

Want, Rechth. uit BF, FC, + □ op CE = □ op FE = □ op DE (II, 4, Gev.)

maar □ op DE = □ op DC + □ op CE (II, 7)

dus rechth. uit BF, FC = □ op DC = □ op BC

dus BF: BC = BC: FC (IV, 7. Gev. 5.) en

BF—BC: BC = BC—FC: FC (III, 8. N°. 2.)

of FC: BC of AC = AF: FC

of AC: FC = FC: AF;

en dus is de radius AC in uiterste en middelste reeden gesneeden: gevolglyk is FC de zyde van den tienhoek: (XIII Voorstel) en dus daar □ op FC + □ op CD = □ op FD is FD de zyde van den vyfhoek. (door dit Voorstel)

AANMERKING. Dit gevolg is by EUCLIDES de 10. propositie van het X Boek: en het levert die gemaklyke wyze op om eenen vyfhoek en eenen tienhoek in den Cirkel te beschryven, welke PTOLEMAEUS heeft voorgesteld. *Almagestum* I B. Cap 9.

XV. VOORSTEL. Fig. 162.

De inhoud van eenen vyfhoek in den cirkel beschreeven, is gelyk aan den rechthoek begreepen onder vyf zesde gedeel-

deelten van de choorde die twee zyden van den vyfhoek bespant, en anderhalf maal den radius

EUCL. XV, 4, *Lemma.*

BEWYS. Daar △ FEC gelykbeenig is, is △ FCE = Rechth. uit ½ CE en FS = Rechth. uit ½ CE en ⅝ FS = Rechth. uit ½ CE en ⅝ FD: en dus is 5 △ FCE = vyfhoek FEDBAF = 5 Rechth. uit ½ CE en ⅝ FD: = Rechth. uit 1½ CE en ⅝ FD.

XVI. VOORSTEL. Fig. 144.

Het vierkant van de zyde des gelykzydigen driehoeks in den cirkel beschreeven is het drievoud van het vierkant op de zyde van den zeshoek, of op den radius: of ook gelyk aan den rechthoek uit de middellyn en de loodlyn uit den top des driehoeks op de grondlyn nedergelaten.

EUCL. XIII. 12.

BEWYS. ¼ □ op DF = □ op DX = □ op CD — □ op CX (II, 7.)

maar □ op CX = ¼ □ op CE of CD (VIII Voorst. 3 Gev.)

en dus ¼ □ op DF = ¾ □ op CD, of

□ op DF = 3 □ op CD. D. T. B. W. 1.

of □ op DF = Rechth. uit CD en 3 CD,

= Rechth. uit 2 CD en $\frac{3}{2}$ CD

maar $\frac{3}{2}$ CD = AX (VIII Voorst. 3 Gev.)

dus □ op DF = recht uit 2 CD en AX. D. T. B. W. 2.

AANMERKING. Zie STEDMAN *Phil. Transf.* vol. LXVI. p. 299: waar op HORSLEY zeer wel aanmerkt dat dit slechts een gevolg is van het geen in het algemeen voor *alle driehoeken* plaats heeft: dat namelyk de Rechthoek van twee zyden des driehoeks (welke rechthoek in den gelykzydigen driehoek met het vierkant der zyde overeenkomt) gelyk is aan den rechthoek uit de middellyn des cirkels om den driehoek beschreeven, en de loodlyn uit den hoek dien de eerstgemelde zyden bevatten op de derde zyde nedergelaa-

laaten: het geen zeer gemaklyk uit de leere der gelykvormige driehoeken beweezen wordt.

Want Fig. 159. △ ABI ∽ △ BFD:
om dat ∠ BAI = ∠ BFD = ∠
∠ AIC = ∠ BDF: dus ∠ ABI = ∠ EBD:
en daarom (IV. 2) AB: BI = BF: BD: en
dus (IV. 7. Gev. 5.)
Rechth. uit AB, BD = Rechth. uit BI, BF.

GEVOLG.

De zyde des driehoeks is dus met betrekking tot den radius onmeetbaar: en wy hebben reeds gezien dat het zelfde voor de zyde van het vierkant (VIII Voorstel, 4 Gevolg) voor die van den vyfhoek en voor die van den tienhoek plaats heeft (XIV. Voorstel Gev. 1.)

XVII. VOORSTEL. Fig. 162.

Wanneer men de boogen, welke de zyden van eenen regelmatigen veelhoek in den cirkel beschreeven bespannen, in twee gelyke deelen deelt, zullen de choorden van die boogen eenen nieuwen regelmatigen veelhoek uitmaaken die tweemaal zo veel zyden zal hebben als de gegeeven veelhoek: 2o. Ieder zyde (IE) van dien nieuwen of *volgenden* veelhoek staat tot de helft (KE) van de zyde des eersten, of *voorgaanden* veelhoeks, in onderdubbelde reeden van de middellyn (BI) tot het gedeelte (BK) van dezelve door de zyde des voorgaanden veelhoeks afgesneeden: 3o. De omtrekken der beide veelhoeken staan tot elkander in de zelfde reeden: 4o. De inhoud van den nieuwen of *volgenden* veelhoek staat tot dien van den eersten of *voorgaanden*, zo als de radius (CI) van den cirkel tot de loodlyn (CK) van den eersten veelhoek; of 5o. zo als de zyde FE van dien voorgaanden veelhoek: tot de loodlyn (FS) van het uiteinde (F) van deeze zyde (FE) op den

den radius (CE) getrokken, of eindelyk 6°. in onderdubbelde reeden van de middellyn (TE) en het ſtuk TS van dezelve middellyn,

BEWYS. Het I. gedeelte ſpreekt van zelf.

VOOR HET II. en III. Indien de zyde FE in twee gelyke deelen in K verdeeld is, en de middellyn IKB uit K op dezelve rechthoekig getrokken is, uit V, 4, en uit de gelykvormigheid der △△ IKE en IBE (IV, 2.);

VOOR HET IV. Uit de beſchouwing, dat zo *g* het getal zyden in den eerſten veelhoek is, die veelhoek gelyk is aan 2 g × △ KCE: en de volgende veelhoek aan 2 g × △ ICE; welke driehoeken tot elkander ſtaan = CK: CI: — en dus ſtaat de *volgende* veelhoek tot den *voorgaanden* als CI: CK.

VOOR HET V. en VI. Uit de gelykvormigheid der driehoeken FSE en CEK, is CK: CE of CI = FS: EF = √ST: √TE; (IV, 12: het 3 Gev.) en dus de *volgende* veelhoek tot den *voorgaanden* als FE: FS = √ TE: √ TS.

I. AANMERKING. Het laatſte gedeelte is het ſchoon *Theorema* door den Heer HENNERT in het V deel der *Verhandelingen van de Hollandſche Maatſchappy* bl. 250 gegeeven; wy hebben het hier op eene eenvouwdiger wyze beweezen. De Heer HENNERT gebruikt andere woorden: namelyk voor FS hoekmaat of *ſinus* van den ∠ FCE of middelpuntshoek; voor FE of dubbele KE, dubbele hoekmaat van den halven middelpuntshoek: voor ST verkeerde hoekmaat, (ſinus verſus) van ∠ TCF, of ſupplement van den middelpuntshoek FCE: welke benaamingen wy in het VIII Boek zullen uitleggen.

I. GEVOLG.

De omtrek van eenen regelmatigen veelhoek in den cirkel beſchreeven is kleiner dan de omtrek van eenen regelmatigen veelhoek, insgelyks in denzelfden cirkel beſchreeven, doch die een dubbeld getal zyden heeft.

II. GE-

II. GEVOLG.

De inhoud van eenen regelmatigen veelhoek in eenen cirkel beschreeven is kleiner dan die van eenen regelmatigen veelhoek, insgelyks in den zelfden cirkel beschreeven, doch die een dubbeld getal zyden heeft.

III. GEVOLG.

Daar de veelhoek op FE: veelhoek op IE = CK: CI: en CK: CI = CK: CE = FT: TE; zo is een veelhoek in den cirkel beschreeven, tot den veelhoek insgelyks in den cirkel beschreeven, doch die een dubbeld getal zyden heeft, zo als de choorde van het supplement des boogs door de zyde des eerstgemelden veelhoeks bespannen, tot de middellyn.

VIETA, Oper. p. 398.

IV. GEVOLG.

Waar uit wederom volgt, dat zo men eenen veelhoek heeft die in den cirkel beschreeven is, en men door verdeeling der bogen in twee gelyke deelen eenen tweeden veelhoek beschryft, die dus een dubbeld getal zyden heeft, vervolgens eenen derden, die wederom een dubbeld getal zyden heeft, en dan eenen vierden enz. de eerste veelhoek zal zyn tot den laatsten (stel den n^{sten}) zo als de samengestelde reeden van alle de choorden der supplement-boogen, tot de magt $n-1$ van de middellyn.

Dit is een voorstel van VIETA (Oper. p. 399:) het welk tot het vinden van den inhoud des cirkels zeer nuttig kan zyn.

V. GEVOLG.

Door het laatste gedeelte van dit Voorstel kan men den inhoud van eenen veelhoek, door middel van eenen veelhoek die maar de helft van het getal zyden heeft, dat is, den inhoud van eenen *volgenden* door middel van eenen *voorgaanden* veelhoek berekenen: en daar men als dan getalen moe

gebruiken, zal men op het geen wy in het VII Voorftel van het IV Boek, het 8 Gev. en de Aanm. daarop gezegd hebben, moeten letten. Die uitdrukkingen dus gebruikende, is het getal waar door de inhoud van den voorgaanden veelhoek uitgedrukt wordt $= 2g \times \triangle CKE = g \times CK \times KE$: en dus is

Volgende veelhoek *tot* $g \times CK \times KE = CI : CK$: en volgende veelhoek $= \frac{g \times CK \times KE \times CI}{CK}$

$$= \frac{g \times FE \times CI}{2} = (\text{zo } CI = 1) = \frac{g \times FE}{2}$$

waar uit dit uitmuntend voorftel van Ludolf van Ceulen (in zyn Boek over den Cirkel, en ook te vinden by Snellius prop. 3.) volgt:

„ Indien men de zyde van eenen veelhoek in eenen cirkel
„ wiens radius gelyk aan de eenheid gefteld wordt, befchree-
„ ven, door het halve getal der zyden multipliceert, verkrygt
„ men den inhoud van eenen veelhoek die een dubbeld getal
„ zyden heeft, en in den zelfden cirkel befchreeven is."

VI. Gevolg.

Daar de volgende veelhoek $= \frac{g \times FE \times CI}{2}$ is, zo is een veelhoek gelyk aan eenen driehoek wiens hoogte de radius is en wiens grondlyn de omtrek is van eenen veelhoek die maar half zo veel zyden als de gegeeven veelhoek heeft.

Dit is een zeer gewigtig Voorftel, door Huigens; in het bewys van zyne 7e propofitie *de vera Circuli magnitudine*, gegeeven.

VII. Gevolg.

Dus is de inhoud van den zeshoek tot dien van den driehoek (Fig. 144) zo als $CA : CV = 1 : 2$ (VIII Voorftel, 3e Gevolg): dus is de zeshoek het dubbeld van den driehoek. Dit is de 5e propofitie van Snellius.

VIII. GEVOLG.

Dus is de inhoud van den twaalfhoek gelyk aan de helft van zesmaal de zyde van den zeshoek gemultipliceerd door den radius; of gelyk aan drie maalen het vierkant van den radius (VIII Voorstel het 2 Gev.): of ook gelyk aan het vierkant van de zyde des gelykzydigen driehoeks (XVI Voorstel.)

Het eerste is de 5 propositie by SNELLIUS waarover men HENNERT ter aangehaalde plaatse kan nazien: en het tweede is zyne 4e propositie.

IX. GEVOLG.

Waar uit, (en uit het VIII Voorstel het 4e Gevolg) wederom volgt: dat de inhoud van den twaalfhoek tot het vierkant in den cirkel beschreeven, staat zo als 3: 2 en tot het vierkant op den diameter zo als 3: 4.

XVIII. VOORSTEL. Fig. 162.

Het vierkant van de zyde (FE) van eenen veelhoek in den cirkel beschreeven, staat tot den middelpunts driehoek (FCI) van eenen veelhoek in den zelfden cirkel beschreeven, en die een dubbeld getal zyden heeft, zo als de halve zyde (KE) des eerstgemelden veelhoeks, tot het achtste gedeelte van den radius.

BEWYS. △ CIE: △ CEK = CI: CK (IV, 6) dus

△ CIE: ½ rechth. uit CK, KE = CI: CK of

△ CIE: ½ KE = CI: 1

en dus △ CIE: □ op KE = CI: 2 KE (III. 10, het 2 Gev.)

dus

□ op FE: △ CIE = KE: ⅛ CI.

AANMERKING. Dit is de fraaie propositie van den Heer HENNERT ter aangehaalde plaatse bl. 245, doch hier veel korter beweezen. Gemelde Heer gebruikt voor KE de uitdrukking *sinus van den halven middelpunts boek*: welke uitdrukking wy in het VIII Boek verklaaren zullen.

GEVOLG.

△ CIE : □ op CI = ½ KE : CI :

dat is:

De middelpunts driehoek van eenen veelhoek tot het vierkant van den radius, zo als de helft van de zyde eens veelhoeks die maar het halve getal zyden bezit, tot den radius. HERBERT, p. 255.

(XIX. VOORSTEL. Fig. 162.)

Indien een regelmatige veelhoek (EFABDE) in eenen cirkel beschreeven is; zal de zyde (IE) van eenen regelmatigen veelhoek (EIFtA, enz.) die insgelyks in den cirkel beschreeven is, doch een dubbeld getal zyden heeft, middelevenredig zyn tusschen den radius en het verschil (QE) van de middellyn (TE) met de choorde (FT) van het supplement (TAtF) des boogs (FIE) die de zyde van den eerstgemelden veelhoek bespant.

BEREIDING. 1°. Men trekt uit C, Cb ⊥ op IE: welke de lyn KE in O snydt.

2° Door I en O de lyn IP op CE;

3° Uit T met den radius TF den boog FQ: zo dat TQ = TF: en dus QE = TE — TQ = TE — TF.

BEWYS. Uit de bereiding, en uit I, 11. Gev. 5. volgt 1° IO = OE: 2° in △ CIO en in △ CEO, ∠ CIO = ∠ CEO: waar uit 3° in △△ KOI en OPE, KO = OP, en ∠ OPE = ∠ OKI = L: dus is IP ⊥ op CE: en dus 4°. in △ CKO en △ COP, CK = CP: gevolglyk eindelyk: 5° uit △ TFE ∽ △ KCE en III, 9, CK = ½ TF: en dus CP = ½ TF.

Dit gesteld zynde is, uit △ TEI ∽ △ IPE, TE : IE = IE : PE; en dus (IV, 7: Gev. 5.)

□ op IE = Rechth. uit TE en PE

= Rechth. uit TE en (CE — CP)

= Rechth. uit TE en (CE — ½ TF)

= Rechth.

$= \text{Rechth. uit TE en } \frac{(2\,CE - TF)}{2}$

$= \text{Rechth. uit } \tfrac{1}{2}\,TE \text{ en } (TE - TF)$

$= \text{Rechth. uit CE en QE.}$

I. AANMERKING. Men vindt dit Voorstel by SNELLIUS prop. 1: en reeds by PTOLEMAEUS (*Almagestum Lib.* I. *Cap.* 2.) doch op deeze wyze uitgedrukt.

$TE : IE = IE : PE$: maar $PE = \tfrac{1}{2}\,(TE - TF) = \tfrac{1}{2}\,QE$.

GEVOLG.

Daar dan □ op IE $= \text{Rechth. uit } \frac{TE}{2} \text{ en } (TE - TF.)$

en □ op TI = □ op TE — □ op IE (II, 7 Gev. 1.)

is

□ op TI $= \text{Rechth. uit TE, TE} - \text{Rechth. uit } \frac{TE}{2} \text{ en } (TE - TF)$

$= \text{Rechth. uit } \frac{TE}{2} \text{ en } (2\,TE - TE + TF)$

$= \text{Rechth. uit } \frac{TE}{2} \text{ en } (TE + TF.)$

Dit is het vermaard Voorstel door SNELLIUS gevonden, en waar van het nut tot het vinden van den inhoud der veelhoeken zo aanmerkelyk is: namelyk

„ Het vierkant op de choorde van het supplement des „ boogs door de zyde van eenen veelhoek bespannen, is „ gelyk aan den rechthoek uit den radius en de som van de „ middellyn met de choorde van het supplement des boogs „ door de zyde van eenen veelhoek die slechts het halve ge„ tal zyden heeft, bespannen."

II. AANMERKING. Dit Voorstel brengt zeer veel toe om gemaklyk den omtrek van veelhoeken te vinden, waar van het getal der zyden bestendig dubbeld genomen wordt: want een veelhoek, by v. een zeshoek, of een vierkant, gegeeven zynde, bereekent men eerst door dit Voorstel

de zyde van den veelhoek die eens zo veel zyden heeft: dan, door dit Gevolg, de choorde van den supplement-boog, dan wederom door het Voorstel de zyde van den volgenden veelhoek, en zo voorts: welke berekeningen alle volgens eene bestendige orde volgen; zo als by SNELLIUS te zien is, en insgelyks by MONTUCLA *Hist. de la Quadrature du Cercle* p. 52.

XX. VOORSTEL. Fig. 80.

Indien men de naastliggende zyden (FG, FE) van eenen regelmatigen veelhoek in twee gelyke deelen verdeelt, ende stippen (L en M) dier verdeeling met lynen (LM) vereenigt, zal er 1° een nieuwe veelhoek ontstaan, die den eerstgemelden gelykvormig, en in den zelven beschreeven is: 2° deszelfs zyde zal tot de zyde van den gegeeven veelhoek staan zo als de loodlyn (CL) van den gegeeven veelhoek tot deszelfs radius, of tot dien van den cirkel daar hy in beschreeven is: 3° de omtrekken zyn in die zelfde reeden, en 4° de inhouden in de verdubbelde reeden; of ook 5° zo als de loodlyn (CR) van den nieuwen veelhoek tot den radius (CF) van den gegeevenen.

BEWYS. VOOR HET I. uit het XVIII. van het II B. en zie de 1 bepaaling van dit Boek.

VOOR HET II en III. vervolgens uit de gelykvormigheid der driehoeken LRF, CLF en CLR.

VOOR HET IV: uit het XVII Voorstel van het IV Boek.

VOOR HET V: uit de beschouwing dat die veelhoeken onderling zyn $= \triangle$ CLR: $\triangle$ CLF en dus (IV, 6) zo als CR: CF.

AANMERKING. Wy zullen in het IV Gevolg van het volgend Voorstel dien veelhoek den veelhoek in den gegeeven veelhoek beschreeven noemen: de reden blykt uit de 2. Aanmerking op de eerste bepaaling.

XXI. VOOR-

XXI. VOORSTEL. Fig. 162.

Indien men de straalen (CF, CE) van eenen in den cirkel beschreevenen veelhoek (FEDBAF) verlengt, tot dat zy de raaklyn (NG), uit het stip (I), alwaar de verlengde loodlyn (CI) den omtrek snydt, getrokken, ontmoeten (in N en G) zal het stuk (NG), dat men op die wyze van de gemelde raaklyn afsnydt, de zyde zyn van eenen regelmatigen en gelykvormigen veelhoek om den cirkel beschreeven: of, indien men de aangrenzende zyden (DE, en EF) van den veelhoek in den cirkel beschreeven, in twee gelyke deelen deelt, en uit het middelpunt (C,) door de snydings stippen (R, en K) lynen (CRU, en CKV) trekt tot dat zy de raaklyn (VU) ontmoeten die in het stip (E) daar de gemelde zyden (FE en DE) samenkomen getrokken is, zal het gedeelte (VU) van die raaklyn, tusschen de gemelde lynen begreepen, ook de zyde zyn van eenen gelykvormigen veelhoek zo wel om den cirkel als om den eerstgemelden veelhoek beschreeven.

Verder, de zyde (NG of VU) van den veelhoek om den cirkel staat tot de zyde (FE of IL) van den veelhoek in den cirkel, zo als de *radius* (CI) van den cirkel, tot de loodlyn (CR) van den veelhoek in den cirkel: de omtrekken staan in de zelfde reeden: en de inhouden in de zelfde reeden doch verdubbeld, of wel zo als de radius van den cirkel tot de loodlyn (CQ) van den veelhoek die in den gegeeven veelhoek, (FEDBAF) beschreeven is.

BEWYS. VOOR HET I. en II. Uit de gelykheid der driehoeken NCI en VCE, door het IX Voorstel van het I. Boek.

VOOR HET III. Uit de gelykvormige driehoeken CKE en CIG: —— vervolgens uit IV, 18 en 17: eindelyk uit

 de

de beschouwing dat de gelykvormige veelhoeken om en in den cirkel tot elkander staan als △ CIG: △ CKE = IG: KQ (IV, 6) = CI: CQ.

I. GEVOLG.

Het blykt uit dit Voorstel hoe men eenen regelmatigen en gelykvormigen veelhoek om eenen gegeeven regelmatigen veelhoek of om eenen cirkel beschryven kan: en dat er geen regelmatige veelhoeken om veelhoeken, of om cirkels, beschreeven kunnen worden dan die welke men in den cirkel beschryven kan: waardoor men het 2, 4, 7, 8, 12 en 18. Werkstuk van het V Boek der Werkstukken kan oplossen.

II. GEVOLG.

Zo dra de zyde van eenen veelhoek in den cirkel beschreeven gegeeven is, kent men de zyde van den gelykvormigen veelhoek die om den cirkel beschreeven kan worden.

III. GEVOLG.

De zyde van het vierkant om den cirkel beschreeven, is gelyk aan de middellyn: en dus is deszelfs inhoud het dubbeld van het vierkant in den cirkel beschreeven (VIII. Voorstel het 4 Gevolg.)

IV. GEVOLG.

De zyde van den veelhoek om den cirkel of om eenen veelhoek beschreeven, heeft tot de zyde van dien veelhoek de zelfde reeden als deeze zyde tot de zyde van den veelhoek in den laatstgemelden of den gegeeven veelhoek beschreeven: dat is (door het voorgaand en door dit Voorstel.)

VU: IL (of FE) = IL (of FE): RK; en dus

„ Is de zyde van dien gegeeven veelhoek middenevenree-
„ dig tusschen de zyde van den veelhoek in denzelven, en
„ de

„ de zyde van den veelhoek om denzelven beschreeven; en
„ insgelyks is het met de inhouden geleegen."

Want □ op VU : □ op FE = □ op FE : □ op RK :
en dus (IV : 17)

Veelhoek op VU : veelh. op FE = veelh. op FE :
veelh. op RK.

V. GEVOLG.

Indien men de lyn FD trekt, zyn de △△ RKE en FDE gelykvormig en dus is

KE : RK, = FE : FD :
maar KE = ½ FE : dus RK = ½ FD
waar uit het voorgaande gevolg dit wordt

VU : FE = FE : ½ FD : dat is in woorden: „ de zyde
„ van eenen in den cirkel beschreeven veelhoek, is middene-
„ venreedig tusschen de zyde van eenen gelykvormigen veel-
„ hoek om den cirkel beschreeven, en de halve zyde van
„ eenen veelhoek, insgelyks in den cirkel beschreeven; doch
„ die slechts de helft van het getal zyden des gegeeven veel-
„ hoeks bezit.

HUIGENS de *Circuli magnitudine*, prop. 13.

VI. GEVOLG.

Uit het IV Gevolg blykt al verder dat het verschil der inhouden van den regelmatigen veelhoek om den cirkel en van den gelykvormigen in den cirkel beschreeven, tot den inhoud van den eerstgemelden veelhoek staat, in verdubbelde reeden van de zyde des veelhoeks in den cirkel, tot de middellyn:

Want daar veelh. op VU : veelh op FE = veelh. op FE : veelh. op RK
is (III 8, N°. 3)

veelh. op VU — veelh. op FE : veelh. op VU =
veelh. op FE — veelh. op RK : veelh. op FE =
△ RQE : △ RCE = QE : CE (IV. 6.)
maar QE : RE = RE : CE (IV. 12. Gev. 2.)
en RE : CE = RE : CE

dus

dus QE : CE = $\overline{RE}^2$: $\overline{CE}^2$: (III., 19) en dus : veelh. op VU — veelh. op FE : veelh. op VU = $\overline{RE}^2$: $\overline{CE}^2$ = $\overline{FE}^2$: $\overline{TE}^2$:

VII. GEVOLG.

Dus is het gemelde verschil gelyk aan eenen gelykvormigen veelhoek die beschreeven zoude worden om eenen cirkel waar van de zyde FE des gegeeven veelhoeks de middellyn zoude zyn. (IX Voorstel.)

DU FAY *Mem. de l'Acad.* 1729: p. 297.

VIII. GEVOLG.

Dus is het gemelde verschil ook gelyk aan den veelhoek die gevormd wordt door de ontmoeting der lynen die, of de uiteinden der evenwydige zyden van den gegeeven veelhoek, zo deszelfs zyden *even* zyn, verëénigen, of die loodrecht op de zyden getrokken worden, indien het getal der zyden *oneeven* is. (Voorgaande Gevolg en XV. en XVI. Voorstel van het II. Boek.) Want, in die veelhoeken, is de loodlyn de helft van de zyde des gegeeven veelhoeks, en dus radius van den cirkel in die veelhoeken beschreeven.

DU FAY ibid p. 299.

XXII. VOORSTEL. Fig. 162.

Indien men uit het middelpunt (C) des cirkels loodlynen (CI, CL) nederlaat op de aan elkander liggende zyden (NG, Ga) van eenen regelmatigen veelhoek (NGa) om den cirkel beschreeven, en men trekt eenen radius (CEG) naar den hoek (G) welken de gemelde zyden onderling maken: zo men eindelyk de hoeken (ICG, GCK) welke die straal met de gemelde loodlynen wederzyds maakt, in twee gelyke deelen deelt, door lynen CX, CY, die tot de zyden (NG, Ga) des veelhoeks (in X en Y) verlengd worden, zal het volgende plaats hebben:

1°. De

1°. De lyn XY, die de gemelde snydings-stippen veréénigt, zal de zyde zyn van eenen nieuwen veelhoek om den cirkel beschreeven, doch waarvan de zyden het dubbeld in getal zullen zyn.

2°. Ieder zyde XY van dien nieuwen veelhoek staat tot de zyde van den gegeeven veelhoek, zo als de radius (CE) van den cirkel tot de som van den radius des cirkels, en den radius (CG) des gegeeven veelhoeks:

3°. De omtrekken der beide veelhoeken, van den nieuwen en van den gegeeven, staan tot elkander, zo als de middellyn van den cirkel tot de som van den radius des cirkels en den radius des eersten veelhoeks:

4°. En de inhouden staan in de zelfde reeden.

BEWYS. VOOR HET I. Uit de gelykheid der △△ CIX en CYL, volgt CX = CY, IX = LY, en dus XG = GY: waar uit (I., 12. het 3. Gevolg) volgt CE ⊥ op XY: en dan uit △ ICX = △ XCE, CE = CI: dus raakt het stip E den cirkel, en is IX = XE: insgelyks EY = LY.

VOOR HET II. Uit IV., 9.: en dan uit de famentelling der reedens, door III. 8 No 1.

VOOR HET III. Uit de beschouwing dat zo de omtrek van den gegeeven veelhoek is g × IG: die van den nieuwen zyn zal 2 g × IX of XE.

VOOR HET IV. Uit de beschouwing dat de inhouden zyn in samengestelde reeden van de omtrekken en de loodlynen (II. 17, en IV, 7.) en dat hier de loodlyn voor beide de veelhoeken dezelfde is, namelyk de radius van den cirkel.

I. GEVOLG.

De zyde van eenen veelhoek, om den cirkel beschreeven, is kleiner dan de zyde van eenen veelhoek ins-

insgelyks om denzelfden cirkel beschreeven, doch die slechts half zo veel zyden heeft.

II. GEVOLG.

De omtrek of de inhoud van den eerstgemelden, is ook kleiner dan de omtrek of de inhoud van den laatstgemelden.

III. GEVOLG.

De zyde van eenen veelhoek om den cirkel beschreeven, staat tot de zyde van den veelhoek in den cirkel beschreeven, doch waarvan het getal zyden maar half zo groot is, zoals de radius van den cirkel tot de som van den radius des cirkels en de loodlyn des laatstgemelden veelhoeks.

Want, door ons voorstel is

IX : IG = CI : CI + CG = CK : CK + CE : maar
IG : KE = CI : CK

dus (III. 10)

IX : KE = CI : CK + CE = XY : FE

IV GEVOLG.

Dus is de zyde van den zeshoek om den cirkel tot de zyde des driehoeks in den cirkel, zoals R : ½ R + R 2 = : 3. (VIII. Voorstel, 3. Gev.)

SNELLIUS prop. 7.

XXIII. VOORSTEL. Fig. 162.

Een veelhoek in den cirkel beschreeven is middel-evenreedig tusschen eenen veelhoek in den cirkel, en eenen veelhoek om den cirkel, doch die beiden slechts het halve getal zyden van den gegeeven veelhoek bezitten: en de veelhoek om den cirkel is *harmonisch* middelevenreedig tusschen den gelykvormigen veelhoek in den zelfden cirkel beschreeven, en den veelhoek om den cirkel beschreeven, doch die slechts het halve getal zyden bezit.

SNELLIUS prop. 9. voor het I. gedeelte.

SAURIN, *Mem. de l'Acad.* 1713. : p. 10. voor het II. ged.

VOOR HET I. GEDEELTE. BEREIDING. Zo IE de zyde is van den veelhoek in den cirkel, zyn FE en NG de zyden van de veelhoeken in en om den cirkel, die slechts het halve getal zyden hebben: en dus zyn die drie veelhoeken als

2 △ ICE : △ FCE : △ NCG = △ ICE : △ KCE : △ ICG.

BEWYS. △ KCE : △ ICE = KQ : IP
= CK : CI
= CE : CG.

△ ICE : △ ICG = KE : IG = CE : CG:

dus

△ KCE : △ ICE = △ ICE : △ ICG of

veelh. op FE : veelh. op IE = veelh. op IE : veelh. op NG

DTBW.

VOOR HET II. GEDEELTE. BEREIDING. Zo NG en FE de zyden zyn van gelykvormige veelhoeken om en in den cirkel, zal IL = FD de zyde zyn van eenen veelhoek in den cirkel, die het halve getal zyden heeft: en dus indien men CL tot aan de raaklyn NIH trekt, is IH de halve zyde van den veelhoek om den cirkel, welke dus het halve getal zyden bezit: en dus zyn de veelhoeken op NG, FE, en het dubbeld van IH, als de △△ NCG, FCE, en ICH.

of als

Het stuk ICLG, dat = △ NCG is, △ ICL, die = △ FCE is en △ ICH.

Daar nu volgens de 22 bepaling van het III. Boek drie grootheeden *harmonisch* evenredig zyn, wanneer de eerste staat tot de derde zo als het verschil tusschen de twee eersten tot het verschil tusschen de twee laatsten, moet men bewyzen dat,

△ ICL : △ ICH = stuk ICLG — △ ICL : △ ICH — stuk ICLG.

of

of

$$\triangle ICL : \triangle ICH = \triangle ILG : \triangle GLH.$$

BEWYS. $\triangle ICL : \triangle ICH = CL : CH = CI : CH$

$\triangle ILG : \triangle GLH = IG : GH = CI : CH$ (IV. 9.)

dus

$\triangle ICL : \triangle ICH = \triangle ILG : \triangle GLH$: en dus veelhoek op het dubbeld NG *harmonisch* middenevenreedig tusschen veelhoek op FE, en veelhoek op het dubbeld van IH.

AANMERKING. Dus is, by voorbeeld, volgens het I. gedeelte van dit Voorstel, de zeshoek in den cirkel midden evenreedig tusschen den driehoek in en den driehoek om den cirkel: en de zeshoek om den cirkel is *harmonisch* middenevenredig tusschen den zeshoek in den cirkel, en den driehoek om den cirkel.

XXIV. VOORSTEL. Fig. 129.

Indien men in den cirkel eenen regelmatigen veelhoek beschryft, waarvan het getal der zyden even is; de middellyn (AE) door twee tegen elkander overstaande hoeken trekt, zo als ook uit het uiteinde (E) van die middellyn de choorde (EB) naar het einde der zyde (AB) aan die middellyn grenzende: en zo men eindelyk de zyden, (AB en AH, BC en HG) enz. die op gelyken afstand van de middellyn zyn door rechte lynen (BH, CG, DF) die allen de middellyn rechthoekig snyden vereenigt; zal de rechthoek uit de middellyn (AE) en de gemelde choorde (BE) gelyk zyn aan den rechthoek uit de zyde (AB) van den veelhoek, en de som van alle de lynen (BH, CG, DF) die de zyden vereenigen.

ARCHIMEDES, *de Sphaera et Cylindro*: pr. 21.

BEREIDING. Men trekt CH, DH, DG enz. die de middellyn in L, M, N snyden.

BEWYS. Uit de gelykvormigheid der driehoeken, ABK, LKH, LCM, MGN, NDO, OFE, volgt de geduurige evenreedigheid van BK : KA = HK : KL =

CM:

CM : ML = GM : MN = DO : ON = FO : OE en uit III. 17. die van BK : KA zo als de som der voorgaanden tot die der volgenden: en daar uit (door IV. 7. Gev. 5.) de gelykheid der gemelde rechthoeken.

I. AANMERKING. De rechthoek moet een getal zyden bezitten dat eeven is, want anders is de lyn AE geen middellyn, en de lynen BH, CG, DF, zyn niet evenwydig aan elkander, waar op de gelykvormigheid der driehoeken rust.

II. AANMERKING. Heeft dit Voorstel plaats in het algemeen, zo heeft het ook plaats in die regelmatige veelhoeken, waarvan het getal zyden niet alleen even, maar ook eene vermenigvuldiging van vier is: en het is in dien zin, dat TACQUET dit Voorstel van ARCHIMEDES opgeeft, in zyne *Theemata selecta ex Archimede* pr. 16.: om dat het alleen dat geval is, dat door ARCHIMEDES zelven, ter bepaling van den inhoud eens kloots, gebruikt wordt, in Gevolg 2. op dit Voorstel: Zie ons XII. B. 13 en 14 Voorstel.

XXV. VOORSTEL. Fig. 129.

Indien men in een cirkel stuk (DAF) waarvan de grondlyn (DF) rechthoekig staat op de middellyn, een regelmatigen veelhoek beschryft, waarvan het getal zyden even is: en men trekt de choorde (BE) van het einde eener zyde (AB) die aan de middellyn grenst naar het einde der middellyn, zal de rechthoek uit die choorde, en het gedeelte (AO) der middellyn tot aan de ontmoeting van de grondlyn (DOF) begrepen, gelyk zyn aan den rechthoek uit eene zyde (BA) des veelhoeks, en de som van alle de lynen (BK, CM, DO) die de zyden des veelhoeks op dezelfde wyze als in het voorgaand Voorstel vereenigen.

ARCHIMEDES *de Sphaera et Cylindro*, pr. 23.

BEREIDING. De zelfde als in het voorgaand Voorstel.

BEWYS. Uit de gelykvormigheid der driehoeken ABE, ABK, BKL, LCM, MGN, NDO, wordt afgeleid:

AB:

$AB : BE = AK : BK = LK : HK = LM : CM = MN : MG = NO : OD$:

Waar uit door III. 17. $AB : BE$ zo als de som van alle de voorgaanden tot die der volgenden: en daar uit volgt (door IV. 7. Gevolg 5.) de gelykheid der bewuste rechthoeken.

AANMERKING. De beide aanmerkingen, op het voorgaand Voorstel gemaakt, gelden hier ook.

GEVOLG.

In het bewys heeft men gezien dat
$AB : BE = AK + KL + LM + MN + NO + OE$
(zo men den geheelen cirkel neemt) : $BK + HK + CM + MG + DO + OF$:

of dus

$AB : BE = AE : 2\,(BK + CM + DO)$.

Wy zullen dit Voorstel, door VIETA opgegeven, (*Oper.* p. 315.) in het XXII. Voorstel van het VIII. Boek gebruiken.

XXVI. VOORSTEL. Fig. 162.

Indien men in een cirkel stuk (FIELD) eenen gelykbeenigen driehoek (FED) beschryft, en wederom eenen gelykbeenigen driehoek (FIE, ELD) in ieder der cirkelstukken die door de zyden (FE, ED) van den eerstgemelden driehoek (FED) gemaakt worden, zal deeze driehoek (FED) kleiner zyn dan het viervouwd der beide andere driehoeken (FIE, ELD) te samen genomen.

HUIGENS de *Circuli Magn.* pr. 1.

BEREIDING. Men trekke IL, en dan EC loodrecht: waaruit volgt: $FE = ED$, $= IL$: en $\triangle IEL = \triangle ELD = \triangle FIE$.

BEWYS. $\square$ op FE : $\square$ op $IE = ES : EP$. (V. 5. Gev. 2.)

Maar $FI = IE$, en $FI + IE > FE$ (I, 14.)

dus $FE < 2\,IE$:

dus $\square$ op FE : $\square$ op $IE < 4 : 1$: dus

$ES : EP < 4 : 1$.

Ins-

Insgelyks FD : IL of FE $\prec$ 2 : 1.

dus ES $\times$ FD : EP $\times$ IL $\prec$ 8 : 1.

Maar $\triangle$FED : $\triangle$IEL = ES . FD : EP . IL (IV. 1.)

dus $\triangle$FED : $\triangle$IEL $\prec$ 8 : 1. of

$\triangle$FED $\prec$ 8 $\triangle$IEL: en dus

$\triangle$FED $\prec$ 4 ($\triangle$FIE + $\triangle$ELD)

XXVII. VOORSTEL. Fig. 162.

Indien men in een cirkelstuk (IEL) dat kleiner is dan een halve cirkel, eenen gelykbeenigen driehoek (IEL) beschryft, en voorts op de zelfde grondlyn (IL) eenen gelykbeenigen driehoek (IGL) wiens beenen (IG, LG) raaklynen zyn van de zelfde cirkelbogen (IE, LE): zal de raaklyn (XEY) die door den top E des eerstgemelden driehoeks (IEL) getrokken wordt, van den laatstgemelden (IGL) eenen driehoek (XGY) afsnyden, die grooter is dan de helft van den eerstgemelden (IEL).

HUIGENS de *vera Circuli Magn.* pr. 2.

BEREIDING. Men trekke door G en E de lyn GEC, die dus op IL loodrecht valt (I. 11. het 5. Gevolg).

BEWYS. $\triangle$IGL : $\triangle$IEL = GP : EP (IV. 7. het 1 Gev.)

= IG : IX (IV. 2.)

$\triangle$XGY : $\triangle$IGL = $\overline{GX}^2$: $\overline{IG}^2$

dus $\triangle$XGY : $\triangle$IEL = $\overline{GX}^2$: IX . IG

Maar GX $\succ$ IX, en $\succ$ $\frac{1}{2}$ IG: (XXII. Voorst. Gev. 1.)

dus $\overline{GX}^2$ $\succ$ $\frac{1}{2}$ IX . IG: en dus

$\triangle$XGY $\succ$ $\frac{1}{2}$ $\triangle$IEL.

II. AFDEELING.

OVER DE VEELHOEKEN DIE DOOR HET TREKKEN VAN DIAGONALEN IN EN UIT ANDERE VEELHOEKEN GEVORMD WORDEN.

XXVIII. VOORSTEL. Fig. 144, 166.

In alle veelhoeken kan men zo veele *diagonalen*, of lynen die van eenen hoek naar de andere hoeken gaan, trekken, als 'er eenheden zyn in het getal $\frac{g \times (g-3)}{2}$; indien g het getal der zyden uitdrukt.

LEXEL, *Novi Commentarii Petropol.* T. XIX. p. 231.

BEWYS. Er zyn g hoeken in de figuur: dus, indien men A niet mede rekent, $g-1$: gevolglyk kan men uit A, naar de andere hoeken $\overline{g-1}$ lynen AB, AD, AE, AF enz. trekken: uit den tweeden hoek B, kunnen $\overline{g-2}$ dergelyke en *van de vorige verschillende* lynen getrokken worden: namelyk BD, BE, BF enz.: want men telt nu de lyn BA, reeds uit A naar B getrokken, niet meede.

Uit den derden hoek zullen 'er $\overline{g-3}$ dergelyke lynen DE, DF enz. getrokken worden: en zo voorts, tot dat men aan den hoek, die op éénen na de laatste is, komt, waar uit 'er maar één getrokken zal worden: dus is de som van alle de lynen, $\overline{g-1} + \overline{g-2} + \overline{g-3} + \overline{g-4}$ ——— 1 dus is zy de som van eene arithmetische reeks, die $g-1$ leden heeft, en dus (III, 24) gelyk aan $\frac{(\overline{g-1}+1) \times \overline{g-1}}{2}$ $= \frac{g \times \overline{g-1}}{2}$: maar onder deeze lynen zyn de g zyden

van

van de figuur begrepen: de overige alleen, en niet deeze, zyn diagonalen: dus is het getal der diagonalen

$$\frac{g \times \overline{g - 1}}{2} - g = \frac{g(g-3)}{2}.$$

Men kan dus *eerste*, *tweede*, *derde* diagonalen enz. noemen, de diagonalen die van iederen hoek (A) naar den tweeden (D), of naar den derden (E), of naar den vierden (F) volgenden hoek gaan.

II. GEVOLG.

Indien dan de veelhoek regelmatig is, en dus in eenen cirkel beschreeven is of kan zyn, zal de hoek welke ieder zyde AB van den veelhoek met den *eersten*, *tweeden*, *derden* &c. diagonaal die uit het uiterste van die zyde getrokken wordt, een hoek zyn in den omtrek, die op den boog rust, welke door de zyde des veelhoeks als choorde bespand wordt, of op eenen dubbelden, driedubbelden, vierdubbelden boog, enz. rust: en dus zal die hoek gelyk zyn aan *eenen*, of aan *twee*, of aan *drie* enz. halve middelpunts hoeken: dat is, de m^e diagonaal zal met de zyde uit wier uitersten zy getrokken wordt, eenen hoek maken $= \frac{m \times 2L}{g}$ (II., 148. het 1. Gevolg.)

Die hoek zal gevolglyk recht zyn wanneer $\frac{2m}{g} = 1$: of $m = \frac{g}{2}$.

III. GEVOLG.

Doch de hoeken, welke twee agteréénvolgende diagonalen onderling maaken, (AD en AE by voorbeeld) zyn altoos halve middelpunts hoeken, en dus ieder $= \frac{2L}{g}$: gevolglyk, daar de hoek dien twee zyden onderling maaken $= \frac{\overline{g-2} \times 2L}{g}$

n, II., 14 bet 1. Gev.) *zal de hoek*, dien de m^e diagonaal uit eenen hoek getrokken, maakt met den n^e diagonaal uit den zelfden hoek getrokken, doch altoos van den anderen kant af getrokken, gelyk zyn $\frac{[g-2-(\overline{n+m})]\,2L}{g} = \frac{[g-\overline{n+m+2}]\,2L}{g}$ en dus zullen die hoeken recht zyn, wanneer $2g - 2n - 2m - 4 = g$ of $\frac{g-4}{2} = n + m$.

IV. GEVOLG.

Indien men door de letter n uitdrukt de *hoeveelste* diagonaal een diagonaal *is*, zal die n^e diagonaal *met de zyde* van den veelhoek uit welke men begint te tellen, en waaruit *hy* getrokken is $\overline{n+1}$ zyden van den veelhoek als choorde aan den eenen kant bespannen; de eerste diagonaal namelyk twee, de derde drie zyden, enz. en dus aan den anderen kant $g - (n + 1)$ zyden.

V. GEVOLG.

Zo dan g een even getal is, en $g - \overline{n+1} = n + 1$ of $g = 2n + 2$: of $\frac{g-2}{2} = n$, zal die n^e diagonaal door het middelpunt gaan, en men, zal tusschen de zyde van waar men telt, en het middelpunt, geenen van een' hoger' rang kunnen trekken: en alle de n^e diagonalen, indien n *bestendig* $= \frac{g-2}{2}$, zullen elkander in het middelpunt C ontmoeten.

Maar zo $n < \frac{g-2}{2}$ (g altoos een even getal zynde) zal men nog alvorens tot het middelpunt te komen diagonalen van een' *hoger'* rang kunnen trekken: en die van den rang n zullen elkander buiten het middelpunt ontmoeten, en dus door hunne ontmoeting verscheiden veelhoeken vormen.

men. Eindelyk zal dan het getal $\frac{g-2}{2} - 1$ of $\frac{g-4}{2}$ aanduiden, welke de diagonalen van den hoogsten rang zyn, die elkander buiten het middelpunt snyden.

VI. GEVOLG.

Maar zo g een oneven getal is, kan 'er geen diagonaal door het middelpunt gaan (II, 14 Gev. 3.) en dus ook niet de ne diagonaal, die namelyk welke aan den eenen kant $\overline{n+1}$ en aan den anderen $g - \overline{n+1}$ zyden bespant: zo dan n de hoogste diagonaal is die men trekken kan, zal dezelve $\overline{n+1}$ zyden bespannen, de volgende zal aan den anderen kant ook $\overline{n+1}$ zyden bespannen: en 'er is nog eene zyde tusschen de twee diagonalen: dus is het getal zyden, of $g = \overline{n+1} + \overline{n+1} + 1 = 2n + 3$: dus $n = \frac{g-3}{2}$ is de hoogste diagonaal dien men tusschen eene zyde en het middelpunt trekken kan, indien het getal g der zyden oneven is.

XXIX. VOORSTEL. Fig. 144, 154, 166.

Alle de diagonalen die men in eenen regelmatigen veelhoek trekken kan, zullen door hunne onderlinge ontmoetingen binnen denzelven zo veele gelykvormige veelhoeken vormen als 'er eenheden zyn in het getal $\frac{g-3}{2}$ zo het getal g der zyden oneven is; en in het getal $\frac{g-4}{2}$ zo het getal der zyden even is.

2°. Die veelhoeken zyn allen om het middelpunt des gegeeven veelhoeks regelmatig geplaatst: doch de eerste omgekeerd ten opzichte van den gegeeven: de tweede recht: de derde omgekeerd enz.: zo dat de lyn die door den top van eenen der hoeken en het middelpunt getrokken wordt, beurtlings of door de toppen der tegenovergestelde hoeken, of loodrecht door de aan elkander evenwydige zyden van de

de gevormde veelhoeken gaat, zo het getal der zyden even is; en beſtendig door den top en loodrecht door het midden der tegenoverſtaande zyde van iederen veelhoek gaat, zo het getal der zyden oneven is.

3°. Eindelyk, die veelhoeken worden gevormd, de eerſte door de ontmoeting van alle de eerſte diagonalen, de tweede door de ontmoeting van alle de tweede, de derde door de ontmoeting van alle de derde diagonalen, enz. die uit iederen hoek getrokken worden.

VOORBEELDEN. Fig. 144. In den zeshoek is $\frac{g-4}{2} = 1$, en er wordt een zeshoek UPQRST binnen den gegeeven zeshoek ABDEFG gevormd.

Fig. 154. Voor den vyfhoek is $\frac{g-3}{2} = 1$: en 'er wordt een vyfhoek QNvxy binnen den vyfhoek GBEHK gevormd.

Fig. 166. Voor den tienhoek is $\frac{g-4}{2} = 3$: en 'er worden binnen den tienhoek ABDEFHIKLG drie tienhoeken gevormd: namelyk, PQRSTVXYZU: *abcdefghik*: *lmnopqrstu*.

Verder, in Fig. 166. gaat de middellyn BCI door de toppen *c* en *h* des tweeden veelhoeks: doch beſtendig loodrecht door de zyden PQ en XV des eerſten, en de zyden

[redacted]

eenen veelhoek uit, van zo veele zyden als 'er diagonalen van den zelfden rang zyn in den gegeeven veelhoek, dat is, van zo veele zyden als de gegeeven veelhoek zyden heeft:

Dus zullen 'er $\frac{g-3}{2}$ of $\frac{g-4}{2}$ veelhoeken geboren worden, naar mate *g* oneven of even is.

Die veelhoeken zyn regelmatig: want het is klaarblykelyk dat (Fig. 144. 166.) △ ABQ = △ QDE: en △ ABP = △ DRE: en dus dat PQ = QR: *L* PQR = *L* ABD: enz. voor de hoeken en zyden van alle de driehoeken.

II. Daar (Fig. 144.) △ BQD gelykbeenig is, valt het ſtip Q op de loodlyn die uit het midden Z der zyde BD getrokken wordt, en door het middelpunt gaat: dus *L* PQC = *L* CQR: en △ PCQ = △ QCR: dus PC = CQ = CR: of C is het middelpunt van dien veelhoek: en dus ook voor alle anderen: waar uit het overige van de tweede ſtelling volgt.

III. Het derde is van zelf blykbaar.

I. GEVOLG.

Indien het getal der zyden van den gegeeven veelhoek oneven is, dienen alle de diagonalen tot de vorming van de nieuwe veelhoeken: doch zo het even is, zyn alle de diagonalen welke door het middelpunt gaan daar toe onnuttig: en deeze zyn altoos $\frac{g}{2}$ in getal. Dus zyn in Fig. 144. drie diagonalen AE, BF, DG onnuttig; in den tienhoek van Fig. 166. zyn 'er vyf AH, BI, DK, EL, FG.

II. GEVOLG.

Het valt niet moeijelyk de grootte der zyden en loodlynen van alle die veelhoeken, zo wel onderling, als met betrekking tot den gegeeven veelhoek te bepaalen: mits men hier aanneeme het geen wy in het VIII. Boek over de ſinusſen zullen zeggen.

Namelyk (Fig. 166.) zo de zyden even in getal zyn, is de loodlyn Cz de *finus* des hoeks EGF, die de helft is van den middelpuntshoek ECF.

De loodlyn Cα is de *finus* van den hoek DGF = $\frac{2}{2}$ middelpuntshoeken: de loodlyn Cβ is de *finus* van den hoek BGF die gelyk is aan $\frac{3}{2}$ middelpuntshoeken: en de loodlyn Cγ is de *cofinus* van den hoek GCγ die gelyk is aan $\frac{1}{2}$ middelpuntshoek.

Indien men dan den *binnenften* veelhoek den *eerften* noemt, en alle de anderen vervolgens, ieder in zyn' rang den II, den III, enz. heeft men deeze evenredigheid:

Loodlyn van den I: loodlyn van den II: loodlyn van den III: tot loodlyn van den IV, enz. — — — — tot loodlyn van den gegeeven veelhoek, = *finus* $\frac{1}{2}$ middelpuntshoek: *finus* $\frac{2}{2}$ middelpuntshoeken: *finus* $\frac{3}{2}$ middelpuntshoeken: *finus* $\frac{4}{2}$ middelpuntshoeken: enz. — — — — — — — — tot *cofinus* $\frac{1}{2}$ middelpuntshoek.

Doch, zo het getal der zyden *oneven* is, is L EGF = $\frac{1}{2}$ L EGH = $\frac{1}{4}$ L ECH = $\frac{1}{4}$ middelpuntshoek: vervolgens BGF = 3 EGF = $\frac{3}{4}$ ECH = $\frac{3}{4}$ middelpuntshoek: enz. altoos met $\frac{2}{4}$ middelpuntshoek opklimmende: en dus is

Loodlyn I veelhoek: loodlyn II veelhoek: loodlyn III veelh. enz. — — — — — — —: loodlyn van den gegeeven veelhoek = *finus* $\frac{1}{4}$ middelpuntshoek: *finus* $\frac{3}{4}$ middelpuntshoek: *finus* $\frac{5}{4}$ middelpuntshoek: enz. — — — — *Cofinus* $\frac{1}{2}$ middelpuntshoek.

De zyden of omtrekken ftaan in de zelfde reeden (IX. Voorft. en IV., 18.)

III. Gevolg.

Indien het getal der zyden even is, wordt de *binnenfte* veelhoek, die namelyk welke het dichst by het middelpunt is, door diagonaalen van den rang $\frac{g-4}{2}$ gevormd (XXVIII Voorft. 5 Gev.) die diagonaal maakt dus op de zyde uit welke

zy getrokken is eenen hoek $= \frac{(g-4)2}{2g} L = \frac{g-4}{g} L$, en dus, daar twee naastliggende zyden (AB, BC) van eenen veelhoek onderling eenen hoek maaken $= \frac{(g-2)2L}{g}$ (II. 14. het 1 Gevolg) zal die diagonaal met de tweede van die beide zyden, met (BC) eenen hoek maaken $= \frac{(g-2)2L}{g} - \frac{(g-4)}{g} L = L$: gevolglyk zyn de diagonaalen, welke den binnenſten veelhoek vormen, juist die geene welke loodrecht ſtaan op de zyden op welke zy getrokken worden: die dus de aan elkander evenwydige zyden vereenigen: die binnenſte veelhoek is dan die van welken wy in het XV Voorſtel van het II Boek en in het XXI (het 7 Gevolg,) van dit Boek na den Heer DU FAY geſprooken hebben, en die het verſchil is tusſchen den regelmatigen veelhoek om, en den regelmatigen veelhoek binnen den cirkel beſchreeven. (XXVIII. Voorſtel Gev. 8.)

Dit zelfde blykt ook uit het geen wy in het voorgaande gevolg gezegd hebben; want de loodlyn van dien binnenſten veelhoek is gelyk aan *ſinus* ½ middelpuntshoek: dus gelyk aan de halve choorde van den middelpuntshoek; dat is gelyk aan de halve zyde van den gegeeven veelhoek.

XXX. VOORSTEL. Fig. 144. 166.

Indien het getal der zyden van eenen regelmatigen veelhoek even is, en men de twee naastliggende zyden door diagonaalen, en dus door diagonaalen van den eerſten rang vereenigt, zullen er twee gelyke en gelykvormige veelhoeken gebooren worden, wier zyden half zo veel in getale zyn als de zyden in den gegeeven veelhoek.

VOORBEELDEN. In Fig. 144. worden twee gelykzydige driehoeken ADF, BEG: en in den tienhoek van Fig. 166. worden twee vyfhoeken ADFILA, en GBEHKG gevormd.

BEWYS. Indien men eenigen hoek B voor den eerſten aan-

neemt, zullen de diagonaalen getrokken van den eersten hoek B naar den derden E, van den derden E naar den vyfden H enz. tot dat men weder op den eersten te rug komt, eenen regelmatigen veelhoek uitmaaken, die het halve getal zyden hebben zal.

Indien men diagonaalen trekt van den tweeden hoek D naar den vierden F, van den vierden F naar den zesden I enz. zal er wederom een gelyke en gelykvormige veelhoek ontstaan.

Maar de diagonaalen van den derden hoek E naar den vyfden H, van den vyfden naar den zevenden enz. behooren reeds tot den eersten veelhoek: en die van den vierden hoek naar den zesden, van den zesden naar den achtsten enz. behooren reeds tot den tweeden veelhoek: dus kunnen er maar twee dergelyke veelhoeken gebooren worden.

AANMERKING. Het blykt van zelf waarom wy in het Voorstel zeggen *indien het getal van zyden even is*: want in eenen veelhoek, die een oneven getal zyden bezit, kan men door het trekken van diagonaalen van den eersten rang geen nieuwen veelhoek doen gebooren worden.

I. GEVOLG.

De zyden van die beide veelhoeken liggen in de zelfde richting als de zyden van den eersten innerlyken veelhoek, PQRSTVXYZU waar van wy in het XXIX Voorstel gesprooken hebben: doch beurtlings: de eerste namelyk, de derde, de vyfde, van deeze laatstgemelde zyden, of PQ, RS, TV enz. zullen tot den eersten, doch de tweede, vierde, zesde enz., of QR, ST, VX enz. tot den tweeden veelhoek behooren.

II. GEVOLG.

De zyden van die beide veelhoeken zyn dus slechts verlengingen van de zyden des innerlyken veelhoeks: zo dat derzelver hoeken beurtlings gevormd worden door de onderlinge ontmoeting van de verlengde *even* zyden des innerlyken veelhoeks, en van de verlengde *oneven* zyden deszelfden.

III. GE-

III. GEVOLG.

Men zal, door de verlenging der zyden, alle de innerlyke veelhoeken, ontſtaan op de wyze in het XXIX Voorſtel gemeld, ieder in twee regelmatige veelhoeken veranderen, die de helft van het getal zyden zullen hebben van den gegeeven veelhoek: en daar de zyden dier nieuwe veelhoeken de verlengingen zyn der zyden van de innerlyke veelhoeken uit welken zy gevormd worden, zyn zy ook deelen van de tweede diagonaalen voor de veelhoeken uit den tweeden innerlyken veelhoek gevormd: van de derde diagonaalen voor de veelhoeken uit den derden innerlyken veelhoek gevormd en zo voorts.

IV. GEVOLG.

De hoek, welken de m^e diagonaal met den eerſten uit het zelfde ſtip getrokken maakt is (XXVIII Voorſt., 2 Gev.) $= \overline{m-1} \times \frac{2L}{g}$: en dus zal die hoek recht zyn, wanneer $\frac{\overline{m-1} \times 2}{g} = 1$: of $m = \frac{g+2}{2}$ is: maar de eerſte diagonaal is hier de zyde van den nieuwen veelhoek, en dus wanneer $m = \frac{g+2}{2}$, is die m^e diagonaal de loodlyn uit het einde der zyde van den nieuwen veelhoek op denzelven getrokken.

V. GEVOLG.

Indien dan het getal der zyden van eenen veelhoek wel even, doch deszelfs helft oneven is, (zo als voor den tienhoek) zal de nieuwe veelhoek (by v. de vyfhoek GBEHK) een oneven getal zyden bezitten: en de gemelde m^e diagonaal van den eerſten veelhoek zal, zo $m = \frac{g+2}{2}$ (voor den tienhoek de zesde GI) de loodlyn zyn die op de zyde van den nieuwen veelhoek opgericht, den innerlyken gelykvormigen veelhoek (δξθλφ) waar van wy hier boven in het XI Voorſtel van het II. Boek, en in het 8 Gevolg van het XXI van dit Boek, na den Heer DU PAY, geſprooken hebben, helpt uitmaken, en welke veelhoek

hoek het verschil is *tusschen den* veelhoek van een oneven getal zyden om *den cirkel, en den* gelykvormigen veelhoek binnen den *cirkel beschreeven*, (Voorstel XXI. Gevolg 6, 7 8.) doch *daar er* $\overline{g-3}$ diagonaalen uit eenen hoek kunnen getrokken *worden*, zullen er nog $g-3-\left(\frac{g+2}{2}\right)$ dat is $\frac{g-8}{2}$ *diagonalen* overig blyven: en dus, van den anderen kant beginnende te tellen, zo als wy tot nu toe gedaan hebben, is de gemelde diagonaal de $\frac{g-8}{2}+1$ of de $\left(\frac{g-6}{2}\right)^e$:

En dus indien men een veelhoek van een oneven getal zyden heeft, denzelven in een cirkel beschreeven vooronderstelt, en uit denzelven, door verdeeling der bogen in twee gelyke deelen, eenen veelhoek van een dubbeld getal zyden vormt, zullen de $\overline{\left(\frac{g-6}{2}\right)}^e$ diagonaalen van deezen nieuwen veelhoek, door haare ontmoetingen, eenen gelykvormigen veelhoek vormen, waar van de zyden, door haare verlenging, zo als in dit Voorstel gezegd is, twee veelhoeken zullen uitmaaken, die aan den eersten gegeeven gelykvormig zyn zullen, aan elkander gelyk, en bovendien gelyk aan het verschil dat er is tusschen den gegeeven veelhoek en den gelykvormigen om den cirkel beschreeven, zo als wy hier boven in navolging van den Heer DU FAY gezegd hebben.

AANMERKING. Men ziet hier uit hoe het Voorstel van den Heer DU FAY, voor de oneven veelhoeken indedaad maar een gevolg is van zyn Voorstel voor de even veelhoeken; en dat het juist daarvan afhangt dat er binnen den gegeeven oneven veelhoek niet slechts een, zo als voor de even veelhoeken, maar twee veelhoeken gevormd worden, die aan het vereischte voldoen. Men zoude zelfs de beide voorstellen met de zelfde woorden kunnen uitdrukken: want de lynen welke de evenwydige zyden van veelhoeken die een even getal zyden bezitten vereenigen, zyn loodrecht op die zyden: en dus is het algemeen Voorstel

dit:

dit: „ Indien men uit ieder der hoeken van eenen regel-
„ matigen veelhoek loodlynen op de zyden trekt, zullen
„ die loodlynen door haare onderlinge ontmoeting eenen
„ nieuwen regelmatigen en met den gegeeven veelhoek ge-
„ lykvormigen veelhoek vormen zo het getal der zyden in
„ den gegeeven *even* is: doch zy zullen twee gelyke
„ en gelykvormige vormen, zo het getal dier zyden one-
„ ven is.".

AANMERKING. Het fpreekt van zelf dat ieder van die nieuwe veelhoeken weder door diagonaalen verdeeld kan worden

XXXI. VOORSTEL.

Indien men de zyden van eenen regelmatigen veelhoek wederzyds verlengt, en de ftippen, in welke die verlengde zyden elkander ontmoeten, door lynen vereenigt, zullen deeze lynen zo veele regelmatige met den gegeeven gelykvormige en om het zelfde middelpunt befchreeven veelhoeken uitmaaken, als er eenheden in het getal $\frac{g-4}{2}$, zo de zyden van den gegeeven veelhoek even, of in het getal $\frac{g-3}{2}$, zo zy oneven in getal zyn, begreepen zyn.

VOORBEELDEN. Uit den vyfhoek ON*vxy* Fig. 154 komen de ftippen G B E H K, die de punten van een vyfhoek maaken. Uit den zeshoek, U P Q R S T, fig. 144. komen door de verlenging der zyden U P en Q R, P Q en R S, Q R en S T, R S en T U: T S en U P, U T en P Q, de ftippen B, D, E, F, G, A die eenen nieuwen zeshoek uitmaaken: in fig. 167 komen er uit den gegeeven tienhoek, *lmnopqrstu*, drie tienhoeken: namelyk door verlenging der zyden *lm* en *no*, *mn* en *op*, *no* en *pq* enz. altoos eene zyde tusfchen beiden laatende de tienhoek *aNbvcxdyeo*: door verlenging der zyden *lm* en *op*, *nm* en *pq*, *no* en *qr* enz altoos twee zyden tusfchen beiden laatende, de tienhoek M S T V U X P Y R Q: eindelyk door verlenging der zyden *mn* en *qr*, *no* en *rs*, *op* en *st* enz., altoos drie zyden tusfchen beiden laatende, de tienhoek E F H I K L G A B D.

BEWYS. I. De twee over elkander staande zyden van eenen regelmatigen veelhoek, welke evenwydig aan elkander zyn, zyn door een getal $\frac{g-2}{2}$ zyden van elkander verwyderd: doch deeze, hoe ook verlengd zynde, kunnen elkander nimmer ontmoeten: dus zal een derzelven maar $\frac{g-2}{2} - 2$ dat is $\frac{g-4}{2}$ verlengde zyden kunnen ontmoeten, en 'er zullen dus maar $\frac{g-4}{2}$ veelhoeken gevormd worden.

II Indien men in eenen veelhoek, waarvan de zyden oneven in getal zyn, eene zyde neemt, zyn er tusschen dezelve en den overstaanden top $\frac{g-1}{2}$ zyden begreepen, en dus zal die zyde, verlengd zynde, $\frac{g-1}{2} - 1$ of $\frac{g-3}{2}$ verlengde zyden, wederzyds ontmoeten: en gevolglyk door die ontmoeting de toppen van even zo veel veelhoeken vormen: die alle regelmatig zullen zyn, en om hetzelfde middelpunt beschreeven.

I. AANMERKING. De uiterlyke veelhoeken, dus door samenstelling uit den gegeeven veelhoek geboren, zyn, op den gegeeve en den laatsten na, niet de zelfden welke uit deezen, door het trekken van diagonaalen, gevormd worden op de wyze in het XXX Voorstel aangeweezen: dus zyn in fig. 167 en 166, de veelhoeken *lmnopqrstu* en ABDEFHIKLG de zelfden: de beide overige tienhoeken zyn verschillende; doch in den tweeden, *aNbvcxgye* O, komen de stippen *N*, *v*, *x*, *y*, *O*, overeen met de stippen welke door de zelfde letters uitgedrukt worden in Fig. 166. en het valt ook niet moeielyk te onderscheiden welke lynen het zyn, in de figuur 166, die de stippen, in de 167 door Q, R, S, T, U uitgedrukt, en den derden tienhoek uitmaakende, doen geboren worden; doch om dit duidelyker te maaken hebben wy de hoeken, welke door de ontmoeting dier lynen gevormd worden door grover stippen aangeweezen.

II. AAN-

II. AANMERKING. Indien men de ſtippen, daar de verlengde zyden elkander ontmoeten, niet door lynen vereenigt, zullen die ſtippen de kruinen zyn van regelmatige ſterachtige figuuren, om den gegeeven veelhoek beſchreeven, en waar van de verlengde zyden des veelhoeks de zyden zyn.

ZEVENDE BOEK,

OVER DEN OMTREK, EN DEN INHOUD VAN DEN CIRKEL.

I. AFDEELING,

OVER DE LIMIETEN DER GROOTHEDEN EN DER REDENS.

VOORBERICHT.

Ik vind het nodig, alvorens tot het hoofdonderwerp van dit boek over te gaan, en hetzelve uit ſtreng wiskundige grondbeginſelen te behandelen, vooraf iets over die grondbeginſelen zelve, namelyk over de leere der *Limieten* of *Grenspaalen* van veranderlyke Grootheden te zeggen: al ware het ſlechts om de verkeerde begrippen, en alleszins onnaauwkeurige bewyzen, door veele nieuwere wiskonſtenaaren voorgedraagen, tegen te gaan. MACLAURIN heeft over de leere der *Limieten*, in den trant der Ouden, voor al van ARCHIMEDES, gehandeld in de *Inleiding* van zyn werk over de *Fluxie-Reekening*. D'ALEMBERT heeft die zaak zeer wel uitgelegd in de *Encyclopedie* op het woord *Limite*, en in zyne *Melanges* T. v. p. 239. Men kan ook nazien LA CHAPELLE *Inſtitutions de Geometrie* Tome II. §. 433. en volgende. Doch niemand heeft er naauwkeuriger en vollediger over gehandeld dan L'HUILIER, in zyne *Expoſition des principes des Calculs ſuperieurs Chap.* I. Ook NEWTON heeft reeds vooraan in zyne *Grondbeginſelen* eenige Voorſtellen op dit ſtuk voorgedraagen. Ik zal uit alle die ſchryvers, dat geen 't welk my voorkomt van het uiterſte belang te zyn en meest onmiddelyk tot ons beſtek te behooren, ontleenen, en in eene geregelde orde voordragen.

I. BEPAALING.

Indien eenige grootheid A, door vermeerdering, of door vermindering, aan eene andere grootheid L hoe langer hoe nader komt, zonder echter dezelve immer te kunnen overtreffen of evenaaren, wordt die tweede grootheid L de *Limiet* van de eerstgemelde A genoemd, en wel de *Limiet* in *grootte* zo de grootheid A aan de Limiet L by vermeerdering, doch de *Limiet* in *kleinheid*, zo zy aan de zelve by *vermindering* hoe langer hoe nader bykomt.

I. GEVOLG.

Daar de grootheid A, door bestendige vermeerdering of vermindering, aan de grootheid L, of haare *Limiet*, altoos nader en nader komt, volgt het dat zy zodanig vermeerderd of verminderd kan worden, dat zy van haare *Limiet* minder verschillen zal dan eenige mogelyke gegeeven grootheid, hoe klein die ook zyn moge, bedraagt.

VOORBEELDEN.

I. Fig. 40. De *Tangens* AB is de *limiet* in *kleinheid* van alle de *snylynen* AF, AD, enz.: die uit het zelfde stip A tot den hollen omtrek van den cirkel getrokken kunnen worden: en de *limiet* in *grootte* van alle de lynen AE, AK, enz., die slechts tot aan den bollen omtrek komen.

AANMERKING. Men zoude, doch in eenen oneigenlyken zin, kunnen zeggen, dat de middellyn de *limiet* is in *grootte* van alle de choorden, indien niet de middellyn zelve in den eigenlyken zin tot de choorden behoorde, en dus eene grootheid is, die door eene *choorde*, *choorde blyvende*, kan geëvenaard worden, het geen in het denkbeeld van *limiet* niet begreepen is, of begreepen kan worden: daar in tegendeel, in ons voorbeeld, de snylynen, zo lang zy snylynen zyn, de raaklyn AB niet kunnen evenaaren.

R II. De

II. De Breuk $\frac{1}{3}$ is de *limiet* in grootte van de breuk 0,333333333 zo ver men wil uitgestrekt.

III. Het getal 1 is de *limiet* in grootte van deeze geometrische reeks

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +$ &c. zo ver men wil uitgestrekt.

AANMERKING. In het algemeen, de uitdrukking (III, 17, Gev. 1) $S = \frac{A(q^n - 1)}{q - 1}$ is de waare som van een getal n leden van eene geometrische reeks, doch $S = \frac{A}{1 - q}$ is de *limiet* van de geheele afneemende reeks, zo ver men wil uitgestrekt: en van hier de uitdrukking van sommigen, dat $\frac{A}{1 - q}$ de som is van een *oneindig* getal leden van eene geometrische afneemende reeks: waar uit volgt:

1°. dat, daar in de gemelde reeks $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ &c. het eerste lid $\frac{1}{2}$, en het *quotient* $\frac{1}{2}$ is; men hebben zal $A = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$: dus $1 - q = \frac{1}{2}$: en $S = \frac{A}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ en

2°. in de reeks $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} +$ &c.: $A = 1$, $q = \frac{1}{4}$: dus $S = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$.

IV. De arithmetische middelevenreedige is de *limiet* in kleinheid van de geometrische middelevenredige, tusschen twee grootheeden (III., 20.)

II. BEPALING.

Wanneer de reeden tusschen twee grootheeden aan de bestendige reeden, die er tusschen twee andere grootheeden is, by vermeerdering of vermindering, nader en nader bykomt, wordt de laatstgemelde reeden de *limiet*, in *grootte* of in *kleinheid*, van de eerstgemelde reeden genoemd.

VOORBEELD: De reeden van $\sqrt{2} : 1$ is de limiet in grootte

van

van alle de getalen waar door men de reeden, die de diagonaal van een vierkant tot deszelfs zyde heeft, kan uitdrukken. De reeden van 2 : $\sqrt{3}$ is de limiet in grootte van de getalen waar door men de reeden van de zyde eens gelykzydigen driehoeks tot deszelfs loodlyn kan uitdrukken. De reeden van $\sqrt{3}$: 1 is de limiet van de reeden die de zyde des gelykzydigen driehoeks, in den cirkel beschreeven, heeft tot den radius van den cirkel, indien men die reeden in getalen uitdrukt. Zie D'ALEMBERT *Melanges* T. V. p. 215.

I. VOORSTEL.

Zo er twee grootheeden zyn, A en B, en men van de grootste de helft, of meer dan de helft, aftrekt, en van het overschot wederom de helft, of meer dan de helft, en zo voorts, altoos op de zelfde wyze, zal er eindelyk eene grootheid overschieten die kleiner zyn zal dan de tweede gegeeven grootheid B.

EUCL. X. 1.: of by KOENIG *Lemma* voor XII. 2.: en eenigermaate by TACQUET *Lemma* 2 na VI., 11.

GEVOLG.

Men kan dan geene grootheid zo klein geeven, of het overschot zal eindelyk nog geringer worden.

II. VOORSTEL.

Wanneer twee grootheeden gegeeven zyn, waarvan de eene (L) bestendig, de andere (A) veranderlyk is, doch, by vermeerdering of by vermindering, nader en nader by de eerstgemelde grootheid L komen, en er dus minder van verschillen kan dan eenige te geeven grootheid bedraagt: zal de reeden van gelykheid de limiet zyn in grootte of in kleinheid van de reeden dier beide grootheeden: en omgekeerd.

L'HUILIER §. 2. —— TACQUET *Theor. sel. ex* ARCHIMEDE pr. 1, 2.

BEWYS. Zo men het tegendeel stelt, zy L = A ± B; dan is het verschil tusschen de beide grootheeden gelyk aan een bepaald getal, 't geen tegen de onderstelling strydt, welke stelt dat het gemelde verschil kleiner is dan eenig getal dat gegeeven kan worden.

I. AANMERKING. Dit zal door eene nadere uitlegging der voorbeelden van de I. Bepaling opgehelderd worden.

II. AANMERKING. Van daar de uitdrukking van sommigen, dat eene grootheid in haare limiet eindigt.

III. VOORSTEL.

Zo ééne en dezelfde grootheid (L) de limiet is, het zy in grootte, het zy in kleinheid, van andere grootheeden, b. v. (A en B) is de reeden van gelykheid de limiet der reeden van deeze grootheden.

BEWYS. De reeden van A : L is eindelyk die van gelykheid of eindelyk A : L = 1 : 1 (II. Voorstel); en eveneens B : L = 1 : 1; dus eindelyk A : B = 1 : 1 of de reeden van A : B komt hoe langer hoe nader aan de reeden van gelykheid.

VOORBEELD. De limiet van de reeden der beide reeksen, $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ &c. en $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ enz. beiden zo ver men wil vervolgd, is die van gelykheid.

AANMERKING. Van daar de uitdrukking van sommigen, dat de laatste reeden dier grootheeden eene reeden van gelykheid is.

IV. VOORSTEL.

Zo twee grootheeden beiden de limieten zyn van eene derde, is haare reeden die van gelykheid; dat is, zy zyn gelyk.

BEWYS. Uit het III. Voorstel.

LA CHAPELLE, §. 433.

V. VOORSTEL.

Zo twee grootheeden A en B, beiden in haare vermeerdering, of beiden in haare vermindering, altoos de zelfde reeden ($a : b$) tot elkander behouden, zal ook die reeden de reeden haarer limieten (L en l) zyn.

TACQUET *Porisma* na XII. 2. —— MACLAURIN p. VI. —— L'HUILIER, §. 3.

BEWYS. *Zy* $A : B = a : b$: zo nu

niet $L : l = a : b$, is

$L : l$ of $>$ of $<$ $a : b$;

zy $L : l > a : b$;

en dus $L - X : l = a : b = A : B$.

Zo nu L en l de limieten in grootte zyn van A en B: is B $<$ l: dus moest ook A altoos kleiner zyn dan $L - X$; dus minder tot L naderen dan eene gegeeven grootheid X, dat tegen het denkbeeld van eene *limiet* ftrydt: dus is niet $L : l > a : b$.

Zy $L : l < a : b$: dus

$L : l - X = a : b = A : B$:

Maar A is $<$ L: dus moest B ook altoos kleiner zyn dan $l - X$: dat insgelyks tegen het denkbeeld van eene *limiet* ftrydt:

dus is noch $L : l > a : b$

noch $L : l < a : b$

dus is $L : l = a : b$.

Zo L en l de limieten in kleinheid zyn, is de redeneering de zelfde: men ftelt voor het eerfte geval,

zo $L : l > a : b$,

$L : l + X\ a : b$:

en voor het tweede, zo $l : l < a : b$,

$L + X : l = a : b$.

de ongerymdheid blyft de zelfde.

VOORBEELDEN.

I. Fig. 58. In alle driehoeken ACB, waarin de lyn CF de tegenoverstaande zyde in twee gelyke deelen deelt, is altoos, hoe ook de driehoek moge zyn: (II., 9. Gev. 2.)

$$\frac{\square \text{ op } AC + \square \text{ op } CB}{2} - \square \text{ op } CF = \tfrac{1}{4} \square \text{ op } AB =$$

$$\square \text{ op } AF = \square \text{ op } FB.$$

Maar de lyn AB is de limiet in kleinheid van de som der zyden AC en CB (I., 15.): want hoe dichter C by de lyn AB valt, hoe nader AC + CB aan AB komt, zonder immer AB te kunnen evenaaren: en gevolglyk, wat voor de zyden AC en CB geldt, geldt ook voor derzelver limiet, dat is voor de lyn AB. Indien men dan onderstelt dat C ergens in D valt, en F in F, moet volgens dit voorstel ook het zelfde voor de lyn AB plaats hebben: namelyk

$$\frac{\square \text{ op } AD + \square \text{ op } DB}{2} - \square \text{ op } DF = \square \text{ op } AF:$$

nu kan men rechtstreeks bewyzen, dat dit zo is: want, uit II., 2. Gev. 2.: en II., 2. is

$$\square \text{ op } AD = \square \text{ op } AF - \square \text{ op } DF - 2 \text{ rechth. uit } AD,\ DF.$$

$$\text{en } \square \text{ op } DB = \square \text{ op } AF + \square \text{ op } DF + 2 \text{ rechth. uit } AF,\ DF.$$

$$\text{en dus } \square \text{ op } AD + \square \text{ op } DB = 2 \square \text{ op } AF + 2 \text{ rechth. uit } DF,\ DF.$$

dat is

$$\square \text{ op } AF = \frac{\square \text{ op } AD + \square \text{ op } DB}{2} - \square \text{ op } DF.$$

Men kan de zaak op de zelfde wyze aantoonen indien de △ ACB stomp is, (Fig. 168.), en dus het stip D buiten AB valt.

II. Fig. 40. In den cirkel heeft altoos voor de secanten of snylynen deeze reeden plaats (V. 13.): rechth. uit AD, KA = rechth. uit AH, PA: en gevolglyk heeft

dit

dit ook voor de limieten der ſnylynen, dat is (I. Bep. I. Voorbeeld) voor de raaklynen, plaats: en dus □ op AB = □ op AI: of AB = AI, dat men reeds uit andere grondbeginſelen weeten kan: (uit V., 11. Gev. 4 en V., 13. Gev. 4.)

III. Fig. 169. De Tangent in eenig ſtip B, dat beſtendig is, is de limiet van alle de ſecanten die door dat ſtip gaan. Laat men door het middelpunt C de middellyn FCEA trekken, die de ſnylyn DBA in A ontmoet. Laaten BRM en DNI en KCG loodrecht op de middellyn ſtaan: en BQ evenwydig zyn aan EF. Dan is beſtendig, uit de gelykvormige driehoeken BOD en ARB, voor alle de ſnylynen door B getrokken, DO:OB = RB:RA, en dus is de limiet in kleinheid van DO tot de limiet in kleinheid van OB = RB: RA en die reeden zal ons aanduiden waar A vallen moet, op dat ABD eene raaklyn in B zyn zoude.

Immers is DO:OB = OQ:IO (V., 12. Gev. 1.); en dus is de reeden der limieten van OQ en IO die der limieten van DO en OB: maar de limiet van OQ is BQ = 2 BP = 2 RC (V., 5.): de limiet van IO is MB = 2 RB: dus is de reeden van RC:RB die der limieten van DO, en OB, dus die van RB en RA: gevolglyk zal ABD tangent zyn indien RC:RB = RB:RA, dat is, indien RB middenevenreedige tusſchen RC en RA is: het geen ook buiten alle kennis van limieten onmiddellyk volgt uit het geen wy beweezen hebben, (V., 7.) dat, zo ABD tangent is, de ∠ ABC = ∟ is: en dus (IV., 12. Gev. 1.) RC:RB = RB:RA.

AANMERKING. Wy zullen, in het VIII., het XI. en XII. Voorſtel, nog veele voorbeelden bybrengen: doch dit zy genoeg om de juistheid van het denkbeeld van limiet te bevestigen.

VI. VOORSTEL.

Zo twee grootheden A en B, beiden veranderlyk,

bestendig de zelfde reeden blyven behouden tot twee bestendige grootheden, (A:B = $a:b$), welke vermeerdering of vermindering zy ook ondergaan: zullen derzelver limieten (L en l) ook in de zelfde reeden (van $a:b$) staan.

L'HUILIER §. 4. —— MACLAURIN p. XI. —— TAQUET *selecta ex* ARCHIMEDE pr. 1 en 2.

BEWYS. Zo neen, zy $L:l > a:b$ en dus $L - X:l = a:b = A:B$

maar B is altoos kleiner dan l, zo l de limiet in grootheid is: dus moet ook (III., 11.) A altoos kleiner zyn dan L — X, dat valsch is: want daar L de limiet is van A, kan A nader tot L komen, dan eene bepaalde grootheid X bedraagt.

Zo $L:l < a:b$ zo is

$L:l - x = a:b = A:B$:

Maar A < L dus moet B < $l - x$ zyn, dat tegen het denkbeeld van eene limiet strydt: dus $L:l = a:b$.

Het bewys gaat op de zelfde wyze voort, zo L en l de limieten in kleinheid zyn.

VII. VOORSTEL.

Zo twee reedens van veranderlyke grootheeden (A en B, L en M) altoos gelyk blyven, welke verandering in vermeerdering of vermindering die grootheeden mogen ondergaan, (dat is, zo bestendig A:B = L:M): zyn de reedens haarer limieten (a en b, l en m) ook gelyk, (dat is, $a:b = l:m$).

L'HUILIER §. 5.

BEWYS. Daar de reeden van $a:b$ de limiet is van de reeden A:B is zy het ook van de reeden L:M. Maar de reeden van $l:m$ is de limiet van de reeden van L:M: dus zyn $a:b$ en $l:m$ de limieten van eene en de zelfde reeden L:M: dus zyn de reedens van $a:b$ en van $l:m$ gelyk, door het IV. Voorstel.

VIII. VOOR-

VIII. VOORSTEL.

De limiet van eene reeden, uit twee of meerder grootheeden (A:B en G:D) samengesteld, is de samengestelde reeden der *limieten* (*a*:*b* en *g*;*d*) van die grootheeden (A, B, G, D).

LA CHAPELLE §. 434. —— L'HUILIER §. 6.

BEWYS. Indien A:B voor limiet heeft *a*:*b*: en G:D voor limiet heeft *g*:*d*, komt *a*:*b* nader aan A:B dan eenige gegeeven grootheid kan bedragen: en insgelyks *g*:*d* nader aan G:D dan eenige grootheid kan bedragen: dus zal ook $\frac{a}{b} \times \frac{g}{d}$ nader aan $\frac{A}{B} \times \frac{G}{D}$ komen, dan eenige gegeeven grootheid, dat is, zal 'er de limiet van zyn.

IX. VOORSTEL. Fig. 82.

Indien de lynen AB, BC, rechthoekig op elkander staande, met de kromme lyn AC eene figuur uitmaaken; en men de grondlyn BC in zo veel gelyke deelen BD, DE, EF enz. als men wil verdeelt, om dus door middel der lynen MD, EN enz., AM, SLN enz. de rechthoeken AMDB, SLDB, DLNE, RKEC enz. te maaken: zal men door het getal der deelen BD, DE, enz. te vermeerderen, en dus hunne grootte te verminderen, de kromlynige figuur ABCA tot limiet van de uiterlyke (AMLNK &c.) en van de innerlyke (SLRKQ &c.) hebben: en de limiet der reeden van deze figuuren zal dus eene reeden van gelykheid zyn.

NEWTON, *Lem.* 2. 3.

BEWYS. De overmaat der uiterlyke figuur boven de innerlyke is de som van alle parallelogrammen, AL, LK, KI, enz. de som van die parallelogrammen is de rechthoek AMBD, welke door geduurige vermindering van BD kleiner wordt dan eenige gegeeven grootheid, waar uit het Voorstel volgt.

AANMERKING. Het zelfde heeft plaats, al wordt de kromme lyn AC in eene rechte lyn AC veranderd, en dus al heeft men eenen rechtlynigen driehoek ACB: welk voorstel

van een zeer groot nut in de Natuurkunde is. Het bewys van de voornaamste eigenschappen der versnellende beweeging, en dus van die der vallende lichaamen, steunt daar op: zie 's GRAVESANDE *Physica* §. 373. —— MUSSCHENBROEK §. 187. —— KEILL *Inleiding tot de waare Wis- en Sterrekunde*. XI. *Les*, *Theor*. XVII.

II. AFDEELING.

OVER DEN OMTREK EN DEN INHOUD VAN DEN CIRKEL.

X. VOORSTEL.

De omtrek van den cirkel is grooter dan die van eenigen veelhoek in den cirkel, en kleiner dan die van eenigen veelhoek om den cirkel beschreeven: en insgelyks is het met den inhoud gelegen.

BEWYS. het I (Fig. 79.) volgt uit het 1. en 2. Gevolg van het XVII. Voorstel in het VI. Boek, en het II. (Fig. 81.) uit het 1. Gevolg van het XXII Voorstel:

AANMERKING. ARCHIMEDES heeft het tweede gedeelte uit dit *Axioma* afgeleid, dat eene vlakke figuur, die eene andere bevat, grooter is dan deeze laatste, (*de Sphaera & Cylindro* I. pr. 1.)

XI. VOORSTEL. Fig. 79. 80.

De omtrek van den cirkel is de limiet van alle de veelhoeken die in den cirkel of om den cirkel beschreeven worden: en insgelyks is het met den inhoud geleegen.

TAQUET *Selecta ex* ARCHIMEDE. pr. 3.

BEWYS. Uit XVII en XXII. van het VI. Boek, en de 1. Bepaling van dit Boek.

I. GEVOLG.

Hier uit blykt in welken zin men te verstaan hebbe, dat een *cirkel een veelhoek is van een oneindig getal zyden:* doch eene dergelyke uitdrukking is niet naauwkeurig.

II. GEVOLG.

De gelykvormige veelhoeken, in en om den cirkel beschreeven, komen elkander hoe langer hoe nader, en hunne laatste reeden is de reeden van gelykheid.

Zie ook het IX. Voorstel van dit Boek.

III. GEVOLG.

De radius van den cirkel is de limiet van de loodlynen der regelmatige veelhoeken in den cirkel beschreeven.

XII. VOORSTEL.

De omtrekken van twee ongelyke cirkels staan altoos tot elkander als hunne middellynen, en dus als hunne straalen.

TAQUET *Selecta ex* ARCHIMEDE pr. 2. — S. p. 268. pr. 22.

BEWYS. Uit het IX Voorstel van het VI, en het VI. en X. van dit boek.

I. GEVOLG.

Alle cirkels zyn gelykvormige figuuren.

I. AANMERKING. Wy hebben in de 1. Bep. van het IV. Boek gezegd wat wy door gelykvormige figuuren verstaan: doch die bepaling is niet op den cirkel toepaslyk, ten minsten niet rechtstreeks: wy oordeelen dat men een kenmerk van die gelykvormigheid in de bestendige reeden van den straal tot den omtrek stellen kan; daar die bestendige reeden een onmiddellyk gevolg is van de gelykvormigheid der veelhoeken.

II. AANMERKING. EUCLIDES heeft de gelykvormigheid der cirkels stilzwygend vooronderstelt.

II. GE-

II. GEVOLG.

Gelykvormige bogen van twee ongelyke cirkels zullen die zyn welke de zelfde reeden tot hunne omtrekken, en dus tot hunne halve middellynen hebben.

III. GEVOLG.

En insgelyks zullen gelykvormige cirkelstukken die zyn welke uit bogen bestaan die onderling zyn als de omtrekken of middellynen der geheele cirkels, en wier choorden dus ook de zelfde reeden hebben.

XIII. VOORSTEL.

De inhoud van den cirkel is gelyk aan dien van eenen driehoek, waar van de grondlyn gelyk is aan den omtrek des cirkels en de loodlyn gelyk aan deszelfs radius.

TAQUET *Selecta ex* ARCHIMEDE. pr. 4. 5.

BEWYS. Men stelle eenen dergelyken driehoek: dan is dezelve de limiet van de veelhoeken, zo wel in als om den cirkel beschreeven: (II, 17: en uit dit Boek, XI, XI Gev. 3, en VIII:) doch de cirkel is ook de limiet dier veelhoeken (door het X. Voorstel) waaruit het besluit volgt (door het IV. Voorstel.)

I. AANMERKING. ARCHIMEDES heeft dit Voorstel uitmuntend beweezen: (*de Circuli dimensione* pr. 1); en MACLAURIN heeft het zelve zeer wel uitgelegd, *Traité des Fluxions*. p. IX.

I. GEVOLG.

Indien men den inhoud van den cirkel door getallen wil uitdrukken, en men let op het geen wy in het IV. Boek, VII Voorstel, 8. Gevolg n°. 5. gezegd hebben, volgt het, indien men in het algemeen stelt dat O den omtrek uitdrukt wanneer de middellyn 1 is; en wanneer men verder voor den radius van eenen byzonderen cirkel R, en voor deszelfs middel-

lyn D stelt, dat dan de inhoud van dezen cirkel is

$= O.R^2 = \frac{O.D^2}{4}$

II. GEVOLG.

De inhoud van den cirkel staat tot dien van het vierkant in den cirkel beschreeven, zo als de halve omtrek tot de middellyn (VI, het 4. Gevolg): en tot dien van het vierkant om den cirkel beschreeven of tot het vierkant op de middellyn, zo als het vierde deel van den omtrek tot de middellyn. (VI. 21. Gevolg 3.)

TAQUET *Selecta ex* ARCHIMEDE. pr. 5. Cor. 2.

III. GEVOLG.

De inhoud van eenen *Sector* is gelyk aan een driehoek waarvan de grondlyn gelyk aan den boog van den *Sector*, en de hoogte gelyk aan den radius is.

S. p. 273. 1 Cor.

BEWYS. Uit de beschouwing dat de omtrek van den boog de limiet is van de som der grondlynen der gelykbeenige driehoeken in den *Sector* beschreeven, en de radius de limiet van de loodlyn in ieder driehoek.

II. AANMERKING. dus, zo B de boog van den *Sector* is, is de inhoud van den *Sector* $= \frac{B \times R}{2}$

III. AANMERKING. Men kan altoos een vierkant beschryven wiens inhoud gelyk is aan den inhoud van een' gegeeven driehoek: zie het XVIII Werkstuk van het III. Boek. Men zoude dus een vierkant kunnen maaken dat gelyk zoude zyn aan den inhoud van den cirkel, indien men eene rechte lyn trekken kon die gelyk aan den omtrek is. Indien men dit doen kon, zoude het gewigtige vraagstuk van de *Quadratuur*, of inhoudvinding des cirkels, *geometrisch* opgelost zyn. Doch tot nu toe heeft men geen middel

del gevonden om *zulks geometrisch* te verrichten: ik zie echter geene *onmogelykheid* waarom men dit niet in het vervolg zoude *kunnen* volbrengen, en zulks te meer, daar men reeds, *zo als wy* in het 3 Gev., en de I en II Aanmerking op *het* XIV Voorstel bewyzen zullen, den inhoud van verscheiden figuuren uit cirkelbogen bestaande gevonden heeft. Ik ben derhalven met HENNERT en anderen van gevoelen, dat de *Quadratuur* van den cirkel, hoe wel nog niet gevonden, niet onmogelyk is in eenen geometrischen zin.

Ik zeg in eenen *geometrischen zin*: geheel anders is het indien men het vraagstuk in eenen *arithmetischen* zin opvat; dat is, indien men van getalen spreekt die den inhoud, of den omtrek van den cirkel met betrekking tot het vierkant van den diameter, of den diameter, uitdrukken. Ik twyffel of deeze wel immer *meetbaar* kunnen zyn, zie de Aanmerking op het XV Voorstel.

XIV. VOORSTEL.

Ongelyke cirkels hebben tot elkander de zelfde reede als de vierkanten hunner middellynen.

EUCL. XII. 2. en TACQUET op die plaats: Cor. 2. — S. p. 275. pr. 27.

BEWYS. Uit het 1. Gev. van het XII Voorst.; en IV. 15. of uit het XII en XIII Voorstel van dit Boek.

I. GEVOLG.

Men kent dan altoos de onderlinge reeden van twee cirkels wier middellynen bekend zyn: en men kan dus cirkels maaken die eene bepaalde reeden tot elkander hebben, 't geen het 33 en 34 Vraagstuk des III Boeks uitmaakt.

Zie TAQUET op EUCL. XII. 2, het 3. Gev.

II. GEVOLG.

Indien men cirkels beschryft op de schuinsche en op de beide rechthoekzyden van eenen rechthoekigen driehoek,

hoek, is de fom der beide cirkels op de rechthoeks-zyden gelyk aan den cirkel op den fchuinfche zyde (IV,) en men kan dus eenen cirkel maaken die gelyk zal zyn aan een gegeeven getal cirkels, volgens het 35 Werkftuk van het III Boek.

S. p. 280. pr. 30.

III. GEVOLG. Fig. 83.

Indien men op de fchuinfche en op de beide rechthoekszyden van eenen rechthoekigen driehoek halve cirkels trekt, naar den zelfden kant, die dus den halven cirkel op de fchuinfche zyde fnyden, zullen de beide *maantjes*, F en G, te famen gelyk zyn aan dien gegeeven driehoek.

Uit het II Gevolg.

TAQUET Cor. 10. op EUCLIDES XII. 2.

I. AANMERKING. De beide *maantjes* zyn gelyk indien de driehoek A D B gelykbeenig is: anderszins ftaan zy tot elkander als de driehoeken A D C en D C B.

II. AANMERKING. Zie daar een voorbeeld van eene ruimte binnen cirkelbogen bevat, wier inhoud volmaakt bekend is. Deeze *maantjes* worden naar derzelver uitvinder, HIPPOCRATES van CHIOS, genoemd. Doch er zyn eene menigte van dergelyke *Maanen* wier inhoud men volmaakt kan vinden. Dus, by voorbeeld, fig. 170, indien men den omtrek in zes deelen deelt, de choorden (of zyden van den zeshoek) A B en B D trekt, en dan uit F en E met den zelfden radius de bogen A C, en C D, die zich in het middelpunt ontmoeten: dan zal de kromlynige figuur A B D C A: die ARCHIMEDES en PROCLUS *Arbelos* noemen, gelyk zyn aan de ruit A B D C: zo als van zelf blykt. Zie over die *maanen* en *figuuren* van deezen aart KRAFT *Geometria fublimior* §. 161., en veele volgenden.

OVER DE REEDEN VAN DEN OMTREK DES CIRKELS TOT DE MIDDELLYN.

XV. VOORSTEL.

De reeden van den omtrek des cirkels tot deszelfs middellyn kan uit de beschouwing der veelhoeken niet dan ten naasten by bepaald worden: die reeden, aldus bepaald, is onmeetbaar: en de reeden van den inhoud des cirkels tot het vierkant der middellyn is in den zelfden zin, insgelyks.

De omtrek des cirkels is de limiet van den omtrek der veelhoeken: en dus, hoe veele zyden men ook in eenen veelhoek vooronderstelle, is de omtrek des cirkels altoos grooter dan die des veelhoeks zo de veelhoek in den cirkel, en altoos kleiner zo de veelhoek om den cirkel beschreeven is: zo dat, daar de omtrek des cirkels tusschen beide valt, men niet weeten kan hoe veel de cirkel grooter is dan de eerstgemelde veelhoek, en hoe veel kleiner dan de laatstgemelde.

Men kan dus alleen, in plaats van den omtrek des cirkels, den omtrek van eenen veelhoek neemen, welke minder van dien des cirkels afwykt naar mate de veelhoek meer zyden heeft.

Verder, de reeden zelve van den omtrek des veelhoeks tot de middellyn is altoos onmeetbaar, (uitgenomen voor den zeshoek) en men kent alleenlyk zo naby men begeert de paalen tusschen welken die reeden valt: dus, welken veelhoek men ook neeme om deszelfs omtrek voor dien des cirkels te gebruiken, is dezelve altoos onmeetbaar met betrekking tot de middellyn.

En daar de inhoud des cirkels gelyk is aan een' driehoek waar van de hoogte de *radius* en dus meetbaar is: de

de grondlyn de omtrek, en dus op de gezegde wyze onmeetbaar, zal ook de inhoud van dien driehoek, en dus die van den cirkel, onmeetbaar zyn met betrekking tot het vierkant op de middellyn.

AANMERKING. Men vraagt of men nimmer voor den omtrek des cirkels een getal zal kunnen vinden dat meetbaar is met de middellyn? Ik kan niet ontveinzen zeer geneegen te zyn om te denken dat zulks niet mogelyk is: schoon het bezwaarlyk valt dit te beslissen. En het komt my dus voor zeer waarschynlyk te zyn dat de oplossing van de *Quadratuur* des cirkels in eenen arithmetischen zin onmogelyk is.

XVI. VOORSTEL.

De reeden van den omtrek eens cirkels tot zyne middellyn is kleiner dan van $3\frac{10}{70}$ tot 1, en grooter dan $3\frac{10}{71}$ tot 1: of, wat op het zelfde uitkomt, kleiner dan 22 : 7 en grooter dan 223 : 71 volgens ARCHIMEDES.

Die reeden is naauwkeuriger zo als 3,1415926535 : 1 volgens LUDOLF VAN CEULEN: en de reeden, door METIUS opgegeeven, is byna even naauwkeurig, namelyk van 355 : 113.

I. AANMERKING.

HANDELWYZE VAN ARCHIMEDES.

Die Wiskunstenaar berekende den omtrek van eenen zes-en-negentig-hoek om den cirkel, en dien van eenen zes-en-negentig-hoek binnen den cirkel beschreeven: de omtrek des cirkels is kleiner dan de eerstgemelde, en grooter dan de laatstgemelde.

BEREIDING. Voor den 96- hoek om den cirkel beschreeven. Fig. 171.

Zy BI de zyde van eenen twaalfhoek in den cirkel beschree-

schreeven: en zy LBD loodrecht op de middellyn in B, en dus eene raaklyn: men trekke CIL. Laat HC den hoek ICB in tweeën gelyk deelen: insgelyks GC den hoek HCB: FC den hoek GCB: EC den hoek FCB: dan is ∠ECB de middelpuntshoek van eenen 192-hoek: en dus, indien ∠BCD = ∠ECB, is ∠ECD de middelpunts-hoek van eenen 96-hoek: en dus is ED de zyde van eenen 96-hoek om den cirkel beschreeven. Daar wy nu de grootheid van de zyden dier veelhoeken moeten bepaalen, en dus dezelve door getalen uitdrukken, zullen wy het geen wy in het 8 Gevolg op het VII. Voorstel van het IV. B., en in het 1. Gev. van het XV. Voorst. van het zelfde Boek gezegd hebben in acht neemen; en, in plaats van de vierkanten op lynen, de tweede magten der getalen die de zyden uitdrukken gebruiken, en, in plaats van de zyden waarop een gegeeven vierkant gesteld zoude kunnen worden, den vierkant-wortel van het getal dat den inhoud van dit vierkant uitdrukt. Archimedes is ook op die wyze te werk gegaan.

Bewys. Uit VI., 22. N°. 2. is

1°. BL : BH = CL + CB : CB
2°. BH : BG = CH + CB : CB,
3°. BG : BF = CG + CB : CB
4°. BF : BE = CF + CB : CB;

of, by verplaatsing:

1°. CL + CB : BL = CB : BH
2°. CH + CB : BH = CB : BG
3°. CG + CB : BG = CB : BF
4°. CF + CB : BF = CB : BE.

Maar, IM = ½ IK (V. 6.)
en IK = CI (VI., 8. het 2. Gev.)
dus IM = ½ CI: en daar
BL : CL = IM : CI (IV., 9.)
is BL = ½ CL. (III., 9.)

Waar-

Waar uit volgt, dat zo BL bekend is, CL het ook is: en uit II., 7. ook CB: en omgekeerd: men kan dus in N°. 1. BH vinden, dus ook CH (II., 7.): en dan in N°. 2. BG: in N°. 3. BF: in N°. 4. BE.

1°. ARCHIMEDES ſtelde $BL = 153$: dus $CL = 306$: dus $\overline{CB}^2 = \overline{306}^2 - \overline{153}^2 = 70227$: dus $\overline{CB}^2 > 70225$: en $CB > \sqrt{70225}$ of > 265:

Hier uit volgt in N°. 1.

$CL + CB : BL > 571 : 153$: en dus ook

$CB : HB > 571 : 153$ of $> 8 \times 571 : 8 \times 153$ of $> 4568 : 1224$.

Zo dan $HB = 1224$ is $CB > 4568$.

2°. Dus $\overline{CH}^2 > \overline{1224}^2 + \overline{4568}^2$ of > 22364800

dus > 22363441 of $> \overline{4729}^2$: dus

$CH > 4729$: en dus in N°. 2.

$CB : BG > 9297 : 1224$: en dus: indien $BG = 1224$ is $CB > 9297$.

3°. Dus is $\overline{GC}^2 > \overline{9297}^2 + \overline{1224}^2$ of

> 87932385 dus > 87928129 of $> \overline{9377}^2$.

dus is, N°. 3., $GC > 9377$: en

$CB : BF > 18674 : 1224$ of

$> \frac{18674}{2} : \frac{1224}{2}$ of $> 9337 : 612$

en dus indien $BF = 612$: is $CB > 9337$.

4°. Dus is $\overline{CF}^2 > \overline{612}^2 + \overline{9337}^2$ of

> 87554113: dus > 87553449 of $> \overline{9357}^2$:

dus $CF > 9357$: en dus in N°. 4.

$CB : BE > 9347 : 306$.

dus $2\ CB : 2\ EB$ of $ED > 9347 : 306$

en dus, zo $ED = 306$, is 2 CB of de middellyn > 9347.

Maar $96 \times ED = 29376 =$ omtrek van den veelhoek.

Dus omtrek *van den* veelhoek: Middellyn $<$ 29376: 9347 of $< \frac{29376}{9347}$: 1 of $< 3\,\frac{1235}{9347}$: 1.

Maar $\frac{1335}{9347} < \frac{1}{7}$: en omtrek van den cirkel kleiner dan *die van* den veelhoek: dus

Omtrek van den cirkel tot de middellyn $< 3\frac{1}{7}$: 1 of 22: 7.

BEREIDING voor den 96. hoek in den cirkel beschreeven. Fig. 172.

Zy BL de zyde van eenen zeshoek in den cirkel beschreeven: laat AH den boog BL in twee gelyke deelen deelen: insgelyks AG den boog BH: AF den boog BG: AE den boog BF: dus is BE de choorde van een 96- hoek:

BEWYS. Uit IV., 9. is

AL : AB = KL : BK: dus (III, 8. N°. 1.)

AL + AB : AB = KL + BK of BL : BK:

of

AL + AB : BL = AB : BK:

Maar △ BHK ∽ △ AHB: dus

AB : BK = AH : BH: en

1°. AL + AB : BL = AH : BH.

op de zelfde wyze is

2°. AH + AB : BH = AG : BG

[redacted]

Indien dan $BH = 78000$ is $AH < 291100$: dus $\overline{AB}^2 < \overline{291100}^2 + \overline{78000}^2$ of $< 90823210{,}000$ of < 90826890625 of $< \overline{301375}^2$
dus $AB < 301375$.

2°. Dus is in N°. 2. $AG : BG < 592475 : 78000$, of multipliceerende beide de getalen door 11 en ze divideerende door 325 is $AG : BG < 20053 : 2640$.

Zo dan $BG = 2640$ is $AG < 20053$: dus $\overline{AB}^2 < \overline{2640}^2 + \overline{20053}^2 < 409092409 < 409131529$ of $< \overline{20227}^2$:
dus $AB < 20227$:

Dus is in N°. 3. $AF : BF < 40280 : 2640$ of multipliceerende door 3, en divideerende door 20. $AF : BF < 6042 : 396$.

3°. Zo dan $BF = 396$: is $AF < 6042$ dus $\overline{AB}^2 < \overline{396}^2 + \overline{6042}^2 < 36662580 < 36663025$ of $< \overline{6055}^2$.

Gevolglyk is $AB < 6055$: en in N°. 4. is $AE : BE < 12097 : 396$ of $< 24194 : 792$.

4°. Indien dan $BE = 792$ is $AE < 24194$: dus $\overline{AB}^2 < \overline{792}^2 + \overline{24194}^2$ of < 585976900 of < 585978849 of $< \overline{24207}^2$.

Gevolglyk $AB < 24207$.

Men heeft dan

$BE : AB > 792 : 24207$: of, divideerende door 3,

$BE : AB > 264 : 8069$.

en $96 \times BE$ of de omtrek van den veelhoek: $AB > 96 \times 264$ of $25344 : 8069$ of $> \frac{25344}{8069} : 1$ of $> 3\frac{1137}{8069} : 1$

Maar $\frac{1137}{8069}$ is $< \frac{10}{71}$, en de omtrek van den cirkel is nog grooter dan die van den veelhoek: dus is omtrek van den cirkel tot de middellyn $> 3\frac{10}{71} : 1$ of $> 223 : 71$.

II. AANMERKING.

De reeden van 22 : 7, hoe wel iets te groot, is echter in de praktyk voor de meeste gevallen voldoende.

III. AANMERKING.

ARCHIMEDES is eenigzins anders te werk gegaan dan de nieuwere Wiskonstenaars die hem gevolgd zyn: hy heeft niet de zyden van den 12-hoek, van den 24-hoek, van den 48-hoek, van den 96-hoek, berekend voor eene gegeeven middellyn; maar hy heeft enkel gezocht naar de reeden welke de zyde van ieder dier veelhoeken tot de middellyn hebben moet: en daar die reeden onmeetbaar is, heeft hy voor den veelhoek om den cirkel, die grooter is dan de cirkel, altoos eene reeden genomen die iets grooter is, en voor den veelhoek in den cirkel, die kleiner is dan de cirkel, eene reeden die iets kleiner is dan de waare reeden van de zyde van den veelhoek om of in den cirkel, tot de middellyn. Zyne berekening steunt gevolglyk niet op getalen die slechts ten naasten by naauwkeurig zyn, maar op waare getalen. Zie hier over MONTUCLA *Histoire de la Quadrature du cercle*, p. 31—36.

IV. AANMERKING.

LUDOLF VAN CEULEN heeft eenen anderen weg ingeslagen: hy berekende met behulp van het 5 Gevolg van ons XVII, en van het XXI Voorstel van ons VI Boek, de zyden van veele veelhoeken in en om den cirkel beschreeven: Hy trok ten dien einde de wortels uit onmeetbaare getalen met veel naauwkeurigheid, en tot een groot getal van decimaalen. Hy vindt dus in zyn Boek *over den Cirkel*, alwaar men het geheel beloop van zyne bereekening zien kan, dat, indien men de middellyn gelyk aan 1 stelt, en eenen veelhoek van 32212254720 zyden gebruikt, de omtrek des cirkels grooter is dan

3,14159265358979323845

en kleiner dan

3,14159265358979323847.

Na-

Naderhand nog naauwkeuriger te werk gaande, vind hy in zyne *Fundamenta Aritbmetices et Geometriae*, dat, indien men de middellyn des cirkels 1 ftelt, de omtrek des cirkels grooter is dan

3,14159265358979323846264338327950

en kleiner dan

3,14159265358979323846264338327951.

De reeden van ARCHIMEDES 22 : 7 tot eene decimaale breuk gebragt, geeft 3,14285: dus is die te groot: en wel byna $\frac{126}{100000}$ of byna $\frac{1}{800}$ gedeelte.

V. AANMERKING.

JACOB METIUS heeft de reeden van 355 : 113 gevonden, die in geheele getalen uitgedrukt reeds zeer naauwkeurig is: want, indien men dezelve tot eene decimaale breuk brengt, geeft zy, 3,1415929: dat niet eens $\frac{3}{10000000}$ deelen te groot is.

Zie hier over MONTUCLA ter aangehaalde plaatfe, en TAQUET *selecta ex* ARCHIMEDE, *schol* 4: pr. 6: p. 275.

VI. AANMERKING.

Wy zullen in het 4 Gevolg op het XIX Voorftel van het VIII Boek toonen, hoe veel dit werk door het gebruik van de *Sinus-Tafelen* verkort wordt: doch men lette wel, dat daar het lastige van dit werk alleen hier in beftaat, dat men de zyden van verfcheiden veelhoeken, zo wel in als om den cirkel befchreeven, berekenen moet, en daar de *Sinusfen* en *Tangenten* de halve zyden van dergelyke veelhoeken zyn, men in het berekenen van de *Sinus-Tafelen* juist dat lastige werk reeds verricht heeft: en gevolglyk dat de verkorting meer fchynbaar dan weezenlyk is.

VII. AANMERKING.

SNELLIUS, doch vooral na hem HUIGENS, hebben veele verkortingen gebruikt: zy hebben naamelyk nieuwe eigenschappen van veelhoeken, in of om den cirkel beschreeven, gevonden, waar door zy in staat gebragt zyn, met behulp van veelhoeken uit een gering getal zyden bestaande, de zelfde naauwkeurigheid te erlangen, welke LUDOLF, door het gebruik van veelhoeken uit een grooter getal zyden bestaande, verkregen had. Hunne bewerkingen waaren op de volgende Voorstellen gegrond.

XVII. VOORSTEL. Fig. 173.

Een cirkelstuk kleiner dan de halve cirkel, is grooter dan vier derde gedeelten van den gelykbeenigen driehoek, die op de choorde van dat stuk in hetzelve beschreeven is. HUIGENS pr. 3.

BEREIDING. Men beschryve op de beenen, FE en ED, de gelykbeenige driehoeken FIE, ELD: die dus onderling gelyk zyn: vervolgens wederom op FI, IE, EL, LD, de driehoeken FmI, InE, EoL, LpD, allen onderling gelyk; en zo voorts wederom andere driehoeken op de zyden dier driehoeken.

BEWYS. Door VI., 26. is

$$\triangle FED < 4\,(\triangle FIE + \triangle ELD)\text{: of}$$

$$\triangle FIE + \triangle ELD > \tfrac{1}{4}\,\triangle FED.$$

Insgelyks zyn de $\triangle\ \triangle$ op FI en IE, EL en LD beschreeven te samen $> \frac{1}{4}\,(\triangle FIE + \triangle ELD)$ en dus $> \frac{1}{16}\,\triangle FED$:

Het zelfde heeft plaats voor alle de driehoeken die men op Fm, mI, In enz. beschryven kan.

Dus is de som van alle die driehoeken $> \triangle FED + \frac{1}{4}\,\triangle FED + \frac{1}{16}\,\triangle FED + \frac{1}{64}\,\triangle FED$ &c. of $> \triangle FED\,(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} +$ &c.)

Dus is de *limiet* van de som van alle die driehoeken groo-

grooter dan de limiet van $\triangle$ FED $\times (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} +$ &c.$)$ dat is, dan $\frac{4}{3} \triangle$ FED (II. Aanm. op de I. Bepaaling van dit Boek).

Maar het cirkelſtuk FIELD is de *limiet* van de ſom van alle de drieboeken (XVI. Voorſtel): dus is het cirkelſtuk $>$ $\frac{4}{3} \triangle$ FED.

XVIII. VOORSTEL. Fig. 173.

Een cirkelſtuk (IEL) dat kleiner is dan een halven cirkel, is kleiner dan twee derde gedeelten van den gelykbeenigen driehoek (IGL), op de choorde van dat cirkelſtuk door de tangenten aan de uiteinden van den boog gevormd.

HUIGENS pr. 4.

BEREIDING. Men trekke door E de raaklyn XEY.

Men beſchryve op IE, EL, de gelykbeenige driehoeken I*n*E, E*o*L: en trekke door de kruinen *n* en *o* de raaklynen *qnr*, *sot*: men beſchryve wederom op I*n*, *n*E, E*o*, *o*L, dergelyke driehoeken, en altoos zo voorts.

BEWYS. $\triangle$ XGY $+$ $\triangle$ X*qr* $+$ $\triangle$ *sTt* erz. $> \frac{1}{2} \triangle$ IEL $+ \frac{1}{2} \triangle$ I*n*E $+ \frac{1}{2} \triangle$ E*o*L &c. (VI., 27.)

Dus ook $> \frac{1}{2}(\triangle$ IEL $+ \triangle$ I*n*E $+ \triangle$ E*o*L &c.)

De limiet van de eerſte ſom is dus ook grooter dan de limiet van de helft van de tweede ſom: dat is: de ruimte tusſchen de lynen IG, GL, en den cirkelboog I*n*E*o*L begreepen, is grooter dan de halve inhoud van het cirkelſtuk I*n*E*o*LI: en dus is de gemelde ruimte te ſamen met het gemelde cirkelſtuk, dat is de geheele $\triangle$ IGL $> 1\frac{1}{2}$ cirkelſtuk I*n*E*o*LI.

of

Cirkelſtuk I*n*E*o*LI $< \frac{2}{3} \triangle$ IGL.

AANMERKING. Het loopt in het oog waarom men hier een cirkelſtuk neemt dat kleiner is dan een halve cirkel: want indien I*n*E*o*L een halve cirkel was, zouden de lynen IG, GL evenwydig aan elkander zyn, en dus geen driehoek uitmaaken.

XIX. VOORSTEL. Fig. 162.

De inhoud *van een' cirkel is* altoos grooter dan die van eenen *regelmatigen veelhoek* van een even getal zyden in denzelven *beschreeven*, te saamen met een derde gedeelte van den *overmaat* van dien veelhoek boven dien van een veelhoek *in den* zelfden cirkel beschreeven, doch die maar de helft van het getal zyden van den eerstgemelden behelst.

HUIGENS. pr. 5.

BEREIDING. Zij F I E L D *d* B T A *t* F de regelmatige veelhoek in den cirkel beschreeven, waar van de zyden 2 *g* in getal zyn, en men noeme deszelfs inhoud kortheidshalven *V*.

Zy F E D B A F de andere veelhoek, die maar half zo veel zyden als de eerstgemelde bezit: men noeme deszelfs inhoud kortheidshalven *v*.

De overmaat van den eerstgemelden veelhoek boven den laatstgemelden is dus gelyk aan een getal *g* van driehoeken allen gelyk aan △ F I E: dus $V - v = g \times$ △ F I E; en $V = v + g \times$ △ F I E.

BEWYS. De inhoud van den cirkel is $= v +$ segm. F I E + segm. E L D + segm. D *d* B &c. $= v + g \times$ segm. F I E.

Maar segment F I E $>$ $\frac{4}{3}$ △ F I E (XVII Voorst.) dus
Inhoud van den cirkel $> v + \frac{4}{3}\, g \times$ △ F I E
of $> v + g \times$ △ F I E $+ \frac{1}{3} g \times$ △ F I E
of $> V + \frac{1}{3}(V - v)$.

AANMERKING. Men ziet hoe veel naauwkeuriger dit Voorstel de getalen, waar door men den inhoud van den cirkel kan uitdrukken, beperkt: volgens de manier van ARCHIMEDES weet men alleen dat de inhoud van den cirkel grooter is dan die van eenen 96-hoek in denzelven beschreeven: doch door dit Voorstel weet men bovendien dat hy grooter is dan die van eenen 96-hoek te samen met $\frac{1}{3}$ van het verschil tusschen den 96-hoek en den 48-hoek.

XX. VOOR-

XX. VOORSTEL. Fig. 173.

De inhoud van een' cirkel is kleiner dan twee derde gedeelten van eenen veelhoek van een even getal zyden om den cirkel beschreeven, te samen met het derde gedeelte van den gelykvormigen veelhoek in denzelven beschreeven.

HUIGENS. pr. 6.

BEWYS. Cirkelstuk I *n* E *o* L I ≺ $\frac{2}{3}$ △ IGL: (XVIII Voorstel) gevolglyk.

Cirkelstuk *n* E *o* L I + △ ICL ≺ $\frac{2}{3}$ △ IGL + △ ICL

of *Sector* ICLEI ≺ $\frac{2}{3}$ stuk CIGL + $\frac{1}{3}$ △ ICL:

en dus:

g × *Sector* ICLEI ≺ $\frac{2}{3}$ × *g* stuk CIGL + $\frac{1}{3}$ *g* × △ ICL:

Inhoud van den cirkel ≺ $\frac{2}{3}$ veelhoek om den cirkel + $\frac{1}{3}$ veelhoek in den cirkel.

I. AANMERKING. Door de manier van ARCHIMEDES weet men slechts dat de cirkel kleiner is dan de 96-hoek om denzelven beschreeven: thans weet men dat hy kleiner is dan twee derde gedeelten van dien veelhoek en $\frac{1}{3}$ van den 96-hoek in den cirkel; waar door de afwyking van de waarheid nader beperkt wordt.

II. AANMERKING. Daar men door het XVII Voorstel van het VI Boek, en deszelfs V en VI Gevolg zeer gemaklyk den inhoud van eenen veelhoek in den cirkel vinden kan, en dan door het XXI dien van den veelhoek om den cirkel, ziet men hoe gemaklyk men door dit Voorstel den inhoud van den cirkel kan bepaalen. Door middel van eenen twaalfhoek verkrygt men reeds eene zeer aanmerkelyke naauwkeurigheid.

GEVOLG.

De inhoud van eenen *Sector* CIELC is ook kleiner dan twee derde gedeelten van het trapezium (CIGLC) gevormd door twee radiussen en twee tangenten op de uiteinden van den boog des Sectors getogen: te samen met een derde gedeelte van den middelpunts driehoek ICL.

HUIGENS. pr. 6.

XXI. VOOR-

XXI. VOORSTEL. Fig. 162, of 173. en 174.

De omtrek van den cirkel is grooter dan de omtrek van eenen regelmatigen veelhoek van een even getal zyden, in denzelven beschreeven, te samen met het derde gedeelte van het verschil tusschen dien omtrek en den omtrek van den veelhoek die maar de helft van dat getal zyden bezit.

HUIGENS. pr. 7.

BEREIDING. Men stelle dat F D de zyde is van eenen veelhoek: dat F E, E D, de zyden zyn van eenen veelhoek van een dubbeld getal zyden: en F I, I E, E L, L D, de zyden van eenen veelhoek die wederom een dubbeld getal zyden heeft:

Zy Fig. 174. gh gelyk aan den omtrek van den veelhoek op F D (*): zy gi gelyk aan den omtrek van den veelhoek op F E: en $ik = \frac{1}{3} hi = \frac{1}{3}(gi - gh)$. Eindelyk zy de loodlyn nz gelyk aan den radius van den cirkel: men trekke ng, nh, ni, nk; en men noeme O den omtrek van den cirkel.

BEWYS. $\triangle gni =$ veelhoek op F I
$\triangle gnh =$ veelhoek op F E } VI, 17 Gev. 6.

en dus $\triangle ink = \frac{1}{3}(\triangle gni - \triangle gnh) = \frac{1}{3}$ (veelh. op F I — veelh. op F E.)

Gevolglyk inhoud van den cirkel $> \triangle gni + \triangle nik$ (XIX Voorst.) of wel (Voorstel 13., en IV 7, Gev. 8. N°. 6.)

$$O \times \frac{nz}{2} > gi \times \frac{nz}{2} + ki \times \frac{nz}{2}$$ en dus

$$O > gi + ki \text{ of } > gi + \tfrac{1}{3}(gi - gh)$$

I. GEVOLG.

Zy P de omtrek van eenen veelhoek, en p die van den voorgaanden, d. i. van dien welke maar het halve getal zyden heeft; zo is

O

(*) De figuur 174 is uit gebrek van plaats op eene kleiner schaal dan de figuur 173 of 162 geteekend: doch dit doet niets ter zaake.

$O > P + \frac{P - p}{3}$: of $> \frac{4}{3} P - \frac{p}{3}$: dus is in woorden :

„ De omtrek van den cirkel is altoos grooter dan vier „ derde gedeelten des omtreks van een' veelhoeks in dien „ cirkel befchreeven, die een even getal zyden heeft, min „ het derde gedeelte van dien van eenen veelhoek die maar „ het halve getal zyden heeft.

HUIGENS, pr. 71 Cor.

AANMERKING. De zyde van den zeshoek is de radius: dus is het derde gedeelte van zynen omtrek gelyk aan de middellyn: en dus zyn 16 zyden van den twaalfhoek min de middellyn kleiner dan de omtrek van den cirkel: doch het verfchil is zeer gering. De zyde nu van een' twaalfhoek wordt zeer gemaklyk bereekent door VI, 17. het 8 Gevolg. Men ziet dus dat men hier naauwkeuriger te werk gaat dan door de manier van ARCHIMEDES, door welke men flechts weet dat de omtrek van den cirkel grooter is dan die des veelhoeks in den cirkel befchreeven.

IIe GEVOLG.

Het blykt uit het bewys en uit het XIX Voorftel, dat het geen voor den geheelen cirkel plaats heeft, ook voor iederen boog plaats heeft: gevolglyk „ is een boog altoos „ grooter dan de vier derde gedeelten van zyne choorde „ min het derde gedeelte van de helft der choorde van eenen „ dubbelen boog: of grooter dan de choorde, te famen met „ een derde gedeelte van het verfchil tusfchen de choorde, „ en de halve choorde van eenen dubbelen boog."

II. AANMERKING. HUIGENS gebruikt het woord *finus* van den boog in plaats van de *helft der choorde van eenen dubbelen boog.* Wy zullen in het XIII Voorftel van het VIII Boek zien dat dit op het zelfde uitkomt.

III. GEVOLG. Fig. 174. *a*

Hier uit volgt eene zeer gemaklyke manier om eene rechte lyn, die ten naasten by gelyk zy aan eenen gegeeven cirkel boog,

boog, geometrisch te vinden; mits die boog kleiner zy dan het vierde gedeelte van eenen cirkel.

Zy ACB de boog: deel denzelven in twee gelyke deelen in C: trek AC, CB: verder CE loodrecht: zy FG = AB: FI = AC + CB: IK = ⅓ GI: zo zal FK ten naasten by de gezochte lyn zyn. Want boog CB > CB + ⅓ (CB−EB) dus boog ACB > AC + CB + ⅓ (AC + CB−AB) of boog ACB > FI + ⅓ (FI−FG) of > FI + ⅓ GI of > FI + IK. of grooter dan FK.

HUIGENS. pr. 12.

AANMERKING. Naarmate de gegeeven boog kleiner is, komt de lyn FK nader aan denzelven: daarom hebben wy eenen boog vereischt kleiner dan een vierde gedeelte van den omtrek: doch indien de gegeeven boog grooter was, zoude men den zelven in 2, 4, 8, of meerder deelen verdeelen, dat geometrisch geschieden kan: men neeme dan FK gelyk aan een der deelen: en dan het dubbeld, of viervoud, of achtvoud van FK.

XXII. VOORSTEL. Fig. 175.

Indien men uit het uiteinde (B) van de middellyn (BG) eene snylyn (BK) trekt, die den cirkel snydt, en tot aan de raaklyn (GKE) op het ander eind (G) van de middellyn getogen komt; is de boog (CG) tusschen de eerstgemelde lyn BC en de middellyn (BG) begreepen altoos kleiner dan twee derde gedeelten van het stuk (GK) dat door de gemelde snylyn (AK) van de raaklyn (GK) wordt afgesneeden, te samen met het derde gedeelte van de loodlyn (CH) uit het einde des boogs op de middellyn (BG) nedergelaaten.

HUIGENS. pr. 8.

BEREIDING. Zy CZ eene raaklyn aan C: trek AZ.

Stuk ACZG = 2 △ ACZ: = △ waar van AC de grondlyn en 2 CZ de hoogte: of 2 CZ de grondlyn en AC of AG de hoogte: (IV 7. het 8 Gev. n°. 5.) maar CZ = GZ (V. 15. Gev.)

Dus, indien men uit Z met den radius ZG eenen cirkel be-

beschreef, zoude dezelve door C en G gaan, doch ook door K. Immers is hoek BCG = recht (V. 5.) dus ook GCK: en dus moet de halve cirkel door K gaan: dus ook KZ = ZG = CZ en KG = 2KZ.

Gevolglyk stuk ACZG = △ waar van AG de grondlyn en GK de hoogte is.

Maar van △ ACG is AG de grondlyn en CH de hoogte: en dus is △ ACG = △ waar van CH de hoogte en AG de grondlyn is

Eindelyk Sector CAG = △ waar van boog CG de grondlyn en AG de hoogte is (XIII. Voorst. 3. Gev.) of AG de grondlyn en CG de hoogte.

Dus: Sector CHG: Trap. ACZG: △ ACG = boog CG: GK: CH. (IV. 7. Gev. 1.)

Maar *Sector* CAG. ≻ $\frac{2}{3}$ stuk ACZG + $\frac{1}{3}$ △ ACG: (XX Voorst. Gev.

dus boog CG ≺ $\frac{2}{3}$ GK + $\frac{1}{3}$ CH.

XXIII. VOORSTEL. Fig. 175.

De omtrek van den cirkel is kleiner dan twee derde gedeelten van den omtrek eens regelmatigen veelhoeks in den cirkel beschreeven, te samen met een derde gedeelte van den omtrek eens gelykvormigen veelhoeks, om den cirkel beschreeven.

HUIGENS. pr. 9.

BEREIDING. Zy CH de halve zyde des veelhoeks in, en dus ACE trekkende, zy EG de halve zyde des veelhoeks om den cirkel beschreeven.

Men trekke BC tot in K verlengd.

Men stelle LH = HG: dus BL = (BG—LG) = 2 (AG—HG) = 2 AH.

BEWYS.

EG: CH = AG: AH (IV, 2.)

dus EG + CH: CH = AG + AH: AH (III, 8, n_o 1.)

Maar CH: KG = BH: BG (IV, 2.)

dus

dus $EG + CH : KG = (AG + AH) \times BH : AH \times BG$: (III, 11.)

of $EG + CH : KG = BH \times BH : AH \times BG$.

dus

$EG + CH : 2KG = BH \times BH : 2AH \times BG$
$= \square$ op BH : rechth. uit BL, BG.

Maar $\square$ op $BH =$ rechth. uit BH, $BL +$ rechth. uit BH, LH:

en rechth. uit BL, $BG =$ rechth. uit BL, $BH +$ rechth. uit BL, HG.

Maar rechth. uit BH, $LH >$ rechth. uit BL, HG:

dus: $\square$ op $BH >$ rechth. uit BL, BG.

en $EG + CH > 2KG$.

en $\frac{EG + CH}{3} > 2\frac{KG}{3}$

en $\frac{EG + 2CH}{3} > \frac{2KG + CH}{3}$.

Maar boog $CG < \frac{2}{3} KG + \frac{1}{3} CH$ (XXII Voorst.)

dus boog $CG < \frac{2}{3} CH + \frac{1}{3} EG$.

en dus ook de geheele omtrek des cirkels $< \frac{2}{3}$ omtrek des veelhoeks op $CD + \frac{1}{3}$ omtrek des veelhoeks op EF.

I. AANMERKING. Volgens de manier van ARCHIMEDES vindt men alleen dat de omtrek des cirkels kleiner is dan de omtrek des veelhoeks om den cirkel beſchreeven: doch nu vindt men dat de omtrek des cirkels kleiner is dan eene grootheid welke zelve kleiner dan de gemelde omtrek des veelhoeks is. En dus komt men tot grooter naauwkeurigheid.

GEVOLG.

Daar boog $CG < \frac{2}{3} CH + \frac{1}{3} EG$: „ is ieder boog die
„ kleiner is dan een vierde van den omtrek, kleiner dan twee
„ derde gedeelte van de halve choorde van den dubbelden
„ boog, te ſamen met een derde van de raaklyn EG.

II. AANMERKING. SNELLIUS en HUIGENS gebruikten het

woord

woord *finus* in plaats van halve choorde van den dubbelden boog: de reeden daar van zullen wy in het XIII Voorstel van het VIII Boek uitleggen.

III. AANMERKING. Dit zyn de Voorstellen, eerst door SNELLIUS opgegeeven, doch niet ten vollen beweezen; HUIGENS ondernam en volbragt dien taak. Hier door kan men met veel minder' omslag dezelfde naauwkeurigheid erlangen, die LUDOLF door eenen zeer grooten arbeid verkreegen heeft. HUIGENS is naderhand nog verder gegaan; en heeft nog twee andere Voorstellen gegeeven, die het werk nog merkelyk verkorten, doch die niet tot de eenvoudige grondbeginselen der Meetkunde behooren; en welke wij gevolglyk hier niet kunnen byvoegen.

IV. AANMERKING Na de tyden van LUDOLF, SNELLIUS of HUIGENS, heeft men door de zogenaamde *verheevene* Wiskunde middelen gevonden om de reeden van den omtrek tot de middellyn nog gemaklyker en nog naauwkeuriger te bepaalen: en wel zo, dat, indien 1 voor de middellyn genomen wordt, de geheele omtrek door dit getal zal worden uitgedrukt, waarvan de laatste cyffer te klein is: doch zo die 1 grooter was, was het geheele getal te groot: namenlyk:

3, 141, 592, 653, 589, 793, 238, 462, 643, 383, 279, 502, 884, 197, 169, 399, 375, 105, 820, 974, 944, 592, 307, 816, 406, 286, 089, 986, 280, 348, 253, 421, 170, 679, 821, 480, 865, 132, 723, 066, 470, 938, 446.

EULER, *Introd.* §. 126.

Men zal van de overgroote naauwkeurigheid dezer uitdrukking kunnen oordeelen, indien men in acht neemt, dat zo men de 21 eerste cyfferletters van deeze breuk neemt, van welke 21 letteren deeze (462) de drie laatste zyn, en men voor de laatste in plaats van 2 een 3 stelt, het verschil op eenen cirkel, die zo groot is als de omtrek des geheelen aardkloots, nog niet het 28000000000ste gedeelte van een' zandkorn zoude bedragen indien

men reekent dat 200 zandkorreltjes, naast elkander op eene rechte lyn geplaatst, de lengte van een' duim uitmaaken.

Zie KLINKENBERG, *Verb. van de Haarlemsche Maatsch.* III. Deel p. 156.

V. AANMERKING. Daar men nu de paalen, tusschen welken de reeden van den omtrek tot de middellyn besloten is, met eene vry groote naauwkeurigheid kent, zullen ook alle *reedens*, die men opgeeft, en die men niet anders bewyst dan met aan te toonen, dat zy binnen die zelfde palen vallen, ook aangenomen kunnen worden; en op dit grondbeginsel rusten veele manieren, die men voorgesteld heeft om eene lyn gelyk aan eenen cirkelboog te trekken, of een vierkant gelyk aan den inhoud van eenen cirkel te maaken. Uit allen zullen wy deeze twee, die eenen grooten graad van naauwkeurigheid bezitten, opgeeven.

I. Men deelt eene lyn in uiterste en middelste reeden: het kleinste stuk staat tot de geheele lyn, als de middellyn van den cirkel tot vyf zesde gedeelten van den omtrek.

VIETA, p. 392. Men stelt een getal voor het kleinste stuk: men bereekent door de bekende eigenschap van eene lyn op die wyze gesneeden, dat namelyk de rechthoek uit de geheele lyn en het kleinste stuk gelyk is aan het vierkant van het grootste stuk, de waarde van de geheele lyn: welke men gemaklyk uit de 6 en 7 Aanmerking op het VII Voorstel van het IV Boek afleidt: of men gebruikt de geometrische constructie waar van wy in het V Boek, XII Voorstel, 9 Aanmerking, gesproken hebben, en men vindt dat de reeden van het kleinste stuk tot de geheele lyn maar zeer weinig afwykt van die, welke men, uit de reeden door LUDOLF gegeeven, voor de reeden van den diameter tot vyf zesde deelen van den omtrek, afleidt.

De volgende wyze is geheel geometrisch.

II. Zy B C D (Fig. 176.) een halve cirkel, en B C een vierde deel, laat de rechte hoek B A C, in drie deelen gesneden wor-

worden, waar van ∠ BAE een is; het geen geometrisch geschied.

Trek DL en BI ⊥ ⊥ op BD: verleng AE tot in I: trek IM loodrecht op DL: neem DL = 3 AB: trek IL: deeze lyn is zeer ten naasten by gelyk aan den halven omtrek.

Trek EF ⊥ op FD: stel den radius BA = 1: dus is FE de halve choorde van een' boek die = $\frac{1}{3}$ L is: dus (II., 7. het 1 Gev.) $FA = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$.

Maar AF : FE = AB : BI: dus

$BI = \frac{1}{\sqrt{3}} = DM$: dus $ML = 3 - \sqrt{\frac{1}{3}}$ en

$$IL = \sqrt{4 + (3 - \sqrt{\tfrac{1}{3}})^2} = \sqrt{4 + 9 - 6\sqrt{\tfrac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}} =$$

$$\sqrt{\frac{39}{3} - \frac{2\sqrt{9}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} =$$

$$\sqrt{\frac{120}{9} - \frac{18\sqrt{3}}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}}$$: het geen ontwikkeld voor IL geeft 3,14153, dat dus zeer wel overeenkomt.

KOCHANSKI. *Acta Lipsiensia* 1685. p. 397.

XXIV. VOORSTEL.

De Boog- wiens lengte gelyk is aan den radius, beheist ten naasten by 57°. 17'. 44, 8''.

BEWYS. Uit het XVI. Voorstel, de reeden door LUDOLF gegeeven gebruikende.

XXV. VOORSTEL.

De inhoud van den cirkel staat tot het vierkant op den diameter zo als 11 : 14, indien men de reeden, door ARCHIMEDES gegeeven, gebruikt.

S. p. 272.

BEWYS. Uit het 2 Gevolg van het XIII Voorstel.

I. AANMERKING. Indien men de reeden door LUDOLF ge-

geeven wil gebruiken, ſtaat de inhoud van dien cirkel tot het vierkant op de middellyn, zo als 0,7853981634 : 1 dat is als 10,9955742876 : 14 : het geen maar zeer weinig van 11 : 14 verſchilt.

II. AANMERKING. Indien de halve middellyn 1, en dus de geheele middellyn 2 geſteld wordt: zal de inhoud van den cirkel 3,1415926536, en dus byna 3,1416 bedraagen.

III. AANMERKING. Indien men het grondbeginſel dat wy in de V Aanmerking op het XXIII Voorſtel gegeeven hebben gebruikt, zal men vinden, „ dat, zo men eene „ lyn in uiterſte en middelſte reeden ſnydt, de geheele „ lyn te ſamen met het kleinſte ſtuk zal zyn tot de „ dubbelde lyn, zo als de wortel uit anderhalfmaal den „ radius tot de zyde van het vierkant dat gelyk is aan „ den inhoud van den cirkel."

Men ſtelt de lyn zelve gelyk aan een: men bereekent het kleinſte ſtuk: en men vindt dat de gemelde evenreedigheid juist dat geen opleevert, dat uit de reeden van LUDOLF volgt.

En hier uit ontleent men de volgende geometriſche conſtructie. (Fig. 177.)

Laaten BC, DE twee diameters zyn die zich rechthoekig ſnyden: deel AC in uiterſte en middelſte reeden in H. Trek EC: dus $EC = \sqrt{2}$: maar ſtel $AF = \frac{1}{2} EC$: dus $AF = \frac{\sqrt{2}}{2}$: Trek BF verlengd: dus $BF = \sqrt{1 + \frac{1}{2}}$:

[redacted]

ACHTSTE BOEK,

OVER HET MEETEN VAN HOEKEN DOOR CIRKELBOGEN EN HET BEREEKENEN VAN DEZELVEN DOOR CHOORDEN, SINUSSEN, TANGENTEN, EN SECANTEN.

I. AFDEELING,

OVER HET MEETEN VAN HOEKEN DOOR CIRKELBOOGEN.

I. VOORSTEL. Fig. 178.

In den zelfden cirkel, of in gelyke cirkels is er tusſchen de hoeken, zo wel in het middelpunt als in den omtrek de zelfde reeden als tusſchen de boogen op welke zy rusten: het zelfde heeft vóór de *Sectoren* plaats: en een hoek in het middelpunt ſtaat tot vier rechten, zo als de boog op welken hy rust tot den geheelen omtrek.

EUCL. VI. 33.

BEREIDING. Men neeme de bogen GB, BI, gelyk aan AG; en eeven veel boogen MN, NO gelyk aan KM: men trekke CB, CI; LN, LO.

BEWYS. VOOR HET I. Uit de beſchouwing dat boog AI en LACI gelykvouden zyn van boog AG en LACG: zo als ook boog KO en LKLO van boog KM en LKLM, en dan uit III, 3: V, 4. Gev. 1. en V. 3.

VOOR HET II. Volgt uit het I.

VOOR HET III. Uit V. 4, Gev. 3.

I. GEVOLG.

Een boog kan dan voor de maat van eenen hoek in het middelpunt gehouden worden, zo lang men van den zelfden cirkel spreekt: en wy zullen die spreekwyze aanneemen.

II. GEVOLG.

De maat van eenen hoek in den omtrek is de helft van den boog op welken hy rust: (1. Gev. en V. 3.)

II. VOORSTEL. Fig. 80*.

De boogen (DF, AG) van ongelyke cirkels, op welke gelyke hoeken (ACG, DCF), namelyk allen in den omtrek, of allen in het middelpunt rusten, zyn onderling in de zelfde reeden als de omtrekken waar van zy deelen zyn. En omgekeerd, indien twee boogen van ongelyke cirkels tot elkander staan als de geheele omtrekken, zullen de hoeken in het middelpunt, of de hoeken in den omtrek, die op dezelven rusten, gelyk zyn.

Zie KOENIG Cor. 2. op EUCL. VI. 33.

BEWYS. VOOR HET I. GEDEELTE. Uit n°. 3. van het I. Voorstel, en III. Axioma 4.

VOOR HET II. Uit het I, door het ongerymde

I. GEVOLG.

Dus rusten, in ongelyke cirkels, gelyke hoeken op gelykvormige bogen. (VII. 12. het 2 Gev.)

II. GEVOLG.

De bogen van twee ongelyke cirkels, op welke gelyke hoeken rusten, zyn zo als de halve middellynen dier cirkels, en deeze zo als de choorden dier bogen (VII. 12. en IV. 2.)

St. p. 269. Cor.

III. GE-

III. GEVOLG.

En omgekeerd, zo bogen van ongelyke cirkels zyn als de geheele omtrekken, of de halve middellynen, zullen de hoeken die op dezelven rusten gelyk zyn, en hunne choorden zullen zyn zo als de halve middellynen.

IV. GEVOLG.

Dus zyn, in alle cirkels, de bogen de eigenaartige maat der hoeken in het middelpunt: en de halve bogen die van de hoeken in den omtrek.

V. GEVOLG.

Hier op steunt het meeten der hoeken in graaden.

I. AANMERKING. Volgens een oud gebruik deelt men den omtrek van eenen cirkel in 360°: en de graaden wederom door een geduurige zestigdeelige verdeeling in *Minuuten*, *Secunden*, *Tiercen* enz.

S. p. 5. d. 14.

II. AANMERKING. Hierop, en op IV, 2, steunt het gebruik van die lynen op den proportionaal passer welke met het woord *choorde* bestempeld zyn: deeze dienen om de choorden van alle bogen gemaklyk te vinden, en dus ook de zyden van alle mogelyke veelhoeken, en dat wel door VI, 4, Gev. 1: en dit gebruik is veel algemeener dan dat van de lyn der Polygonen. Zie VI. 8. Aanmerking. — Hier op steunt insgelyks het gebruik van den *kleinen cirkel* of *Transporteur* om hoeken te meeten.

VI. GEVOLG.

De zelfde straalen snyden gelykvormige boogen van de omtrekken van cirkels die om het zelfde middelpunt staan.

Zie KOENIG 3 Cor. op EUCL. VI. 33.

III. VOORSTEL. Fig. 84.

Gelykvormige cirkelstukken (ABC, DEF) zyn

die welke gelyke hoeken bevatten: en gelykvormige Sectoren zyn die welke door ſtraalen, gelyke hoeken bevattende, gevormd worden.

S. p. 107. def. 11. p. 108. pr. 13 p. 109. pr. 14 p. 270. d. 7.

BEWYS. VOOR HET I. Uit het I. Voorſtel toont men dat de boogen, op welke de hoeken ABC, en DEF rusten, zyn als de omtrekken: en dus uit III. 8. n°. 2, dat de bogen ABC en DEF het ook zyn, waar uit het Voorſtel door VII, 12. Gev. 3. volgt.

VOOR HET II. Uit de gelykheid der hoeken, en dus de gelykvormigheid der bogen, en hunne gelyke reeden tot de ſtraalen, (door het I Voorſtel, en VII, 11. Gev. 2.)

AANMERKING. EUCLIDES ſtelt dit Voorſtel onder de *Axiomata* van zyn derde boek.

I. GEVOLG.

De bogen van gelykvormige cirkelſtukken of Sectors, zyn als de bogen der cirkels, of de choorden daar die op rusten.

II. GEVOLG.

En dus zyn de gelykvormige cirkelſtukken, die op gelyke choorden ſtaan, gelyk.

EUCL. III. 24.

III. GEVOLG.

En gevolglyk kan men op eene lyn aan den zelfden kant geen twee cirkelſtukken plaatſen, die gelykvormig en teevens ongelyk zyn.

EUCL. III. 23. — St. p. 110. pr. 15.

IV. GEVOLG.

Gelykvormige Sectors en cirkelſtukken zyn in verdubbelde reeden der choorden op welke zy ſtaan, of der middellynen van de cirkels tot welke zy behooren (IV. 17.)

TACQUET Schol. 1. op EUCL. XII, 2. — S. p. 277. pr. 28. en p. 279. Cor. pr. 29.

IV. VOORSTEL. Fig. 80*.

Bogen (AG, DE) van ongelyke cirkels, op welke ongelyke hoeken rusten, zyn in samengestelde reeden der hoeken, en der straalen: en de hoeken zyn in samengestelde reeden van de rechte reeden der bogen, en omgekeerde reeden der straalen.

BEREIDING. *Men onderstelt de cirkels om het zelfde middelpunt te staan:* en men verlengt CG in F.

BEWYS. VOOR HET I. Uit het I Voorstel: en III. 10.

VOOR HET II. Uit het eerste: en III. Ax. 5.

AANMERKING. Hoe wel dit Voorstel van veel gebruik is in de Sterrekunde, vindt men het echter byna in geen *elementaire* boeken. Zie het by LA CAILLE *leçons d'Astronomie.* §. 124. en KRAFFT *Geometria sublimior.* §. 107.

GEVOLG.

De Sector CDEC: tot den Sector CAGC = ∠ DCE × $\overline{CD}^2$: ∠ ACG × $\overline{AC}^2$

want uit VII, 13. Gev. 3. is

CDEC: CAGC = ⌒ DE × CD : ⌒ AG × AC:

maar ⌒ DE : ⌒ AG =

∠ DCE × CD : ∠ ACG × AC: dus

Sector CD EC : Sector CAGC = ∠ DCE × CD²:
∠ ACG × AC².

En, indien de Sectors gelykvormig zyn, zyn zy als het vierkant der middellynen.

KRAFFT *Geometria sublimior.* §. 107.

V. VOORSTEL. Fig. 43.

De maat eens hoeks (BAD), in het aanrakings stip (A) door eene raaklyn (BA) en eene choorde (DA) gevormd, is de helft van den boog dien de choorde bespant.

BEWYS. Uit V. 9. en hier het II. Voorstel, 4. Gevolg.

VI. VOORSTEL. Fig. 85.

De maat van eenen hoek (DCE) wiens kruin C binnen den omtrek des cirkels is, is de helft van de som der bogen (DE, AB) op welke de beenen des hoeks, als zy wederzyds verlengd worden, rusten.

L. C. §. 470.

BEREIDING. Men trekt AE.

BEWYS. Uit I. 7. en hier het II. Voorstel, 4. Gev.

VII. VOORSTEL. Fig. 85.

De maat van den uitwendigen hoek (HGI), in den omtrek gemaakt door eene choorde (HG) en eene verlengde snylyn (FG) is de helft van de som der bogen (HG en GF) die gemelde lynen wederzyds van het snypunt bespannen.

BEREIDING. Men trekt HF.

BEWYS. Uit I. 7. en hier het II. Voorstel. 4 Gev.

VIII. VOORSTEL. Fig. 86.

De maat van eenen hoek (DAE) wiens kruin (A) buiten den cirkel valt, is de helft van het verschil der bogen (DE, GH), die de beenen des hoegs bespannen.

L. C. §. 474.

BEREIDING. Men trekt HD.

BEWYS. Uit I. 7. en hier het II. Voorstel. 4. Gev.

GEVOLG. Fig. 165.

Indien de kruin A zodanig op de middellyn ACE genomen wordt, dat AG = GC is, zal de hoek DAE het derde gedeelte van den hoek DCE, en het vierde van den hoek FDE zyn:

want ∠ A = ½ ⌒ DE — ½ ⌒ HG; en ∠ GCA = ⌒ HG:

dus:

½ ⌒ DE — ½ ⌒ HG = ⌒ HG: of ⌒ DE = 3 ⌒ HG en dus ∠ DCE = 3 ∠ GCH = 3 ∠ A: en daar ∠ FDE = ∠ DEC + ∠ A (I, 7.) is ook ∠ FDE = 4 ∠ A

AAN-

AANMERKING.

Indien er dan een middel was om, een boog DE of een hoek DCE gegeeven zynde, eene snylyn DGA zodanig te trekken in een' cirkel waar van DC de radius is, dat het stuk buiten den cirkel gelyk zy aan den radius, zoude het zeer gemaklyk vallen eenen hoek in drie gelyke deelen te verdeelen: doch het is niet mogelyk zodanige lyn door middel van den cirkel en van de rechte lyn alléén, dat is, in den strikften zin *geometrisch*, te trekken.

VIETA heeft het vraagstuk van den verdeeling eens hoeks in drie deelen tot dit Voorstel gebragt: *Operum*. p. 245.

II. AFDEELING.

VAN HET BEREEKENEN DER HOEKEN EN BOGEN DOOR SINUSSEN, TANGENTEN EN SECANTEN.

BEPAALINGEN. Fig. 87.

I.

Men noemt *complement* van een' boog (DB) den boog (GD) dien men by den boog (DB) voegen moet om het vierde gedeelte van den cirkel uit te maaken: en *supplement* den boog (AGD) dien men 'er moet byvoegen om den halven cirkel uit te maaken.

Insgelyks: noemt men *complement* van een' hoek (DCB), den hoek (GCD) dien men by denzelven voegen moet, om een' rechten hoek te verkrygen: en *supplement* den hoek (ACD), die 'er bygevoegd moet worden om twee rechten uit te maaken.

S. p. 283. d. 2. 3.

I. AANMERKING. De woorden *complement* en *supplement* bete-

tekenen beiden *byvoegfel* of *aanvulfel*. Het gebruik heeft gewild dat het eene *aanvulfel tot een vierde gedeelte des cirkels*, het ander *tot een' halven cirkel* zoude betekenen.

GEVOLG.

Indien men dus eenen boog, of hoek (dat is het getal graaden dat derzelver grootte aanduidt) van 90° en van 180° aftrekt, verkrygt men het *complement* en het *fupplement*.

II. AANMERKING. Daar de bogen de maat der hoeken zyn (VIII., 2. Gev. 4.) moet men in het vervolg door vierde gedeelte van den cirkel of halven cirkel, een' rechten hoek of twee rechte hoeken verftaan: en 't geen men van bogen zeggen zal ook op hoeken toepasfen, en omgekeerd.

II.

Men noemt *choorde* van eenen boog de lyn (DB), die beide de uiterften des boogs veréénigt: zy onderfpant, wel is waar, zo wel den boog (DAB) die met den voorgaanden (DB) den geheelen omtrek uitmaakt, als den boog (DB) zelven; doch men verftaat altoos ftilzwygend alleen den boog die kleiner is dan de halve omtrek.

III.

Men noemt *finus* (of *hoekmaat*) van eenen boog (DB), de loodlyn (DI) die van een zyner uiteinden nedergelaaten wordt op den diameter (BA), die door het ander einde (B) gaat. En die zelfde loodlyn is ook de *finus* of hoekmaat van den hoek (DCB), waar van de boog (DB) de maat is.

St. p. 284. d. 4. — W. T.

I. GEVOLG.

De finus van eenen boog is ook de finus van het fupplement:

W. T. §. 5.

W. T.

II. GEVOLG.

Hoe grooter de boog is hoe grooter de ſinus is, tot dat men een' boog van negentig graaden, of een vierde gedeelte van den omtrek heeft: dan is de *ſinus* gelyk aan den *radius*, waar om ook de *radius* de *geheele ſinus* (*ſinus totus*) genoemd wordt. De ſinusſen van bogen die grooter zyn dan 90 graaden zyn wederom kleiner, en de ſinus van 180°. is nul.

AANMERKING. Indien men nog verder dan de halve cirkel wilde gaan (Fig. 129.) by voorbeeld tot den boog EBAH, zoude de ſinus HK zyn, de zelfde als BK, dat is voor het verſchil tusſchen den gegeeven boog en den halven omtrek: doch dan valt de ſinus onder den diameter en dus aan het tegengeſtelde van den kant waar op men de ſinusſen der bogen tot 180 gr. toe genomen heeft: Indien men zich dus herinnert wat wy (in het III B. XXI. V. Gev. 4. Aanm.) van *negatieve* grootheeden en derzelver aart gezegd hebben zal het blyken, dat die ſinusſen negatief zyn: dus is ſinus 0° = 0: ſinus 90°. = R: ſinus 180° = 0: ſinus 270° = — R: ſinus 360° = 0 en zo voorts. Doch dit komt in de *elementaire* Meetkunde niet veel te pas.

IV. Fig. 87.

Men noemt *Coſinus* of *meede hoekmaat*, ook *ſchilboogs hoekmaat*, en meest *ſinus complement*, van een' boog (DB) of van een' hoek (DCB) den *ſinus* of hoekmaat (HD) van zyn complement: of, wat op het zelfde uitkomt, het gedeelte (CI) van den radius, dat tusſchen het middelpunt des boogs, of den top des hoeks, en den ontmoeting van den ſinus bevat is.

W. T. §. 7. — St. p. 285. d. 6.

I. GEVOLG.

De Coſinus is kleiner naar maate de boog of hoek groo-

grooter is: die van een' boog van 90 gr. of van eenen rechten hoek is *nul*: hy wordt grooter en komt nader aan de radius, naar mate de boog kleiner wordt en dus nader aan 0 graden komt. Dus is *Cosinus* 0° gelyk aan den radius.

II. GEVOLG.

De Cosinus van een' hoek of boog is ook de Cosinus van zyn supplement.

AANMERKING. (Fig. 179.) Indien men zich het geen wy III. B. XXI. V. Gev. 4. Aanm. over den aart der negatieven grootheeden gezegd hebben herinnert, blykt het dat de Cosinussen van bogen tusschen de 90° en 270° altoos negatief zyn: want men begint ze van M af te tellen: en dus voor de bogen van E af tot C toe naar den kant ME: doch voor de bogen van C tot A, en tot G, naar den kant MA, en dus aan den anderen kant van het begin of den oorsprong der telling; het geen juist het denkbeeld van eene negatieve grootheid uitmaakt: dus is *Cosinus* 0° = R: Cos. 90° = 0: Cos. 180° = — R: Cos. 270° = 0: Cos. 360° = R.

Deeze aanmerking is van gewigt: om dat men veeltyds uit het teeken + of — moet beoordeelen of een bereekende *Cosinus* tot een' boog die kleiner dan 90°, of tot deszelfs supplement, dus tot een' boog die grooter dan 90° is, behoort.

bogen die grooter dan 90 graaden zyn, dat is voor de supplementen der eerstgemelden, is de sinus-versus gelyk aan de som van den radius en den cosinus.

AANMERKING. De sinus-versus is dus altoos *positief*, omdat hy altoos naar den zelfden kant geteld wordt, groeijende van o tot + R en + 2 R.

VI.

Men noemt *Tangent* of *raaklyn* van een' hoek of boog, dat gedeelte (BE) van de onbepaalde raaklyn, het welk begrepen is tusschen het stip van aanraaking (B), en de ontmoeting (E) van den verlengden *radius*, die door het ander eind (D) van den boog gaat.

W. §. 6. — St. p. 286. 8 Bep.

GEVOLG.

De *Tangent* wordt dus grooter naar maate de boog of hoek grooter wordt: doch de tangens van een boog van 90° graden, kan den radius die door het ander eind des boogs gaat niet ontmoeten, om dat hy evenwydig aan den zelven is: en dus is de tangent in dat geval onbepaald groot. Doch de tangenten van hoeken, die grooter dan 90° zyn, zyn gelyk aan de tangenten der bogen of hoeken waar van zy *supplementen* zyn.

AANMERKING. Fig. 179. Indien men op het laatste gedeelte van dit gevolg let, zal men indedaad zien, dat, zo de boog AGD grooter is dan 90°, de radius CD nimmer de raaklyn AE boven den diameter AB raaken kan: maar indien men DC onder den diameter tot in T verlengt, zal AT, volgens de bepaling de tangent van boog AGD zyn: nu is AT = EB = tangent van den boog DB, die het supplement is van boog AGD.

En indien men een verder let op het geen wy in het III Boek, XXI Voorst. Aanm. op het 4 Gev. gezegd hebben,

over

over den aart der negatieve grootheeden, blykt het, d
AI als negatief beschouwd moet worden: en dus is Ta
gens 0° = 0: Tang. 90° = oneindig: Tang. van ee
boog grooter dan 90° negatief: Tang. 180° = 0: Tan
boog grooter dan 180° tot 270° positief: Tang 270°. o
eindig: Tang. boog grooter dan 270° tot 360° positie
Tang 360° = 0.

Wy zullen in het vervolg (Aanm. op Voorstel XIX.
zien, hoe dit met het geen wy van positieve en negatie
sinussen en cosinussen gezegd hebben, overeenkomt.

VII.

De *Cotangent* (GF), of *meede-raaklyn*, ook *tange*
complement genoemd, is de tangent van het compl
ment van een' gegeeven boog of hoek.

W. t. §. 7. — S. p. 287. d. 9.

GEVOLG.

De *Cotangent* wordt dus kleiner naar maate
hoek grooter is: is *nul* voor een' rechten hoek, onei
dig voor een' hoek dien men zoude begrypen *nul*
zyn.

AANMERKING. Het geen wy voor het positieve of neg
tieves van de tangent gezegd hebben, heeft ook voo
de cotangent plaats.

die kleiner dan 90° zynde, de ſupplementen van de eerstgemelde zyn.

AANMERKING. Het geen wy over het *poſitieve* of *negatieve* van de Tangenten gezegd hebben, heeft op de zelfde wyze voor de Secanten plaats.

IX.

Coſecant, (CF) *of mede-ſnylyn*, ook *ſecant complement* genoemd, is de ſecant van het complement.

W. 5. §. 7.

GEVOLG.

De *Coſecant* wordt kleiner naar maate de boog grooter wordt: die van 90° is *nul*: die van een' boog, welken men begrypen zoude nul te zyn, is *oneindig*.

AANMERKING. Het geen wy van het *poſitieve* en *negatieve* van de Secanten gezegd hebben, heeft hier even eens plaats.

BERICHT.

De Eigenſchappen der Sinusſen, Tangenten en Secanten, worden ten vollen door de Meetkunde beweezen, en uit de eigenſchappen van den cirkel en van gelykvormige driehoeken afgeleid: en in zo verre behooren die lynen tot de Meetkunde zelve. Doch de Wiskonſtenaars gaan verder; zy vergelyken de hoegrootheid dier lynen met den *radius*, en drukken dezelve door getalen uit. Dit gaat buiten de paalen van het geen de Ouden Meetkunde noemden: vooral, daar de Sinusſen, Tangenten en Secanten, allen (op drie na, Sinus 30°, Tangens 45° en Secans 60°) door onmeetbaare getalen, en dus ſlechts ten naasten by, kunnen worden uitgedrukt.

Dan, daar wy nu over die lynen meer bepaaldelyk, ten nutte van de praktyk, ſpreeken zullen, en wel met oogmerk om aan te toonen, hoe men derzelver grootheid bereekent; zullen wy geen zwaarigheid maaken, de verkorte uitdrukkingen, in het IV Boek VII Voorſtel, VI en VII Gevolg, uitgelegd, te gebruiken: en van het *product* van twee lynen

te fpreeken, om den *rechthoek*, door dezelven gemaakt, aan te duiden. *Ons XI Voorftel*, by voorbeeld, zoude, volgens de *ftrikte fpreekwyze* der ouden, welke wy tot nu toe in *acht genomen hebben*, dus uitgedrukt worden: „de „*rechthoek uit de* choorde, die de fom van twee boogen „*befpant, en den* diameter, is gelyk aan de fom der recht-„*hoeken uit* de choorde van elken boog, met de choorde „*van* het fupplement des anderen boogs." En het XIV, XV, XVI, en de volgende Voorftellen konden op dezelfde wyze uitgedrukt worden: doch hoewel deeze uitdrukkingen misfchien meer in den fmaak der ouden zouden vallen, verkiezen wy liever de anderen, die korter zyn, en meer onmiddelyk in de reekeningen te pas komen, te gebruiken; vooral daar wy dezelven zeer naauwkeurig uitgelegd, en tevens aangetoond hebben, hoe zy in de daad uit de ftrikfte bewyzen der Meetkunde zelve afgeleid worden. Wy hebben daar in te minder zwaarigheid gemaakt, daar EUCLIDES en ARCHIMEDES zelve ze gebruikt hebben, zo dra het op het reekenen in getalen aan kwam, zo als *duidelyk blykt* uit het VII en X Boek van EUCLIDES, waarvan wy verfcheiden plaatfen hebben aangehaald, en uit het werk van ARCHIMEDES over den Cirkel. Dit zy over onze manier van handelen in de volgende Voorftellen genoeg.

IX. VOORSTEL.

De reedens van Choorden (DB en *db*), Sinusfen (DI en *di*), verkeerde Sinusfen (BI en *bi*), Tangenten (BE en *be*), Secanten (CE en *ce*), Cofinusfen (CI en *ci*), Cotangenten (GF en *gf*), Cofecanten (CF en *cf*) van gelyke hoeken, of van bogen die gelyke hoeken befpannen, en dus gelykvormig zyn, tot den radius, zyn in alle cirkels, welke ook derzelver grootte zyn moge, de zelfden.

W. §. 10.

BEWYS. Uit de gelykvormige driehoeken, door IV. 2.

GE-

GEVOLG.

De Sinusſen, Tangenten, Secanten, zyn dus ook eene waare *maat* van de bogen en van de hoeken: en, welke ook de grootte van den radius zyn moge, worden die ſinusſen, tangenten, ſecanten, altoos door het zelfde getal deelen van dien radius uitgedrukt.

X. VOORSTEL. Fig. 88.

Het vierkant van den diameter is gelyk aan de ſom der vierkanten van de choorde eens boogs, en van de choorde van het ſupplement

dat is, $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2$.

BEWYS. Uit V, 5. en II, 7.

GEVOLG.

De diameter van den cirkel, en de choorde van een' boog gegeeven zynde, vindt men gemaklyk de choorde van het *ſupplement*

dat is, $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2$.

AANMERKING. De choorde van een' boog van 60° is de zyde van den regelmatigen zeshoek in den cirkel beſchreeven, (VI. 8, Gev, 2.) en is dus gelyk aan den radius. Alle andere choorden worden gevonden met den wortel uit getalen te trekken: doch deeze zyn geen vierkante getalen: en dus vindt men die choorden ſlechts by nadering.

XI. VOORSTEL. Fig. 88.

De choorde (FE) van de ſom van twee boogen (EB, FB) is gelyk aan de ſom der producten van ieder choorde met de choorde van het ſupplement des anderen boogs gemultipliceerd, en door de middellyn gedivideerd, dat is,

$$FE = \frac{AF \times EB + AE \times FB}{AB}.$$

BEREIDING. Men trekt de middellyn BA: en de ſupple-

 ment

ment-choorden A E, A F: dan is A E B F een vierhoek in den cirkel beschreeven, waar van E F de eene diagonaal en de diameter A B de andere diagonaal is.

BEWYS. Uit VI. 7. welk Voorstel indedaad met dit overeenkomt zo men voor de rechthoeken de producten der lynen, dat is de producten der getalen die de lengte der lynen uitdrukken, stelt.

I. GEVOLG.

Wanneer dus de choorden van twee bogen bekend zyn, kan men de choorde van de som dier bogen vinden; want men bereekent eerst door het X Voorstel, Gev. de choorden der supplementen, en dan door dit Voorstel de gevraagde choorde der som.

II. GEVOLG.

De choorde van een' boog, die het dubbeld is van een gegeeven boog, is gelyk aan het product der choorde van den boog door de choorde van het supplement gemultipliceerd, en door den radius gedivideerd, dat is, zo E B = F B, is

$$FE = \frac{AE \times EB}{GB.}$$

III. GEVOLG.

Op de zelfde wyze vindt men de choorde van eenen drievoudigen, vyfvoudigen, enz. boog; met door ons Voorstel en door het II. Gevolg, de choorde te bereekenen van den boog die de som is van de enkele en de dubbelde, vervolgens van de dubbelde en de drievoudige, enz.

XII. VOORSTEL. Fig. 162.

De choorde van eenen boog (I E) die de helft is van een' gegeeven boog (F I E) is gelyk aan den vierkants-wortel van het product uit den radius (C E) en het verschil (Q E) van den diameter en de choorde (T F) van het supplement van den gegeeven boog (F I E): dat is, $IE = \sqrt{CE \times (TE - TF)}$

BEWYS. De choorde van eenen boog is altoos de zyde van eenen veelhoek: dus is de choorde van den halven boog de zyde des veelhoeks die eens zo veel zyden heeft: en dus is dit Voorstel het vermaarde Voorstel van PTOLEMAEUS door ons in het XIX Voorstel van het VI Boek beweezen.

GEVOLG.

Men kan dus de choorden bereekenen van alle de bogen, die door eene geduurige verdeeling in twee gelyke deelen voorkomen: en die reekening wordt nog gemaklyker gemaakt door het Voorstel van SNELLIUS dat by ons het Gevolg is van het XIX Voorstel van het VI B.

I. AANMERKING. Men kan de choorde van de helft eens gegeeven boogs nog op eene andere wyze vinden.

Want, daar FI = IE is, zy CK loodrecht op FE: en dus KE = ½ FE: maar CK = $\sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{CK}^2}$; en KI = CI — CK; en IE = $\sqrt{\overline{KE}^2 - \overline{KI}^2}$

II. AANMERKING. Men kan dus gemaklyk de choorden van alle hoeken of boogen bereekenen: want die van 60° is gelyk aan den radius: en door de verdeeling in twee deelen, vindt men die van 30°, 15°, 7°. 30′, 3°. 45′ = 225′: dus die van een vyfde gedeelte van 225′ of van 45′: dan die van een derde gedeelte van 45′ of van 15′: wederom die van een vyfde gedeelte of van 3′: wederom die van een derde gedeelte of van 1′. Om de choorden van boogen te vinden die derde of vyfde gedeelten zyn van eenen gegeeven boog, gebruikt men eene soort van *valsche positie*: de choorde van het derde gedeelte van een' boog is iets grooter dan het derde gedeelte van de choorde des gegeeven boogs: men neemt dan een getal dat iets grooter is dan het gemelde derde gedeelte, en gebruikt dit als of het de waare choorde was: die choorde aanneemende bereekent men de choorde van den drievoudigen boog (door het XI Voorst. Gev. 3) welke dus de gegeeven

 choor-

choorde zyn moet: zo 'er eenig verschil is, maakt men deezen regel van driën:

De gevonden choorde staat tot het getal dat men gesteld heeft voor de choorde van het derde deel des boogs, zo als de waare choorde van den gegeeven boog tot de waare choorde van het derde gedeelte: en deeze regel steunt hieröp, dat voor boogen die weinig van elkander verschillen, de aanwas der choorden de zelfde reeden als die der boogen volgt, zo als reeds uit de Theorie der limieten is op te maaken, en verder in ons XVIII Voorstel blyken zal.

Indien men dan de choorde van 7°. 30′ heeft, kan men op die wyze de choorde van het derde gedeelte, of van 2°. 30′ zoeken: en dan van het 5 gedeelte van 2°. 30′ of van 30′: en dan van het derde gedeelte, of van 10′: en dan van het vyfde gedeelte of van 2′: en dan van de helft of van 1′: waar uit men alle andere choorden vindt.

III. AANMERKING. Men vindt by PTOLEMAEUS en anderen tafels van choorden: die gebruikte men eertyds, alvoorens de *sinussen* bekend waaren: en die tafelen bereekend zynde, kan men gemaklyk de sinussen uit dezelve opmaaken: doch het valt gemaklyker tafelen van sinussen te bereekenen. De eigenschappen der sinussen die wy nu verklaaren zullen, dienen daartoe. Intusschen kan men na leezen DEPARCIEUX, *Nouveau Traité de Trigonometrie*, pr. 4—12, die dit stuk uitmuntend behandeld heeft.

[redacted]

II. GEVOLG.

De ſinus van een' hoek of boog van 30° is de helft van den radius. (Aanm. op het X. Voorſtel.)

III. GEVOLG.

De zyde van een' veelhoek in den cirkel beſchreeven, is het dubbeld van den ſinus des halven middelpunt-hoeks: zo dat men die zyden zeer gemaklyk vinden kan, wanneer de ſinusſen van alle boogen met genoegzaame naauwkeurigheid bereekend zyn.

XIV. VOORSTEL. Fig. 87.

De ſom der vierkanten van den ſinus en van den coſinus van een' boog, is gelyk aan het vierkant van den radius: dat is,

$$R^2 = \overline{fin.}^2 + \overline{cof.}^2.$$

BEWYS. Uit II. 7.

GEVOLG.

Wanneer de radius en de ſinus of de coſinus gegeeven zyn, vindt men gemaklyk den coſinus of den ſinus: want

$$\overline{fin.}^2 = R^2 - \overline{cof.}^2.$$
$$\overline{cof.}^2 = R^2 - \overline{fin.}^2.$$

TACQUET. *Trigon. Porism.* 1. — S. p. 290. pr. 3. — W. §. 12.

AANMERKING. De Wiskonſtenaars ſtellen in het algemeen den radius gelyk aan de eenheid: waardoor alle de bereekeningen eenvoudiger worden. In dien zin heeft men

$$\overline{fin.}^2 + \overline{cof.}^2 = 1$$
$$\overline{fin.}^2 = 1 - \overline{cof.}^2$$
$$\overline{cof.}^2 = 1 - \overline{fin.}^2.$$

XV. VOORSTEL. Fig. 179.

De sinus (LN) van de som van twee hoeken of bogen (DL en DB), is gelyk aan de som der producten van den sinus van ieder' boog gemultipliceerd met den cosinus van den anderen, en gedivideerd door den radius: en de sinus (TS) van het verschil van twee boogen is gelyk aan het verschil dier zelfde producten: d. i.

sin. (B + C) = (*sin.* B . *cos.* C + *sin.* C . *cos.* B): R

en

sin. (B — C) = (*sin.* B . *cos.* C — *sin.* C . *cos.* B): R;

S. p. 294. pr. 5.

BEREIDING. Zy LM loodrecht op CD: dan is LM de sinus, CM de cosinus van boog LB, of ∠ LCD: zy insgelyks DI ⊥ CB, dan is DI sinus en CI cosinus van boog DB of ∠ DCB: zy LN ⊥ CB, dan is LN = sinus LB = sin. (LD + DB) en CN is = cos. (LD + DB): voorts LM verlengende tot de ontmoeting des cirkels, is MT = LM, en boog DT = boog LD, en dus is TB = boog (DB — LD). Maakende TU en PM loodrecht op LN, en MO op CB; is TS = sin. TB = UN = PN — PU = PN — PL; om dat PL = PU, want LP : PU = LM : MT: en LM = MT.

BEWYS. VOOR HET EERSTE. LN = PN + PL: men zoekt eerst de waarde van PL uit de gelykvormige driehoeken PML en CDI: dan die van PN uit de gelykvormige driehoeken MCO en CDI. En men verkrygt $LN = \frac{LM \times CI + DI \times CM}{CD}$ waaruit het Voorstel volgt.

VOOR HET TWEEDE. TS = UN = PN — PL: waaruit het Voorstel volgt.

I. GEVOLG.

De sinus van een' dubbelden hoek is gelyk aan het dubbeld

beld product van den ſinus door den coſinus, gedivideerd door den radius: dat is

$$sin.\ 2\,B = \frac{2\ sin.\ B \times cos.\ B}{R}$$

of, zo R = 1, $sin.\ 2\,B = 2\ sin.\ B \times cos.\ B$. W. t. §. 14.

II. GEVOLG.

En dus $sin.\ B = 2\ sin.\ \tfrac{1}{2} B\ .\ cos.\ \tfrac{1}{2} B$. CAGNOLI. §. 63.

XVI. VOORSTEL. Fig. 179.

De coſinus (CN) van de ſom (LB) van twee hoeken (LD, DB) is gelyk aan het verſchil van de producten der coſinusſen van beide de hoeken, en der ſinusſen van dezelven, gedivideerd door den radius: en de coſinus (CI) van het verſchil van twee hoeken is gelyk aan de ſom van die zelfde producten; dat is

$$cos.\ (B + C) = (cos.\ B\ .\ cos.\ C - sin.\ B\ .\ sin.\ C) : R$$

en $$cos.\ (B - C) = (cos.\ B\ .\ cos.\ C + sin.\ B\ .\ sin.\ C) : R.$$

St. p. 295: Gev. 2.

BEREIDING. Zy is de zelfde als voor het voorgaande Voorſtel: en daaruit volgt

$$CN = CO - NO = CO - PM.$$

en $$CS = CO + OS = CO + XT = CO + UX = CO + PM.$$

BEWYS. Men zoekt eerst de waarde van CO door de gelykvormige driehoeken CMO en CDI: en dan die van PM door de gelykvormige driehoeken PLM en CDI: waar uit volgt

$$CN = \frac{CM \times CI - LM \times DI}{CD},$$

$$CS = \frac{CN \times CI - LM \times DI}{CD}$$; dat het Voorſtel is.

AANMERKING. Het blykt uit het I. Gevolg der 4 Bepaaling,

ling, waarom de *cosinus van de som* van twee boogen kleiner is dan de *cosinus van hun* verschil.

I. GEVOLG.

De *cosinus van een* dubbelden hoek is gelyk aan het verschil der vierkanten van den sinus en van den cosinus, gedivideerd door den radius: dat is

$$cos.\ 2B = \overline{cos.\ B}^2 - \overline{sin.\ B}^2.$$

stellende 1 voor den radius.

II. GEVOLG.

Indien men in het I. Gevolg in plaats van $\overline{sin.\ B}^2$ en $\overline{cos.\ B}^2$ hunne waarden stelt uit de Aanmerking op het Gevolg van het XIV Voorstel, is

$$cos.\ 2B = 2\overline{cos.\ B}^2 - 1 \text{ en}$$

$$cos.\ 2B = 1 - 2\overline{sin.\ B}^2:$$

en dus

$$\overline{cos.\ B}^2 = \frac{1 + cos.\ 2B}{2} \text{ en}$$

$$\overline{sin.\ B}^2 = \frac{1 - cos.\ 2B}{2}.$$

CAGNOLI. §. 66. 67.

III. GEVOLG.

Daar door het XV. en door dit Voorstel,

$$sin.\ \tfrac{1}{2}(A - B) = sin.\ \tfrac{1}{2}A \times cos.\ \tfrac{1}{2}B - sin.\ \tfrac{1}{2}B \times cos.\ \tfrac{1}{2}A:$$

en

$$cos.\ \tfrac{1}{2}(A + B) = cos.\ \tfrac{1}{2}A \times cos.\ \tfrac{1}{2}B - sin.\ \tfrac{1}{2}A \times sin.\ \tfrac{1}{2}B:$$

zal men door multiplicatie verkrygen:

$$sin.\ \tfrac{1}{2}(A - B) \times cos.\ \tfrac{1}{2}(A + B) = sin.\ \tfrac{1}{2}A\ .\ cos.\ \tfrac{1}{2}A\ .\ [\overline{cos.\ \tfrac{1}{2}B}^2 + \overline{sin.\ \tfrac{1}{2}B}^2]$$

$$- sin.\ \tfrac{1}{2}B\ .\ cos.\ \tfrac{1}{2}B\ [\overline{cos.\ \tfrac{1}{2}A}^2 + \overline{sin.\ \tfrac{1}{2}A}^2]$$

en dus (door XIV. Voorstel)

2 *sin.*

$2\ sin.\ \frac{1}{2}(A - B) \times cos.\ \frac{1}{2}(A + B) = 2\ sin.\ \frac{1}{2}A\ cos.\ \frac{1}{2}A - 2\ sin.\ \frac{1}{2}B\ cos.\ \frac{1}{2}B$

en dus (door het XV Voorstel, Gevolg 2.)

I. $sin.\ A - sin.\ B = 2\ sin.\ \frac{1}{2}(A - B)\ cos.\ \frac{1}{2}(A + B)$.

Waaruit ook volgt, of op gelyke wyze uit de waarden van $sin.\ \frac{1}{2}(A + B)$ en $cos\ \frac{1}{2}(A - B)$ beweezen wordt,

II. $sin.\ A + sin.\ B = 2\ sin.\ \frac{1}{2}(A + B)\ cos.\ \frac{1}{2}(A - B)$;

waaruit verder volgt

III. $\frac{sin.\ A - sin.\ B}{sin.\ A + sin.\ B} = \frac{sin\ \frac{1}{2}(A - B)\ cos.\ \frac{1}{2}(A + B)}{sin.\ \frac{1}{2}(A + B)\ cos.\ \frac{1}{2}(A - B)}$.

CAGNOLI. §. 80. 81.

XVII. VOORSTEL. Fig. 89.

De sinus (LM) van de helft van een' boog is gelyk aan den wortel uit het halve product van den radius en den sinus versus: of aan de helft van den wortel uit de som van de vierkanten van den sinus en den sinus versus: doch de Cosinus (CM) van de helft van een' boog is gelyk aan den wortel uit het product van den radius en den sinus versus van het supplement: dat is.

$sin.\ \frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1}{2}R \times sin\ v.E} = \frac{1}{2}\sqrt{sin.\ E^2 + sin.\ v.\ E^2}$;

en

$cos.\ \frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1}{2}R \times sin.v.supp.E} = \sqrt{\left(\frac{R + cos.\ E}{2}\right)R}$.

St. p. 291. pr. 4. en pr. 4. Gev. 1. — W. t. §. 13.

I. BEWYS. VOOR HET EERSTE. Uit de gelykvormige driehoeken ABL en LBN, en de opmerking dat LM $= \frac{1}{2}$ LB.

VOOR HET TWEEDE. Uit II. 7. op den driehoek LBN toegepast.

VOOR HET DERDE. Uit de beschouwing dat

$Cos. = \sqrt{R^2 - sin.^2}$: en voorts uit het I.

II. BEWYS. Stellende in de uitdrukkingen van het II. Gevolg van het XVI. Voorstel

B $= \frac{1}{2}$ E, heeft men

cos.

$$\overline{cos.\tfrac{1}{2}E}^2 = \frac{1+cos.E}{2} = \frac{sin.v.supp\ E}{2}$$ en

$$\overline{sin.\tfrac{1}{2}E}^2 = \frac{1-cos.E}{2} = \frac{sin.v.E}{2},$$

I. GEVOLG,

Daar $\overline{sin.\tfrac{1}{2}E}^2 = \frac{1-cos.E}{2}$

is $cos.\ E = 1 - 2\,(sin.\tfrac{1}{2}E)^2$
$= 2\,(cos.\tfrac{1}{2}E)^2 - 1$

CAGNOLI. §. 66.

II. GEVOLG.

$$sin.\left(\frac{E+F}{2}\right) \times sin.\left(\frac{E-F}{2}\right) = \frac{cos.F - cos.E}{2},$$

want uit het XV Voorstel is

$sin.\overline{B+C} \times sin.\overline{B-C} = \overline{sin.B}^2\ \overline{cos.C}^2 - \overline{sin.C}^2\ \overline{cos.B}^2$
$=$ uit (XIV. Gev.)

$(1-\overline{cos.B}^2) \times \overline{cos.C}^2 - \overline{cos.B}^2\ (1-\overline{cos.C}^2) = \overline{cos.C}^2 - \overline{cos.B}^2\ \overline{cos.C}^2 - \overline{cos.B}^2 + \overline{cos.B}^2\ \overline{cos.C}^2 = \overline{cos.C}^2 - \overline{cos.B}^2$.

stellende nu $\frac{E}{2}$ en $\frac{F}{2}$ in plaats van B en C, is

$$sin.\left(\frac{E+F}{2}\right) \times sin.\left(\frac{E-F}{2}\right) = \overline{cos.\tfrac{1}{2}F}^2 - \overline{cos.\tfrac{1}{2}E}^2.$$

en dus uit dit Voorstel $= \frac{1+cos\ F}{2} - \frac{1+cos.E}{2} =$

$\frac{cos.F - cos.E}{2}$.

XVIII. VOORSTEL. Fig. 87.

De laatste reeden van den boog, de choorde, den sinus, en de tangent, is die van gelykheid.

BEWYS. Uit VII., 3. Om dat de boog de limiet is van de choorde, den sinus, en de tangent.

I. GE-

I. GEVOLG.

De sinussen van kleine boogen volgen ten naasten bij de reeden van de boogen zelven, en zyn daaraan ten naasten by gelyk: de cosinussen van zeer kleine boogen zyn ten naasten by gelyk aan den radius: en, hoe kleiner de boogen zyn, hoe naauwkeuriger dit een en ander plaats heeft.

S. p. 298. pr. 6. en Cor.

II. GEVOLG.

Gevolglyk indien B zeer klein is, is

sin. $(A \pm B) = $ *sin.* $A \pm B$ *cos.* A: en

cos. $(A \pm B) = $ *cos.* $A \mp B$ *sin.* A

III. GEVOLG.

En dus, indien men twee boogen heeft die weinig van elkander verschillen, zyn de aanwas of de afneeming van sinussen van boogen die tusschen in vallen ten naasten by in de zelfde reeden als de aanwas of de afneeming der boogen.

IV. GEVOLG.

De boog is de limiet van de choorde; en de diameter is de limiet van de choorde van het supplement.

I. AANMERKING. Het is door de voorgaande eigenschappen dat men tafelen van sinussen en cosinussen voor alle bogen heeft kunnen bereekenen. Immers is de sinus van 30° de helft van den radius of ½: dus vindt men den cosinus van 30° door het XIV. Voorst. Gevolg: vervolgens door het XVII Voorstel den sinus en cosinus van 15°, van 7°. 30′, van 3°. 45′, van 1°. 52′. 30″, van 56′. 15″, van 28′. 7½″ enz. tot dat men tot eenen boog komt die klein genoeg is om 'er, met betrekking tot de naauwkeurigheid welke men begeert, den sinus van een juist getal minuten, of seconden, uit af te leiden door het III Gevolg van dit voorstel. Dan vervolgens opklimmende vindt men sinussen van alle dubbelde bogen door het Gev. van het XV Voorstel; en van de som van twee bogen, door het XV Voorstel: dus indien men eens den sinus heeft van 1°. vindt men

men gemaklyk die voor 2°, 4°, 8°, 16°, 32°: dus ook die van $\overline{2+1}$ of 3°, van $\overline{4+1}$ of 5°, van $\overline{8+1}$ of 9°, enz. en dan van $\overline{2 \times 3}$ of 6°, van 12°, enz.: van $6 + 1$ of 7 Gr, enz. en dus ook voor minuuten.

Men kan over het berekenen der Tafelen nazien STEENSTRA p. 292. Gev. 3. TACQUET. I. Prop. 1—5. en p. 346.

II. AANMERKING. Wy zullen hier den aart en het gebruik der *Sinus-tafelen* uitleggen, zo wel van de natuurlyke of *flecht-finusfen*, als van de Logarithmus-finusfen enz., en aantoonen hoe men door het III Gevolg van dit Voorftel de *finusfen* vindt van boogen die niet juist in de tafelen *zyn*; en omgekeerd hoe men de boogen, tot gegeeven finusfen, doch die niet in de tafels gevonden worden, behoorende, vinden kan.

XIX. VOORSTEL. Fig. 87.

De Tangent of raaklyn (BE) van eenen boog (DB) of hoek (DCB) is gelyk aan den radius gemultipliceerd door den finus, en gedivideerd door den cofinus: en de Cotangent (GF) is gelyk aan den radius gemultipliceerd door den cofinus, en gedivideerd door den finus. dat is

$$\textit{Tang.} = \frac{R \times \textit{fin.}}{\textit{cof.}}\,;\ \textit{Cot.} = \frac{R \times \textit{cof.}}{\textit{fin.}}$$

S. p. 301. pr. 8. — W. t. §. 18.

BEWYS. Uit de gelykvormige driehoeken CID en CBE voor het I: CDI en GFC voor het II.

CAGNOLI §. 56. 57. 102

I. AANMERKING. Hier uit blykt, dat, zo of de finus of de cofinus negatief is, de tangent het ook is, het geen overeenkomt met de aanmerking op de 6 bepaling: en dat, zo finus en cofinus het beiden zyn, de tangent wederom positief wordt: het geen plaats heeft voor bogen tusfchen 180 en 270 graden.

I. GEVOLG.

De Tangent en Cotangent van eenen boog van 45°. zyn beiden gelyk aan den radius.

S. p. 288. pr. 1.

II. GEVOLG.

Hier uit blykt, hoe gemaklyk de Tangenten en Cotangenten te bereekenen zyn, als men de sinusſen en cosinusſen eerst bereekend heeft.

TACQUET. tr. prob. 6.

III. GEVOLG.

Men kan uit dit Voorſtel, gepaard met het XV, XVI, XVII, gemaklyk uitdrukkingen vinden voor de tangent van de ſom of van het verſchil van twee hoeken, of van een' dubbelden hoek of een' halven hoek:

dus is, uit Voorſtel XV en XVI,

$$\text{I. } Tang.(A \pm B) = \frac{fin.[A \pm B]}{cof.[A \pm B]} = \frac{fin. A\, cof. B \pm fin. B.\, cof. A}{cof. A\, cof. B \mp fin. A.\, fin. B}$$

$$= \frac{Tang. A \pm Tang. B}{1 \mp Tang. A \times Tang. B}:$$

en dus, zo $A = 45°$, en gevolglyk Tang. $A = 1$,

$$\text{II. is } Tang. (45° \pm B) = \frac{1 \pm Tang. B}{1 \mp Tang. B}$$

$$\text{III. } Tang. \tfrac{1}{2} A = \frac{fin. \tfrac{1}{2} A}{cof. \tfrac{1}{2} A} = \sqrt{\frac{fin. v. A}{fin. v. fupp. A}} =$$

$$\sqrt{\frac{1 - cof. A.}{1 + cof. A.}} = \sqrt{\frac{(1 - cof. A.)^2}{(1 + cof. A.)(1 - cof. A.)}} =$$

$$\frac{fin. v. A}{fin. A}$$

IV. GEVOLG.

Hier uit volgt:

$$Tang. 2A = \frac{2\, Tang. A}{1 - (Tang. A)^2}.$$

Dit is het ſchoone voorſtel door JOHN PELL in 1644 gevonden,

den, en tot het bepaalen van den cirkels-omtrek met zeer veel nut gebruikt: zie *controversia* enz. p. 13.

V. GEVOLG.

De Tangent van eenen boog is de helft der zyde van eenen veelhoek om den cirkel beschreeven, wiens middelpuntshoek het dubbeld van den gegeeven hoek is: zo als de sinus de helft is van een' dergelyken veelhoek in den cirkel beschreeven; gelyk wy reeds te voren gezegd hebben: dus is by voorbeeld de tangent van eenen boog van 1°. 22'. 30' de helft van de zyde van eenen veelhoek wiens middelpuntshoek 3° en 45' bedraagt, dat is van eenen 96- hoek: en de sinus van 1°. 22'. 30''. is de halve zyde van den 96- hoek in den cirkel beschreeven: zo men dan dien tangent en dien sinus neemt, is de reden van den omtrek van den cirkel tot den radius kleiner dan 192 maalen die tangent, en grooter dan 192 maalen die sinus; of tot den diameter kleiner dan 96 maalen die tangent, en grooter dan 96 maalen die sinus. En indien men de sinus en tangent van eenen boog van 1' nam, kwam het op het zelfde uit als of men een 10800 hoek gebruikte: dit gaat dus zeer gemaklyk voort wanneer men eerst de sinus- en tangenten- tafel bereekend heeft; doch men lette op het geen wy in het VII. Boek in de VI. Aanmerking op het XVI. Voorstel gezegd hebben.

XX. VOORSTEL. Fig. 87.

De tangent van eenen boog is gelyk aan het vierkant van den radius gedivideerd door den cotangent: en de cotangent is gelyk aan het vierkant van den radius gedivideerd door den tangent: dat is

$$Tang. = \frac{R^2}{Cot.} \quad Cot. = \frac{R^2}{Tang.}$$

BEWYS. Uit de gelykvormige driehoeken CEB en CFG.

I. GEVOLG.

De Tangenten zyn in omgekeerde reeden van de Cotangenten, en de Cotangenten in omgekeerde reeden van de Tangenten; dat is:

$$Tang. = \frac{1}{cot.}; \; Cot. = \frac{1}{tang.}$$

II. GEVOLG.

Het komt gevolglyk op het zelfde uit, of men door den Cotangent dividéert, of door den Tangent multipliceert; en omgekeerd: of, wanneer men door Logarithmen werkt, of men den Logarithmus van den Cotangent aftrekt, of den Logarithmus van den Tangent bytelt; en omgekeerd. Daar nu de bytelling altoos gemaklyker valt dan de aftrekking, moet men altoos aan dezelve den voorrang geeven.

III. GEVOLG.

Uit het XV. Voorstel is

$$\text{I. } \frac{sin.\,(A + B)}{sin.\,(A - B)} = \frac{sin.\,A\,.\,cos.\,B + sin.\,B\,.\,cos.\,A}{sin.\,A\,.\,cos.\,B - sin.\,B\,.\,cos.\,A}$$

$= \text{(divideerende door } cos.\,A\,.\,cos.\,B)$

$$= \frac{tang.\,A + tang.\,B}{tang.\,A - tang.\,B} = \frac{cot.\,A + cot.\,B}{cot.\,B - cot.\,A}$$

op eene dergelyke wyze vindt men ook

$$\text{II. } \frac{cos.\,(A + B)}{cos.\,(A - B)} = \frac{cot.\,B - tang.\,A}{cot.\,B + tang.\,A} = \frac{cot.\,A - tang.\,B}{cot.\,A + tang.\,B}$$

en uit het III. Gevolg N°. 3. van het XVI. Voorst. volgt

$$\text{III. } \frac{sin.\,A - sin.\,B}{sin.\,A + sin.\,B} = tang.\,\tfrac{1}{2}\,(A - B) \times cot.\,\tfrac{1}{2}\,(A + B)$$

$$= \frac{tang.\,\tfrac{1}{2}\,(A - B)}{tang.\,\tfrac{1}{2}\,(A + B)}$$

en insgelyks

$$\text{IV. } \frac{cos.\,A + cos.\,B}{cos.\,B - cos.\,A} = \frac{cot.\,\tfrac{1}{2}\,(A + B)}{tang.\,\tfrac{1}{2}\,(A - B)}$$

CAGNOLI. §. 58. §. 59. §. 86. §. 87.

XXI. VOORSTEL.

De *Secant* CE is gelyk aan den wortel uit de som der vierkanten van den tangent en van den radius: ook gelyk aan het vierkant van den radius gedivideerd door den cosinus: ook gelyk aan het product van den tangent gemultipliceerd door den radius, en gedivideerd door den sinus: en de *Cosecans* is gelyk aan den wortel uit de som der vierkanten van den radius en den cotangent: ook gelyk aan het vierkant van den radius gedivideerd door den sinus: ook gelyk aan het product van den cotangent, gemultipliceerd door den radius, en gedivideerd door den cosinus: dat is

$$sec. = \sqrt{R^2 + tang.^2} = \frac{R^2}{cosin.} = \frac{R \times tang.}{sin.}$$

$$cosec. = \sqrt{R^2 + cot.^2} = \frac{R^2}{sin.} = \frac{R \times cot.}{cosin.}$$

St. p. 302. pr. 8.

BEWYS. VOOR HET I. N°. 1. uit II., 7. toegepast op △ CEB: voor N°. 2. en N°. 3. uit de gelykvormige driehoeken CDI en CEB.

VOOR HET II. N°. 1., uit II., 7. toegepast op △ GCF: voor N°. 2. en N°. 3. uit de gelykvormige driehoeken CGF en CHD.

I. GEVOLG.

De secanten zyn in omgekeerde reeden van de cosinussen: en de cosecanten in die van de sinussen: en omgekeerd; dat is

$$sec. = \frac{1}{cos.};\ cosec. = \frac{1}{sin.};\ cos. = \frac{1}{sec.};\ sin. = \frac{1}{cosec.}$$

II. GEVOLG.

Het komt dus op het zelfde uit, door den secant te multipliceeren of door den cosinus te divideeren: en door den

sin

ſecant te divideeren of door den coſinus te multipliceeren: of, wanneer men door de Logarithmen werkt, den Logarith. ſecant af te trekken, of den Logarith. coſinus by te tellen; en den Logarith. ſecant by te tellen of den Logarith. coſecant af te trekken.

III. GEVOLG.

De Logarithmus-ſecant is het complement van den Logarithmus-coſinus en de Logarithmus-coſecant is het complement van den Logarithmus-ſinus. (III. 35. Gev. 3.)

IV. GEVOLG.

Hieruit volgt dat de Tafels van ſecanten en coſecanten gemaklyk te bereekenen zyn als men de ſinusſen en coſinusſen bereekend heeft: doch het blykt teevens, dat zy onnuttig zyn: waarom zy ook in de beste Tafelen van GARDINER en CALLET weggelaaten zyn.

XXII. VOORSTEL. Fig. 129.

De ſom der Sinusſen van alle de boogen in den halven cirkel, te beginnen van eenen bepaalden boog af, en altoos met den zelfden opklimmende, is gelyk aan den cotangent van de helft diens boogs, gemultipliceerd door den radius.

BEWYS. Zy AB die boog; men noeme den zelven B.

Dan is AB : BE = AE : 2 (BK + CM + DO) (VI. 25. Gevolg.)

Maar 2 (BK + CD + DO) is de ſom van alle de ſinusſen BK, KH, CM, MG, DO, OF in den geheelen cirkel: dus

choorde B : *choorde ſup.* B = R : ſom van alle de *ſinusſen*, tot 180°. (VI. 25. Gevolg.)

dus

$$\text{ſom van de } \textit{ſinusſen} \text{ tot } 180° = \frac{R \times \textit{choorde ſup.}\ B}{\textit{choorde}\ B}$$

$$= \frac{R \times \frac{1}{2}\ \textit{choorde ſup.}\ B}{\frac{1}{2}\ \textit{choorde}\ B} =$$

$$\frac{R \times \textit{fin.}\ \tfrac{1}{2}\ \textit{fup.-}B}{\textit{fin.}\ \tfrac{1}{2}\ B} =$$

$$= \frac{R \times \textit{cof.}\ \tfrac{1}{2}\ B}{\textit{fin.}\ \tfrac{1}{2}\ B} = R \times \textit{cot.}\ \tfrac{1}{2}\ B =$$

$$R \times \textit{tang comp.}\ \tfrac{1}{2}\ B.$$

Indien dus $B = 1^\circ$: zyn alle de finusfen, van graad tot graad genomen, te famen $= R \times$ *tang.* $89\tfrac{1}{2}^\circ. =$ 114,5886, indien de radius 10 gefteld wordt.

Zie VIETA, *Operum* p. 375. en KRAFFT, *geometria fublimior*, §. 100.

XXIII. VOORSTEL. Fig. 89.

De *Sinus verfus* of *pyl* (NB) is gelyk aan het vierkant van de choorde (LB), gedivideerd door den dubbelden radius (AB).

BEWYS. Uit de gelykvormige driehoeken LNB en ALB.

GEVOLG.

De finus verfus is dus gemaklyk uit de choorde te berekenen: doch nog gemaklyker uit den cofinus. (V. Bepaling).

AANMERKING. Men vindt Tafels van finus verfus in de Engelfche Tafels van SHERWIN, en in de groote Nederduitfche van DOUWES. Doch dezelven gaan flechts tot 90°: en wy hebben te vooren gezien, dat de finus verfus altoos aangroeit tot 180° toe; men moet dus ook de overigen weeten te vinden, het geen gemaklyk gefchiedt, met by den radius den cofinus van het getal graden die de gegeeven hoek boven de 90° behelst, te voegen, en dan den Logarithmus van die fom te neemen, wel lettende dat men het character met 3 moet vermeerderen, om dat de Logarithmus des finus verfus (het geen ook in den Logarithmus der finusfen, tangenten, fecanten plaats heeft) voor een' radius van 10,000,000,000, doch de natuurlyke, of flecht-finus verfus, finus, of tangent alleen voor eenen radius van 10,000,000 berekend zyn.

XXIV. VOOR-

XXIV. VOORSTEL. Fig. 87.

De laatste reeden van den sinus versus, (BI) en van dat gedeelte (DE) van den secant dat tusschen den omtrek en den tangent begreepen is, is de verdubbelde reeden van den Boog BD.

NEWTON. *Lem.* II.

BEWYS. I. Uit XXIII. is

$sin.\ vers. = BI = \frac{DB^2}{AB}$: maar Boog DB is de limiet van de choorde DB: en dus is de limiet van *sinus versus*

$= \frac{\overline{Boog}^2}{Diam.}$

II. Uit de driehoeken EDX en CEB is (IV., 2.)

$DE : IB = CE : CB$ en dus

$DE = \frac{IB \times CE}{CB} = \frac{\overline{DB}^2 \times CE}{AB \times CB}$: maar boog DB is de limiet van de choorde DB, en CB is de limiet van CE, en dus

limiet van $DE = \frac{\overline{Boog}^2}{Diam.}$

I. GEVOLG.

De sinus versus van kleine boogen groeijen aan of verminderen in de verdubbelde reeden hunner boogen.

II. GEVOLG.

Voor kleine boogen is het gedeelte van den secant, tusschen den omtrek en den tangent begreepen, gelyk aan den sinus versus, en het groeit aan als het vierkant van den boog.

AANMERKING. Beide deeze gevolgen zyn van veel nut in de Natuur- en Sterrekunde.

XXVII. VOORSTEL.

Alle grootheden die deeze gedaante hebben $x = \sqrt{p^2 + q^2}$, zyn zodanig dat tang. $A = \frac{q}{p}$ en $x = \frac{p}{cof.\ A}$.

CAGNOLI. §. 206.

BEWYS. $x = \sqrt{p^2 + q^2} = p\sqrt{1 + \frac{q^2}{p^2}}$.

Maar $\frac{1}{cof.\ A} = fec.\ A = \sqrt{1 + (tang.\ A)^2}$.

Zo dan tang. $A = \frac{q}{p}$: is $x = p \times fec.\ A = \frac{p}{cof.\ A}$.

XXVIII. VOORSTEL.

Alle grootheden die deeze gedaante hebben $x = \sqrt{p^2 - q^2}$ zyn van dien aart dat cof. $A = \frac{q}{p}$ en $x = p$. fin. A; of fin. $A = \frac{q}{p}$: en $x = p$. cof. A.

CAGNOLI. §. 208.

BEWYS. $x = \sqrt{p^2 - q^2} = p\sqrt{1 - \frac{q^2}{p^2}}$.

Maar $\sqrt{1 - (fin.\ A)^2} = cof.\ A$: of

$\sqrt{1 - (cof.\ A)^2} = fin.\ A$:

dus, zo $\frac{q}{p} = cof.\ A$, is $x = p\ fin.\ A$: en

zo $\frac{q}{p} = fin.\ A$, is $x = p\ cof.\ A$.

XXIX. VOORSTEL.

Alle grootheden die deeze gedaante hebben $x = a \times \left(\frac{a \pm b}{a \mp b}\right)$ zyn zodanig, dat zo tang. $B = \frac{b}{a}$, $x = a \times$ tang. (45° ± B):

CAGNOLI, §. 209.

BEWYS. $x = m \times \left(\frac{1 \pm \frac{b}{a}}{1 \mp \frac{b}{a}}\right)$, maar; (Voorstel XIX. Gev. 3. N°. 2.)

$tang.\ (45^\circ \pm B) = \frac{1 \pm tang.\ B}{1 \mp tang.\ B}$;

zo dan $\frac{b}{a} = tang.\ B$, is

$x = m \times tang.\ (45^\circ \pm B)$.

XXVII. VOORSTEL.

Alle grootheden die deeze gedaante hebben $x = \sqrt{p^2 + q^2}$, zyn zódanig dat $tang.\ A = \frac{q}{p}$ en $x = \frac{p}{cos.\ A}$.

CAGNOLI. §. 206.

BEWYS. $x = \sqrt{p^2 + q^2} = p \sqrt{1 + \frac{q^2}{p^2}}$.

Maar $\frac{1}{cos.\ A} = sec.\ A = \sqrt{1 + (tang.\ A)^2}$.

Zo dan $tang.\ A = \frac{q}{p}$: is $x = p \times sec.\ A = \frac{p}{cos.\ A}$.

XXVIII. VOORSTEL.

Alle grootheden die deeze gedaante hebben $x = \sqrt{p^2 - q^2}$ zyn van dien aart dat $cos.\ A = \frac{q}{p}$ en $x = p\ .\ sin.\ A$; of $sin.\ A = \frac{q}{p}$: en $x = p\ .\ cos.\ A$.

CAGNOLI. §. 208.

BEWYS. $x = \sqrt{p^2 - q^2} = p \sqrt{1 - \frac{q^2}{p^2}}$.

Maar $\sqrt{1 - (sin.\ A)^2} = cos.\ A$: of

$\sqrt{1 - (cos.\ A)^2} = sin.\ A$:

dus, zo $\frac{q}{p} = cos.\ A$, is $x = p\ sin.\ A$: en

zo $\frac{q}{p} = sin.\ A$, is $x = p\ cos.\ A$.

XXIX. VOORSTEL.

Alle grootheden die deeze gedaante hebben $x = m \times \left(\frac{a \pm b}{a \mp b}\right)$ zyn zodanig, dat zo $tang.\ B = \frac{b}{a}$, $x = m \times tang.\ (45^\circ \pm B)$:

CAGNOLI, §. 209.

BEWYS. $x = m \times \left(\frac{1 \pm \frac{b}{a}}{1 \mp \frac{b}{a}}\right)$, maar; (Voorstel XIX. Gev. 3. N°. 2.)

$$\text{tang.}\ (45^\circ \pm B) = \frac{1 \pm \text{tang.}\ B}{1 \mp \text{tang.}\ B};$$

zo dan $\frac{b}{a} = \text{tang.}\ B$, is

$$x = m \times \text{tang.}\ (45^\circ \pm B).$$

NEGENDE BOEK,

OVER DE DRIEHOEKS-MEETING.

I. BEPAALING.

De *Driehoeks-meeting* of *Trigonometrie* is de weetenschap welke ons leert, hoe men driehoeken moet meeten, of dezelven *oplossen*.

W. t. §. 1.

I. AANMERKING. Wy zullen hier alleen handelen van de rechtlynige driehoeks-meeting, of kunst om de *rechtlynige* driehoeken op te lossen; welke kunst ook *platte driehoeks-meeting* genoemd wordt, en omdat de rechtlynige driehoeken, wier zyden allen in één en het zelfde vlak liggen, *platte figuuren* zyn, en om ze te onderscheiden, van de *klootsche driehoeks-meeting*, die de klootsche driehoeken tot onderwerp heeft, d. i., driehoeken wier zyden bogen zyn van cirkels op eenen kloot beschreven, en die dus niet in één en het zelfde vlak liggen.

II. AANMERKING. Het geen men driehoeks-meeting noemt, behoorde in de daad *driehoeks-reekening* genoemd te worden. Want die kunst bestaat in het berekenen der grootte van de onbekende zyden en hoeken; het geen in de Meetkunde der ouden niet te pas kwam; ook vindt men 'er geen spoor van in EUCLIDES: een hoek, eene lyn werd by hen voor bekend gehouden, zo dra dezelve in grootte gegeeven, of uit hoofde van het overige der figuur bepaald was: waarvan wy in de Aanmerking op het XXXII. Voorstel van het XI. Boek, een aanmerklyk voorbeeld zullen bybrengen. Daar wy dus moeten *reekenen*, zullen wy van *multiplicatie* en *divisie van lynen*, dat is, van *getalen die lynen uitdrukken*, spreeken: even als wy zulks in de Aanmerking op het XVI. Voorstel van het VII. Boek gedaan, en in het Bericht voor het IX. Voorstel van het VIII. Boek breeder uitgelegd hebben.

II. BEPAALING.

Men zegt dat men eenen driehoek *oplost*, wanneer men, twee hoeken en eene zyde, of twee zyden en een hoek, of de drie zyden van eenen driehoek bekend zynde, de grootte van de onbekende deelen bepaalt: en het is de kennis van de regelen, welke men volgen moet, om tot die bepaaling te komen, die het onderwerp van de driehoeks-meeting of *Trigonometrie* uitmaakt.

St. p. 307. Bep. 1.

I. AANMERKING. De driehoeks-meeting vooronderstelt dan, dat het geen gegeeven is genoegzaam is, om tot de kennis van het gevraagde te geraaken, en gevolglyk dat, zo dra die dingen, welke men opgeeft, bepaald zyn, al het overige het ook is, en dus, dat 'er geen twee driehoeken zyn kunnen, waar in het gegeevene voor beiden het zelfde is, en de overige deelen verschillende kunnen zyn. Dit is de reeden waarom wy in deeze Bepaaling niet van het geval gesprooken hebben, waar in alléén de drie hoeken des driehoeks bekend zyn: want al zyn deeze in twee verschillende driehoeken gelyk, kunnen echter de zyden zeer verschillende zyn in grootte; de driehoeken zyn in dat geval alleen gelykvormig, en niet gelyk: zo als uit het IV. Boek genoegzaam blykt.

Dit is derhalven de reeden, waarom 'er in de driehoeks-meeting maar drie algemeene gevallen plaats hebben: die, namelyk, welke wy in de Bepaaling hebben opgeteld. Dat in het I. en III. het gevraagde door het gegeevene bepaald is, blykt genoegzaam uit het IX. en XII. Voorstel van het I. Boek. Dit heeft ook plaats voor het II. geval, doch met eenige onderscheiding; omdat het zelf twee ondergeschikte gevallen behelst: het eerste is, wanneer de gegeeven hoek tusschen de twee gegeeven zyden begreepen is; dat dan al het overige ook bepaald is, blykt uit het VIII. Voorstel van het I. Boek: het

an-

ander is, wanneer de gegeeven hoek over een der zyden staat; en het blykt uit het XIII. Voorstel van het I. Boek, dat dan al het overige ook bepaald is, mits men vooraf weeten, of een der overige hoeken stomp zy, of niet want laten, in figuur 141, de zyden AD en DC gegeeven zyn, zo als ook de hoek A: dan kunnen 'er twee driehoeken zyn, namelyk △ ACD, en △ ABD, waarin het gegeevene (namelyk ∠ A, AD en CD, of BD = CD) het zelfde is, doch die van elkander verschillen, omdat in den eenen de ∠ C stomp, in den anderen de hoek B scherp is; het geen ook op de grootte van de derde zyde AC of AB, en van den derden hoek ADC of ADB *invloed* heeft. Nogthans zyn die twee driehoeken zo gesteld, dat de hoek C in den eenen altoos het supplement is van den hoek B in den anderen: en daar een hoek den zelfden *sinus*, *cosinus*, &c. heeft als zyn supplement, (VIII. Bep. 3, 4 en 5) kan men uit de bereekening, die voor uitkomst den sinus van den gezochten hoek opleevert, niet weeten of men den hoek, *die aan dien* sinus in de Tafelen beantwoordt, dan wel zyn supplement neemen moet: dit moet van elders, uit den aart namelyk van het Vraagstuk, bekend zyn.

II. AANMERKING. Men is gewoon de oplossing der rechthoekige en die der scheefhoekige driehoeken afzonderlyk te behandelen: en, in de daad, die der rechthoekige is altoos gemaklyker, omdat 'er in dezelve altoos één hoek, de rechte hoek namelyk, gegeeven is; waar uit verder volgt, dat de sinus van dien hoek = 1 en de ééne scherpe hoek het complement van den anderen is.

I. AF-

I. AFDEELING,

OVER DE RECHTHOEKIGE DRIEHOEKEN.

I. VOORSTEL. Fig. 87.

In alle rechthoekige driehoeken (CDI) ſtaat de *radius* tot den *ſinus* van een der ſcherpe hoeken (D of C) zo als de ſchuinſe zyde (CD) tot die rechthoeks-zyde (CI of DI) welke over den gemelden hoek ſtaat.

St. p. 312.

BEREIDING. Men ſtelle dat C*d* de radius zy, *g db* de cirkel met denzelven uit C beſchreeven, en *di* loodrecht op C*b*, *dh* en DH op CG welke met CB eenen rechten hoek GCB maakt.

BEWYS. Uit de gelykvormigheid der △△ CDI en C*di*: de gelykheid der △△ HCD en DCI: en de 3. bepaaling van het VIII. Boek.

AANMERKING. Dit Voorſtel is eigenlyk een byzonder geval van het IV. Voorſtel.

I. GEVOLG.

Dus is ook CD: DI = *radius*: *coſ.* ∠ D:
CD: CI = *radius*: *coſ.* ∠ C

II. GEVOLG.

Dus ook CD: CD — DI = 1: 1 — *coſ.* D. (III. 8. N°. 2.)

en

$$1 - cos.\,D = \frac{CD - DI}{CD} : \text{maar}$$

$$1 - cos\,D = 2\,(sin.\,\tfrac{1}{2}\,D)^2 \text{ (VIII, 16. Gev: 2.)}$$

$$\text{dus } 2\,(sin.\,\tfrac{1}{2}\,D)^2 = \frac{CD - DI}{CD.}$$

en $(\textit{sin.}\ \tfrac{1}{2}\ D) = \sqrt{\frac{CD - DI}{2\,CD}}$

CAGNOLI. §. 217.

III. GEVOLG.

$CD + DI : CD - DI = 1 + \textit{cos}.\ D : 1 - \textit{cos}.\ D$

en dus

$\frac{CD - DI}{CD + DI} = \frac{1 - \textit{cos}.\ D}{1 + \textit{cos}.\ D} = (\textit{Tang}.\ \tfrac{1}{2}\ D)^2$ (VIII. 19. Gev.)

CAGNOLI. §. 217.

II. VOORSTEL. Fig. 87.

In alle rechthoekige driehoeken (CDI) ſtaat de *radius* tot den *tangent* van een der hoeken (C of D) zo als de zyde (CI of DI) aan dien hoek grenzende tot de zyde (DI of CI) welke over dien hoek ſtaat.

S. p 309. — W. t. §. 50.

BEREIDING. Als voor het vorige Voorſtel: en zy *be* loodrecht op C*b* en GF op CG.

BEWYS. Uit de gelykvormigheid der △△ CDI en C*eb*; de gelykheid der △△ CDI en HDC; en de 6. bepaaling van het VIII. Boek.

GEVOLG.

Dus is ook: CI: DI = *radius*: *cotang*. ∠ D.
DI: CI = *radius*: *cotang*. ∠ C.

III. VOORSTEL. Fig. 87.

In alle rechthoekige driehoeken (CDI) ſtaat de *radius* tot den *ſecans* van een der ſcherpe hoeken (C of D) zo als de zyde (CI of DI) aan dien hoek grenzende tot de *hypotenuſa* of ſchuinſche zyde (CD.)

S p. 309. 2. regel.

BEREIDING. Even als voor het II Voorſtel.

BEWYS. Uit de gelykvormigheid der driehoeken CDI en C*eb*; de gelykheid der △△ CDI en HDC; de gelykvormig-

[gelyk]heid van △△ HDC en GFC: en de 8. bepaaling van het VIII. Boek.

I. AANMERKING. Dit Voorstel kan ook als een gevolg van het I Voorstel aangemerkt worden, indien men voor *sin.* LD of *sin.* LC gebruik maakt van de uitdrukking in het XXI. Voorstel van het VIII. Boek en deszelfs I. Gevolg gebeezigd: immers dan wordt de regel deeze:

cos. LC : *rad.* = CI: CD

cos. LD: *rad.* = DI: CD

GEVOLG.

Dus is ook DI: CD = *rad.*: *cosec.* LC

CI: CD = *rad.*: *cosec.* LD,

of wel, door de voorgaande aanmerking,

sin. LC: *rad.* = DI: CD

sin. LD: *rad.* = CI: CD

II. AANMERKING. In de beste Tafelen vindt men geene secanten; het is dus beter den regel altoos door de sinussen of cosinussen uit te drukken.

REGELS TER OPLOSSING VAN DE VIER GEVALLEN DIE IN DE RECHTHOEKIGE DRIEHOEKEN PLAATS KUNNEN HEBBEN.

AANMERKING. Wanneer drie dingen van eenen driehoek gegeeven zyn, kan men altoos (behalven in de reeds te vooren uitgezonderde gevallen) elk der drie overigen onmiddelyk, dat is, onafhanglyk van de twee anderen, kennen. Doch men kan ook, en dit is dikwerf gemaklyker, eerst één derzelven en dan door dat reeds gevondene de overigen vinden. Dus wordt in het II. der volgende gevallen de gezochte zyde gevonden of onmiddelyk door de I. Oplossing (II. n°. 2.) welke uit II, 7. is afgeleid, of wel gemaklyker door eerst den overstaanden hoek te zoeken en

dan

den door II, n°. 1. Het zelfde geldt voor het IV. geval.

I. GEVAL.

GEGEEVEN. De hypotenusa en een der scherpe hoeken.

GEZOCHT. De beide rechthoekzyden, en de andere hoek.

OPLOSSING.

I. Overstaande zyde $= \frac{\text{Hyp.} \times \textit{sin.} \text{ gegev. hoek,}}{\text{Rad.}}$ (I. Voorst.)

II. Aangrenzende zyde $= \frac{\text{Hyp.} \times \textit{cos.} \text{ gegev. hoek,}}{\text{Rad.}}$ (I. Voorst.)

III. Gezochte hoek $=$ *comp.* gegev. hoek.

II. GEVAL.

GEGEEVEN. De hypotenusa en eene zyde.
GEZOCHT. De andere zyde, en de hoeken.

I. OPLOSSING.

I. *sin.* tegenoverstaande hoek $= \frac{\text{gegev. zyde} \times \text{Rad.}}{\text{Hypot.}}$ (I. Voorst.)

of *cos.* aangrenz. hoek $= \frac{\text{gegev. zyde} \times \text{Rad.}}{\text{Hypot.}}$ (I. Voorst.)

II. Gezochte zyde $= \frac{\textit{sin.} \text{ tegenoverst. hoek} \times \text{Hyp.}}{\textit{Rad.}}$ (I. Voorst.)

$= \frac{\textit{tang.} \text{ tegenoverst. hoek} \times \text{geg. zyde}}{\textit{Rad.}}$ (II. Voorst.)

of Gezochte zyde $= \sqrt{\text{Hyp.}^2 - \text{geg. zyde}^2}$ (II, 7. G. 1.)

$= \sqrt{(\text{Hyp.} + \text{geg. zyde}) \times (\text{Hyp.} - \text{geg. zyde})}$ (II. 5)

II. OPLOSSING.

Voor den gezochten hoek.

sin. ½ aangr. hoek $= \sqrt{\frac{\text{Hypot.} - \text{geg. zyde}}{2.\ \text{Hypot.}}}$

(I. Voorst. Gev. 2.)

Aanmerking. Wanneer men tot *facit* van de rekening den *cosinus* van eenen zeer kleinen, of den *sinus* van eenen zeer grooten hoek krygt, kan men door de gewoone tafelen tot geene zeer groote naauwkeurigheid komen, om dat de *cosinussen* dan voor eene vry aanmerkelyke verandering in den hoek te weinig veranderen: doch de sinussen van kleine hoeken veranderen integendeel zeer spoedig, en dus kunnen de hoeken waarvan zy sinussen zyn naauwkeuriger berekend worden; waarom men dan in dergelyke gevallen deeze tweede oplossing de voorkeuze geeven moet.

III. GEVAL.

Gegeeven. Eene rechthoekzyde en eene hoek:
Gezocht. De hypotenusa, de andere zyde, en de tweede hoek.

OPLOSSING.

I. Gezochte hoek = *compl.* geg. hoek.

II. Hypotenusa $= \dfrac{\text{geg. zyde} \times \text{Rad.}}{\textit{cos.}\ \text{aangr. hoek.}}$

$= \dfrac{\text{gegev. zyde} \times \text{Rad.}}{\textit{sin.}\ \text{tegenov. hoek.}}$

(I. Voorst.)

$= \dfrac{\text{geg. zyde} \times \textit{sec.}\ \text{aangr. h.}}{\text{Rad.}}$

$= \dfrac{\text{geg. zyde} \times \textit{cosec.}\ \text{tegenov. h.}}{\text{Rad.}}$

(III. Voorst.)

III. Gezochte zyde $= \dfrac{\text{geg. zyde} \times \textit{tang.}\ \text{aangr. h.}}{\text{Rad.}}$

$= \dfrac{\text{geg. zyde} \times \textit{cot.}\ \text{tegenov. h.}}{\text{Rad.}}$

(II. Voorst.)

IV. GEVAL.

Gegeeven. De twee rechthoekzyden.
Gezocht. De hoeken, en de hypotenusa.

OPLOSSING.

I. cot. gez. hoek $= \frac{\text{aangrenz. zyde} \times \text{Rad.}}{\text{tegenoverſt. zyde.}}$

of tang. gez. hoek $= \frac{\text{tegenov. zyde} \times \text{Rad.}}{\text{aangrenzende zyde.}}$

(II. Voorſtel.)

II. Hypotenuſa $= \frac{\text{zyde} \times \text{Rad.}}{\text{ſin. tegenoverſt. hoek.}}$

$= \frac{\text{zyde} \times \text{Rad.}}{\text{coſ. aangr. hoek.}}$

(I. Voorſtel.)

$= \frac{\text{zyde} \times \text{coſec. tegenoverſt. h.}}{\text{Rad.}}$

$= \frac{\text{zyde} \times \text{ſec. aangr. hoek.}}{\text{Rad.}}$

(III. Voorſtel.)

III. Hypotenuſa $= \sqrt{\text{eene zyde}^2 + \text{andere zyde}^2}$

$= \text{eene zyde} \sqrt{1 + \left(\frac{\text{andere zyde}}{\text{eene zyde}}\right)^2}$

I. AANMERKING. Wanneer men, dat verre het gemakkelykst is, den *radius* gelyk aan één ſtelt, moet men daarop in het gebruik der *ſinus-tafelen* letten: men moet namelyk alle *ſinusſen*, *coſinusſen*, de *tangenten* tot 45° toe en de *cotangenten* boven de 45°, als breuken aanmerken, en dus, indien men door de logarithmen werkt, overal 10 van het charakter in het *facit* aftrekken, wanneer het *facit* de logarithmus eener gezochte zyde is.

II. AANMERKING. Wanneer men met logarithmen werkt, zo als men altoos in de praktyk doet, wordt de rekening korter, met, in plaats van een' logarithmus aftetrekken, zo als in het II, III en IV geval, zyn *arithmetisch complement* bytevoegen. Insgelyks, wanneer men door logarithmen werkt, moet men altoos in het II en IV *geval*, de tweede uitdrukking van n° III. gebruiken, die gemakkelyker te bereekenen is.

III. AAN-

III. AANMERKING. Men vindt op den Engelschen *proportionaal-passer* eene schaal, genoemd *Gunthers-schaal*, welke uit drie lynen bestaat: de onderste is met de letter *n* (de eerste letter van het Engelsche woord *number* of getal); de tweede is met de letter *s* (of *sinus*); de derde met de letter *t* of (*tangens*) bestempeld. Op de onderste lyn zyn de logarithmen der getalen, op de tweede die van de *sinussen*, tot dien voor 90° of logarithmus van den *radius* toe, op de derde die van de *tangenten* geteekend. Indien men nu de voorgaande gevallen nagaat, en men dezelven door Logarithmen bewerkt, zyn zy byna allen

Log. *sinus* of *cosinus* + Log. van een getal (het zy hypotenusa, het zy zyde) = Logarith. *radius* + Log. van een getal.

en

Logarithmus *tangent* of *cotangent* + Log. van een getal, = Logarith *radius* + Log. van een getal

en dus

Log. *radius* — Log. *sinus* of *cosinus* = Log. van een getal — Log. van een getal.

en

± Log. *rad.* ∓ Log. *Tang.* of ∓ Log. *rad.* ± Log. *cot.* = Log. van een getal — Log. van een getal.

(de bovenste tekens gebruikende zo de hoek < 45°, de onderste zo > 45°.) Het verschil der Logarithmen van het derde en vierde lid is dan het zelfde als dat der Logarith. van het eerste en tweede. Men neemt dus met den passer op de behoorlyke lyn, het verschil tusschen de twee eerste leden die bekend zyn: men houdt die opening van den passer onveranderd, en men stelt op de behoorlyke lyn eene punt van den passer op het derde lid: de andere punt wyst dan het vierde lid, en dus het gezochte, aan. Wy zullen dit met een aantal voorbeelden ophelderen.

IV. AANMERKING Het is door middel van de oplossing van rechthoekige driehoeken, dat men in de Landmeetkunst de hoogte van voorwerpen enz. en in de Stuurmanskunst al wat den koers, verheid, en bekomen lengte en breedte betreft, bereekent: zo als door voorbeelden blyken zal.

II. AFDEELING.

OVER DE SCHEEFHOEKIGE DRIEHOEKEN.

IV. VOORSTEL. Fig. 90.

In alle driehoeken (ABC) ſtaan de zyden tot elkander zo als de ſinusſen der tegenovergeſtelde hoeken: dat is

AB: BC = ſin. ∠ C: ſin. ∠ BAC:
AC: BC = ſin. ∠ ABC: ſin. ∠ BAC:
AC: AB = ſin. ∠ ABC: ſin. ∠ C.

S p. 310. — W. t. §. 43. 47.

BEREIDING. Stel *a* C = AB = *a*C: en laaten BE, *ae*, AH, *ah* loodrecht zyn op AC en BC.

BEWYS. Uit het I. Voorſtel: en III, 11.

I. AANMERKING. Indien de △ ABC rechthoekig was, by voorbeeld in A: hadt men

AC: BC = ſin. ABC: ſin. L: dat is
AC: BC = ſin. ∠ ABC: rad. het geen het I Voorſtel opleevert, het welk dus maar een byzonder geval van dit meer algemeene Voorſtel is.

II. AANMERKING Ook het tweede Voorſtel wordt zeer gemaklyk uit dit afgeleid. Zo ∠ A = L

$$\begin{aligned} AB : AC &= \textit{ſin.}\ C : \textit{ſin.}\ B \\ &= \textit{coſ.}\ B : \textit{ſin.}\ B \\ &= 1 : \frac{\textit{ſin.}\ B}{\textit{coſ.}\ B} \\ &= 1 : \textit{tang.}\ B. \end{aligned}$$

III. AANMERKING. Indien een der hoeken, by v. CAB, ſtomp is, zoude men eigenlyk in plaats van *ſin.* ∠ CAB hebben *ſin. ſuppl.* ∠ CAB; doch wy hebben in de III. Bepaling van het VIII. Boek 1 Gevolg, gezien dat het ſupplement van eenen hoek den zelfden ſinus heeft als de hoek zelve: en wil men zulks uit dit Voorſtel zelve beweezen hebben, men beſchouwe Fig. 57: aldaar is

△

$\triangle$ CDB $\backsim$ $\triangle$ ABE: en dus

CB: AB = CD: AE.

Maar in $\triangle$ CAD is

CD : CA = sin. $\angle$ CAD: rad.
en in $\triangle$ AEC is } I. Voorstel.
AE: CA = sin. $\angle$ ACB: rad.

dus (III. II.)

CD: AE = sin. $\angle$ CAD: sin. $\angle$ ACB;

en dus

CB: AB = sin. $\angle$ CAD: sin. $\angle$ ACB; of

CB: AB = sin. suppl. $\angle$ CAD of sin. $\angle$ CAB : sin. $\angle$ ACB.

III. AANMERKING. Dit voorstel dient om de zyden van eenen driehoek te vinden, wanneer eene derzelven en de hoeken gegeeven zyn: of om de derde zyde te vinden, wanneer 'er twee zyden, en een hoek over een derzelven gesteld, gegeeven zyn; doch men lette in dat geval op het geen wy in de eerste Aanmerking op de II Bepaling over den aart dier onbekende hoeken gezegd hebben. Wy zullen de toepassing van dit Voorstel in de oplossing van het I, en II. geval zien.

V. VOORSTEL. Fig. 91.

In alle ongelykzydige driehoeken (CAB), staat de som van twee zyden (BC + AB) tot derzelver verschil (BC — AB) zo als de *tangent* van de halve som der hoeken (A + C) over die twee zyden gesteld, tot den *tangent* van derzelver half verschil (A — C).

St. p. 315. —— W. t. §. 52.

BEREIDING. Trek uit den hoek B, tusschen de beide bewuste zyden begreepen, als middelpunt, en met de kleinste der gegeeven zyden BA als radius, eenen cirkel ADE. Verleng CB in E: trek door E en A, EA: en laat CF ⊥ op EA zyn; CF valt binnen of buiten den driehoek naar maate $\angle$ CAB scherp of stomp is. Trek DA.

BEWYS. Men bewyst eerst dat CE $=$ BC $+$ AB en CD $=$ BC $-$ AB.

2°. Dat $\angle$ ECF $= \angle$ ADE (I. Boek, Bep. 8.) $= \frac{1}{2} \angle$ ABE (V., 4) $= \frac{1}{2}$ ($\angle$ CAB $+ \angle$ ACB (I., 7.:)

3°. Dat gevolglyk $\frac{1}{2}$ ($\angle$ CAB $+ \angle$ ACB) $- \angle$ ACB of $\frac{1}{2}$($\angle$ CAB $- \angle$ ACB) $= \angle$ ECF $- \angle$ ACB $= \angle$ FCA.

Uit dit alles maakt men vervolgens, met het II. Voorstel op de driehoeken FCE, en FCA toe te passen, door III, 11. en de gelykvormigheid der $\triangle \triangle$ AED en EFC, het besluit op.

I. GEVOLG.

Daar dan

AB $+$ BC: BC $-$ AB $=$ Tang. $\frac{1}{2}$ (A $+$ C): Tang. $\frac{1}{2}$ (A $-$ C)

en $\angle$ A $+ \angle$ C $=$ *supplem.* $\angle$ B, volgt

1°. dat zo hoek B bekend is, $\angle$ A $+ \angle$ C het ook is: en gevolglyk 2°. dat, zo AB en BC bekend zyn, men Tang. $\frac{1}{2}$ (A $-$ C) vinden kan; waar uit de bepaling der hoeken A, en C volgt: want de grootste hoek A $= \frac{1}{2}$ (A $+$ C) $+ \frac{1}{2}$ (A $-$ C): en de kleinste $\angle$ C $= \frac{1}{2}$ (A $+$ C) $- \frac{1}{2}$ (A $-$ C). Dus dient dit Voorstel eigenaartig, om eenen driehoek op te losfen, waar in twee zyden, en de hoek tusfchen dezelven begreepen, bekend zyn; gelyk wy in de oplosfing van het III. geval zien zullen.

I. AANMERKING. Dit Voorstel heeft alleen plaats voor ongelykzydige driehoeken; doch niet voor gelykzydigen, vermits als dan (Fig. 9.) BC $-$ AB $=$ o zo als ook het verfchil van twee hoeken: het heeft ook geen plaats voor gelykbeenige driehoeken in het algemeen: want (Fig. 70.) wanneer de gegeeven hoek B tusfchen de gelyke beenen AB en BC is: is BC $-$ AC $=$ o en $\angle$ A $-$ C $=$ o: dus geldt dit Voorstel alsdan niet: maar het zoude kunnen gelden, indien een der hoeken op de grondlyn A, of C, met de grondlyn AC, en een der beenen

BC

BC gegeeven was: doch dan is het onnuttig, vermits als dan ook het tweede been en de derde hoek gegeeven zyn, d. i. vermits er alsdan niets in den driehoek onbekend is.

II. AANMERKING. Wanneer dan in eenen gelykbeenigen driehoek ABC, (Fig. 70.) de beide beenen en de hoek ABC, tusschen dezelven begreepen, bekend zyn, laat men uit B eene loodlyn BG neder: daar deeze den ∠ ABC en de grondlyn AC in twee gelyke deelen snydt, is ∠ ABG bekend, en dus, door oplossing van den rechthoekigen driehoek ABG, vindt men gemaklyk AG, waar van het dubbeld is AC: dat is:

$$\text{rad.} : \textit{cos.}\ \angle A = AB : \tfrac{1}{2} AC$$

of, wat nog veel gemaklyker is, daar alle de hoeken van eenen gelykbeenigen driehoek bekend zyn wanneer 'er eene bekend is, vindt men de derde zyde door het vierde Voorstel.

II. GEVOLG.

$$\text{Daar } \angle A + \angle C = 180 - \angle B$$

$$\text{is } \frac{\angle A + \angle C}{2} = 90 - \tfrac{1}{2} B:$$

$$\text{of } \frac{\angle A + \angle C}{2} = \textit{Comp.}\ \tfrac{1}{2} B:$$

dus

$\textit{Tang.}\ \tfrac{1}{2}(A + C) = \textit{cot.}\ \tfrac{1}{2} \angle B$: waar door het Voorstel wordt

$BC + AB : BC - AB = \textit{cot.}\ \tfrac{1}{2} \angle B : \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A - C)$
en dus wordt ook de grootste hoek A $= \textit{comp.}\ \tfrac{1}{2}$ $\angle B + \tfrac{1}{2}$ gevonden verschil:
en de kleinste $= \textit{comp.}\ \tfrac{1}{2} \angle B - \tfrac{1}{2}$ gevonden verschil.

III GEVOLG.

$BC - AB : BC + AB = \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2} B : \textit{cot.}\ \tfrac{1}{2}(A - C)$.
(VIII, 20, Gev. 1.)

VI. VOORSTEL. Fig. 92.

In alle ongelykzydige driehoeken ſtaat de grootſte zyde (AC) tot de ſom der twee overigen (BC + AB) zo als derzelver verſchil (BC — BA) tot het verſchil der ſtukken (EC — AE), die op de grootſte zyde door de loodlyn, uit den top des tegenoverſtaanden hoeks B nedergelaaten, gevormd worden.

dat is; AC: BC + AB = BC — AB: EC — AE.

S. p. 319. —— W. t. §. 53.

BEREIDING. Zy BE ⊥ op AD: waar door AE = ED. Trek, uit B als middelpunt en met AB de kleinſte zyde als radius eenen cirkel ADFG, die AC en BC in D en F ſnydt. Verleng CB tot in G. trek EG.

dan is GC = BC + AB; en FC = BC — AB; en DC = EC — ED = EC — AC.

BEWYS. Uit V., 13. het 1. Gevolg.

GEVOLG.

Daar dan

AC: BC + AB = BC — AB: EC — AE:

volgt het, dat men, als AC, AB, BC gegeeven zyn, EC — AE vinden kan: en daaruit zyn EC en AE afzonderlyk bekend; want

EC + AE = AC is bekend: maar

$$EC = \frac{(EC + AE) + (EC - AE)}{2} \text{ en}$$

$$AE = \frac{(EC + AE) - (EC - AE)}{2},$$

Wanneer nu AE en EC bekend zyn, vindt men, door het I. Voorſtel, in de rechthoekige driehoeken ABE en CBE, de hoeken A, en C; waar uit de hoeken ABE, CBE, en ABC volgen; zo dat men dus door dit Voorſtel als voorbereiding ter bepaaling der ſtukken AE en EC, en voorts door het

I. Voorstel, de hoeken van eenen driehoek, waar van de drie zyden gegeeven zyn, vinden kan.

AANMERKING. Om de zelfde reeden, die wy in de aanmerking op het voorgaande Voorstel gemaakt hebben, is dit Voorstel niet toepaslyk op de gelykbeenige driehoeken, wanneer de grondlyn AC de grootste zyde is, noch ook op de gelykzydigen: maar in eenen gelykzydigen driehoek zyn de hoeken van zelve bekend (I., II. Gev. 2.) en in eenen gelykbeenigen, daar de loodlyn BG (Fig. 79.) den tophoek en de grondlyn in twee gelyke deelen snydt, zyn de hoeken door de oplossing van eenen rechthoekigen driehoek ABG te vinden: want:

AB: ½ AC = *rad.*: *cos.* ∠ A, of tot *sinus* ½ ∠ ABC.

REGELS TER OPLOSSING DER VIER GEVALLEN DIE IN DE SCHEEFHOEKIGE DRIEHOEKEN PLAATS KUNNEN HEBBEN.

I. GEVAL.

GEGEEVEN. Twee hoeken, A en C, en eene zyde AC.

GEZOCHT. I. De derde hoek B,

II. De twee overige zyden, AB en BC.

OPLOSSING.

I. Gezochte hoek = *Suppl.* som der gegeeven hoeken.

II. Gez. zyde = $\frac{\textit{sin.}\ \text{overst. hoek} \times \text{geg. zyde}}{\textit{sin.}\ \text{hoek over de gegev. zyde.}}$

(IV. Voorstel.)

II. GEVAL.

GEGEEVEN. Twee zyden, AB, BC, en een hoek C, doch die niet tusschen de zyden begreepen is.

GEZOCHT. I. De andere hoek A, die over eene der gegeeven zyden staat:

 II.

Grootste der gez. hoeken = Compl. ½ geg. hoek + ½ verschil.
Kleinste der gez. hoeken = Compl. ½ geg. hoek — ½ verschil.
(V. Voorst. en deszelfs IIde gevolg.)

II. De hoeken dus bekend zynde, zoekt men de derde zyde door het I. geval: namelyk

$$\text{Derde zyde} = \frac{\textit{sin}.\ \text{overstaanden hoek} \times \text{gegeev. zyde}}{\textit{sin}.\ \text{hoek over de gegeev. zyde.}}$$

GEVOLG

VAN DE EERSTE OPLOSSING.

Daar *Tang.* ½ versch. der gezochte hoeken =

$$\textit{Cot.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{gegeev. hoek} \times \frac{\text{versch. gez zyden}}{\text{som geg. zyden}}$$

of, Fig. 56. en 57,

$$\textit{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\ (C - B) = \textit{cot.}\ \tfrac{1}{2}\ A \times \left(\frac{BA - AC}{BA + AC}\right)$$

is ook VIII, 20, Gev. 1.

$$\textit{Cot.}\ \tfrac{1}{2}\ (C - B) = \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ A \times \left(\frac{BA + AC}{BA - AC}\right)$$

$$= \textit{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\ A \times \left[\frac{1 + \frac{AC}{BA}}{1 - \frac{AC}{BA}}\right]$$

en dus, uit VIII., 29., indien

$$\textit{Tang.}\ a = \frac{AC}{BA}\ \text{gesteld wordt}$$

is $\textit{cot.}\ \tfrac{1}{2}\ (C - B) = \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ A\ (45^\circ + a)$

Deeze oplossing kan in de Sterrekunde te pas komen, en tevens bewyst dezelve dat het, om de hoeken te kennen, genoeg is de reden der zyden AC en BC te weeten, zonder derzelver eigenlyke grootte te kennen.

CAGNOLI. §. 230.

II. OPLOSSING. Fig. 56. 57.

Deeze dient alleen voor de hoeken:

tang gezochten hoek =

$$\frac{\text{tegenoverst. zyde} \times \textit{sin}\ \text{gegev hoek}}{\text{tweede gegeev. zyde} \mp \text{tegenoverst. zyde} \times \textit{cos}.\ \text{geg. hoek.}}$$

na-

II. De hoek tusfchen de gegeeven zyden begreepen:
III. De derde zyde AC.

OPLOSSING.

I. *fin.* gezochten hoek over de gegev. zyde = $\frac{\text{tegen overst. zyde} \times \textit{fin. gegev. hoek}}{\text{zyde over den gegeeven hoek.}}$
(IV. Voorst.)

AANMERKING. Daar de finus van eenen hoek ook de finus is van het fupplement des zelfden hoeks, heeft hier die onzekerheid plaats, waarvan (II. Bep. I. Aanm.) gefproken is. Doch die onzekerheid verdwynt in twee gevallen: voor eerst, wanneer de zyde over den gegeeven hoek grooter dan die over den gezochten hoek is: want dan moet de gezochte hoek kleiner dan de gegevene, en dus ook noodwendig fcherp zyn: en ten tweeden, wanneer de zyde over den gezochten hoek grooter dan de zyde over den gegeeven hoek is, en de gevonden fcherpe hoek kleiner dan de gegeeven is. Immers, daar alsdan de gezochte hoek grooter dan de gegeeven zyn moet, zal men het fupplement of den ftompen hoek moeten neemen.

II. Derde hoek = *fuppl.* fom der twee overige:

III. Derde zyde = $\frac{\textit{fin.}\ \text{hoek over dezelve} \times \text{gegev. zyde}}{\textit{fin.}\ \text{hoek over de gegev. zyde.}}$
(N°. 1. en IV Voorst.)

III. GEVAL.

GEGEEVEN. Twee zyden: en de hoek tusfchen dezelven begreepen.

GEZOCHT. I. De twee overige hoeken:
II. De derde zyde.

I. OPLOSSING.

I. *Tang.* ½ verfchil der gezochte hoeken = *Cot.* ½ gegeev. hoek × $\frac{\text{verfch. gegeev. zyden}}{\text{fom. gegeev. zyden.}}$

Groot-

Grootste der gez. hoeken = Compl. ½ geg. hoek + ½ verschil.
Kleinste der gez. hoeken = Compl. ½ geg. hoek — ½ verschil.
(V. Voorst en deszelfs IIde gevolg.)

II. De hoeken dus bekend zynde, zoekt men de derde zyde door het I. geval: namelyk

$$\text{Derde zyde} = \frac{\text{fin. overstaanden hoek} \times \text{gegeev. zyde}}{\text{fin. hoek over de gegeev. zyde.}}$$

GEVOLG
VAN DE EERSTE OPLOSSING.

Daar *Tang.* ½ versch. der gezochte hoeken =

$$Cot.\ \tfrac{1}{2}\ \text{gegeev. hoek} \times \frac{\text{versch. gez. zyden}}{\text{som geg. zyden}}$$

of, Fig. 56. en 57,

$$Tang.\ \tfrac{1}{2}(C - B) = cot.\ \tfrac{1}{2} A \times \left(\frac{BA - AC}{BA + AC}\right)$$

is ook VIII, 20, Gev. 1.

$$Cot.\ \tfrac{1}{2}(C - B) = tang.\ \tfrac{1}{2} A \times \left(\frac{BA + AC}{BA - AC}\right)$$

$$= Tang.\ \tfrac{1}{2} A \times \left[\frac{1 + \frac{AC}{BA}}{1 - \frac{AC}{BA}}\right]$$

en dus, uit VIII., 29., indien

$$Tang.\ a = \frac{AC}{BA} \text{ gesteld wordt}$$

is $cot.\ \tfrac{1}{2}(C - B) = tang.\ \tfrac{1}{2} A\ (45^\circ + a)$

Deeze oplossing kan in de Sterrekunde te pas komen, en tevens bewyst dezelve dat het, om de hoeken te kennen, genoeg is, de reden der zyden AC en BC te weeten, zonder derzelver eigenlyke grootte te kennen.

CAGNOLI. §. 230.

II. OPLOSSING. Fig. 56. 57.

Deeze dient alleen voor de hoeken:

Tang gezochten hoek =

$$\frac{\text{tegenoverst. zyde} \times \text{fin geger hoek}}{\text{tweede gegeev. zyde} \mp \text{tegenoverst. zyde} \times \text{cos. geg. hoek.}}$$

na-

namelyk $-$, zo de gegeeven hoek scherp; $+$; zo hy stomp is.

CAGNOLI. §. 229.

BEWYS. (Fig. 56 en 57.) Men stelle dat AB, AC de gegeeven zyden, CAB de gegeeven en B de gezochte hoek zyn: dat CD loodrecht op AB staat. Dan is in $\triangle$ CBD:

$BD : DC = 1 : \text{Tang.} \angle B$ (II. Voorst.)

dus 1°. $\text{Tang.} \angle B = \frac{DC}{BD}$,

in $\triangle$ ACD is $AC : DC = 1 : \text{sin.} \angle CAD$.

dus 2°. $DC = \text{sin.} \angle CAD \times AC$; } I. Voorstel.
insgelyks $DA = \text{cos.} \angle CAD \times AC$ }

Maar $BD = AB \mp DA$:

dus 3° $BD = AB \mp AC \times \text{cos.} \angle CAD$:

en dus uit n°. 1, door n°. 2 en n°. 3.

$$\text{Tang.} \angle C = \frac{AC \times \text{sin.} CAD}{AB \mp AC \times \text{cos.} \angle CAD.}$$

Maar zo $\angle A$ of CAB scherp is; is

$\angle CAD = \angle CAB = \angle A$: dus

$$\text{Tang.} \angle C = \frac{AC \times \text{sin.} A}{AB - AC \text{ cos.} A.}$$

zo $\angle A$ of $\angle CAB$ stomp is, is

$\angle CAD = \text{suppl.} \angle CAB$: dus

$\text{sin.} \angle CAD = \text{sin. suppl.} \angle CAB = \text{sin.} \angle CAB$

en $\text{cos.} \angle CAD = \text{cos. suppl.} \angle CAB$

$= - \text{cos.} \angle CAB$ (VIII. Bep. IV. Gevolg 2; aanm.)

dus in dat geval:

$$\text{Tang.} C = \frac{AC \times \text{sin.} A}{AB + AC \text{ cos.} A.}$$

AANMERKING. Indien de hoek A scherp is kan C scherp, recht of stomp zyn: het eerste heeft plaats zo lang $AB > AC \times \text{cos.} A$ het tweede wanneer $AB = AC \times \text{cos.} A$ en

dus

dus de tang. C *oneindig* of L C recht: het derde wanneer AC $\times$ *cos.* A $>$ AB: want dan is tang. C *negatief*, en gevolglyk L C stomp.

III. OPLOSSING.

Voor de gezochte zyde.

Door deeze oplossing vindt men de gevraagde zyde, zonder alvorens de hoeken gevonden te hebben, zo als in de beide voorgaande oplossingen nodig is.

zy

$$Tang.\ a = \frac{2.\ sin.\ \tfrac{1}{2}\ \text{geg. hoek}}{\text{versch. geg. zyden}} \times \sqrt{\text{product der gegeeven zyden.}}$$

dan is, *Gezochte zyde* $= \dfrac{\text{verschil geg. zyden}}{cos.\ a.}$

CAGNOLI. §. 227. 28.

BEWYS.

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \mp 2\,AB.\ AD.$ (II. 9.)

Maar, in $\triangle$ ACD is

AC: AD $=$ 1: *cos.* L CAD (I. Voorstel):

dus AD $=$ AC $\times$ *cos.* L BAD

en

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \mp 2\,AB.\ AC.\ cos.\ L\,CAD.$

zo nu L CAB scherp is, is L CAD $=$ L CAB of A;

en dus

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB.\ AC.\ cos.\ L\,A$

zo L CAB stomp is, is

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,AB.\ AC.\ cos.\ L\,CAD:$

en L CAD $=$ *supp.* L CAB: dus (VIII. Bep. IV. Gev. 2. Aanm.)

cos. L CAD $= -$ *cos.* L CAB of A: dus

wederom, en dus in alle gevallen

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB.\ AC.\ cos.\ A.$

Maar *cos.* A $= 1 - 2\,(sin.\ \tfrac{1}{2}\ A)^2$ (VIII, 17. gev. 1.)

dus

$\overline{BC}^2$

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\, AB.\, AC + 4\, AB.\, AC\, (\text{fin. } \tfrac{1}{2} A)^2$

$= \overline{AB - AC}^2 + 4\, AB.\, AC.\, (\text{fin. } \tfrac{1}{2} A)^2$ (II, 2.)

en dus, zo $\text{Tang. } a = \dfrac{2\ \text{fin. } \tfrac{1}{2} A}{AB - AC} \times \sqrt{AB.\ AC}$,

is $BC = \dfrac{AB - AC}{\text{Cof. } a}$ (VIII, 27.)

IV. GEVAL.

GEGEEVEN. De drie zyden.
GEZOCHT. De drie hoeken.

I. OPLOSSING.

Men laat op de grootfte zyde eene loodlyn uit den tegenovergeftelden hoek vallen: waaruit (II, 15 en I, 7. Gev.) volgt dat die lyn altoos binnen den driehoek valt, en de grondlyn in twee ftukken deelt.

I. verfchil der ftukken van de grondlyn $=$

$$\frac{\text{fom der zyden} \times \text{verfchil der zyden}}{\text{grondlyn}} \quad \text{(VI. Voorftel.)}$$

dus

grootfte ftuk $= \tfrac{1}{2}$ (grondlyn $+$ verfchil der ftukken)
kleinfte ftuk $= \tfrac{1}{2}$ (grondlyn $-$ verfchil der ftukken)

II. *Cof.* hoek op de grondlyn $= \dfrac{\text{aangrenzend ftuk} \times \text{Rad.}}{\text{aangrenz. zyde.}}$

(I. Voorftel.)

III. Hoek in den top $=$ fuppl. van de fom der hoeken op de grondlyn.

II. OPLOSSING. Fig. 56. 57.

Om de hoeken te vinden, zonder behulp der loodlyn:
I. *cof.* $\tfrac{1}{2}$ Hoek $=$

$$\sqrt{\frac{\text{halve fom der zyden} \times (\tfrac{1}{2}\text{ fom} - \text{tegenoverft. zyde})}{\text{product der aangrenzende zyden.}}}$$

of

II. *sin.* $\frac{1}{2}$ Hoek $=$

$$\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}\text{ som der zyden} - \text{eene aangr.z.}) \times (\frac{1}{2}\text{ som} - \text{and. aangr.z.})}{\text{product der aangrenzende zyden.}}}$$

CAGNOLI. §. 233.

BEWYS. VOOR HET I. Uit het bewys van de derde Oplossing voor het III. Geval heeft men

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB.\,AC.\,cos.\,A.$$

dus

$$cos.\,A = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{2\,AB.\,AC}$$

$$= \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,AB.\,AC - \overline{BC}^2 - 2\,AB.\,AC}{2\,AB.\,AC}$$

$$= \frac{\overline{AC + AB}^2 - \overline{BC}^2}{2\,AB.\,AC} - 1 \text{ (II, 2)}$$

$$= \frac{(AC + AB + BC)\,(AC + AB - BC)}{2\,AB.\,AC\quad\text{(II. 1. gev.)}} - 1$$

Maar $cos.\,A = 2\,(cos.\,\frac{1}{2}\,A)^2 - 1$: (VIII, 17. gev. 1.)

dus

$$2\,(cos.\,\tfrac{1}{2}\,A)^2 - 1 = \frac{(AC + AB + BC)(AC + AB - BC)}{2\,AB.\,AC} - 1$$

en

$$\overline{cos.\,\tfrac{1}{2}\,A}^2 = \frac{\frac{(AC + AB + BC)}{2} \times \frac{(AC + AB - BC)}{2}}{AB.\,AC}$$

dus

$$cos.\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{\frac{(AC + AB + BC)}{2} \times \frac{(AC + AB - BC)}{2}}{AB.\,AC.}}$$

BEWYS. VOOR HET II.

Uit het bewys van de derde Oplossing van het III. Geval heeft men.

$\overline{BC}^2 = \overline{AB - AC}^2 + 4\,AB.\,AC.\,(sin.\,\frac{1}{2}\,A)^2$; dus

$$(sin.\,\tfrac{1}{2}\,A)^2 = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{(AB - AC)}^2}{4\,AB.\,AC} \text{ (II., 5.)}$$

$=$

$$= \frac{\left(\frac{BC + AB - AC}{2}\right) \times \left(\frac{BC - AB + AC}{2}\right)}{AB \,.\, AC}$$

$$= \frac{\left(\frac{BC + AB + AC}{2} - AC\right) \times \left(\frac{BC + AB + AC}{2} - AB\right)}{AB \,.\, AC}$$

dus

sin. $\frac{1}{2}$ A =

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{BC + AB + AC}{2} - AC\right) \times \left(\frac{BC + AB + AC}{2} - AB\right)}{}}$$

AANMERKING. Deeze oplossing kan in zeer veele gevallen te pas komen, en heeft zeer veel gelykheid met die, welke men in de klootsche driehoeks-meeting voor het zelfde geval gebruikt.

ALGEMEENE AANMERKING.

Men kan de gewoone oplossingen, dat is die, welke wy *eerste* oplossingen genoemd hebben, voor deeze vier gevallen, even als voor de rechthoekige driehoeken, door den *proportionaal-passer* verrichten: want men heeft:

I. GEVAL. Log. gez. zyde — Log. gegev. zyde = Log. *sin.* overst. hoek — Log. *sin.* hoek over de gegev. zyde.

II. GEVAL. Log. *sin.* L over de geg. zyde — Log. *sin.* geg. hoek = Log. overst. zyde — Log. zyde over den geg. hoek.

Log. gez. zyde — Log. geg. zyde = Log. *sin.* hoek over de gez. zyde — Log. *sin.* hoek over de geg. zyde.

III. GEVAL. Log. *Tang.* $\frac{1}{2}$ verschil der gezochte hoeken — Log. *Tang.* compl. $\frac{1}{2}$ geg. hoek = Log. versch. geg. zyden — Log. som geg. zyden.

Log. derde zyde — Log. geg. zyde = Log. *sin.* hoek over de gez. zyde — Log. *sin.* hoek over de geg. zyde

IV. GE-

IV. GEVAL. Log. verschil der stukken — Log. verschil der zyden =
Log. som der zyden — Log grondlyn.
Log. rad. — Log. *cos.* hoek op de grondlyn =
Log. aangr. zyde — Log. aangr. stuk.

II. ALGEMEENE AANMERKING.

OVER HET GEBRUIK DER VOORGAANDE OPLOSSINGEN.

De oplossing der scheefhoekige driehoeken is in de praktyk van het landmeeten ten hoogsten noodzakelyk. Het eerste geval dient om (Fig. 93) te bepaalen op welken afstand CA of CB men zich van een ongenaakbaar voorwerp C bevindt: mits men uit twee plaatsen van de bekende bazis AB de hoeken meeten kan, welke het gemelde voorwerp uit die plaatsen gezien met de bazis maakt. Kan men 'er dan nog by bepaalen den hoek, dien het voorwerp uit A of uit B gezien boven de kim maakt, dan zal men, den afstand CA of CB eerst berekend hebbende, de hoogte van dat voorwerp kunnen bepaalen, door het I. geval van de rechthoekige driehoeken.

Het derde geval dient om den onderlingen afstand CD van twee ongenaakbaare voorwerpen C en D bepaalen, mits men de hoeken die zy, uit de uiteinden van de gemeeten bazis AB gezien, met dezelve maaken, gemeeten hebbe: want dan komt men eindelyk tot de driehoeken CAD of CBD waarin twee zyden CA en AD: of CB en BD: en de begreepen hoek CAD of CBD bekend zyn.

Het vierde geval dient om de onderlinge richting van drie voorwerpen, wanneer derzelver afstanden van elkander bekend zyn, te bepaalen.

Ik zal die gevallen door daadelyke meetingen en voorbeelden in myne lessen uitleggen.

Men is derhalven door meetingen van eene bazis, en voorts van hoeken, in staat om een land op te nee-

 men

men en in kaart te brengen. Wat 'er tot eene naauwkeurige meeting vereischt wordt, behoort tot de praktyk zelve. De kaart naauwkeurig gemaakt zynde, kan men den inhoud van het gemeeten land in *quadraat*-roeden of andere *quadraat*-maat vinden door het geen in het XX. Voorstel van het II. Boek gezegd is.

III. AANMERKING,

OVER EEN BELANGRYK GEVAL IN DE PRAKTYK. Fig. 181.

Het gebeurt somtyds dat 'er gevallen zyn waar in men in den eersten opslag geene genoegzaame bekende dingen schynt te hebben, om de oplossing te volbrengen, en die echter door de regelen in deeze vier gevallen opgegeeven volmaakt opgelost kunnen worden. Wy oordeelen het niet onnuttig, twee van die gevallen hier te behandelen, om dat zy van het grootste nut zyn, en zo veel ik weet byna in geene boeken verhandeld worden.

Men stelle dat de onderlinge ligging van drie plaatsen A, I, C, welke dus den driehoek AIC uitmaaken, bekend is, en dat men uit eenig stip B de hoeken *ABI*, IBC meet, men vraagt de afstanden BA, BI, BC, en de hoeken CAB, ACB.

I. OPLOSSING. (a)

I. Daar in den driehoek AIC de drie zyden bekend zyn, berekent men eerst de hoeken IAC, AIC, *en ICA*, door het vierde geval.

II. Men onderstelle dat de cirkel BADC om den driehoek ABC beschreeven zy: (VI, 4) men trekke de lyn BI welke den omtrek in D snydt: vervolgens AD, en CD, dan is:

1°. $\angle DCA = \angle ABD$ ⎫
2°. $\angle DAC = \angle DBC$ ⎭ (V, 3, gev, 3.) dus bekend.

3°.

(a) Deeze oplossing is door my overgenomen uit de lessen van wylen mynen zeer geëerden amptgenoot den Heer Professor N. Ypey.

3°. Maar $\angle$ I A D = verschil of som van $\angle$ D A C en $\angle$ I A C
4°. en $\angle$ I C D = verschil of som van $\angle$ D C A en $\angle$ I C A
dus zyn ook die beide hoeken I A D en I C D bekend.

III. Gevolglyk zyn in den $\triangle$ A D C bekend de drie hoeken en de zyde A C; dus vindt men A D en D C door het I. Geval.

IV. In den driehoek D A I zyn bekend A I door de onderstelling, A D uit n°. III, $\angle$ I A D uit n°. II, 3°. dus vindt men $\angle$ A D I door het III. geval: en insgelyks $\angle$ C D I in den driehoek D C I.

V. Maar $\angle$ A I B = $\angle$ D A I + $\angle$ A D I
en $\angle$ B I C = $\angle$ I D C + $\angle$ D C I } I, 71
en zo I buiten den cirkel valt is
$\angle$ A I B = suppl. ($\angle$ D A I + $\angle$ A D I)
$\angle$ B I C = suppl. ($\angle$ I D C + $\angle$ D C I) } I, 71
Dus zyn die hoeken bekend

VI. Gevolglyk zyn in $\triangle$ A I B bekend, $\angle$ A I B, door n°. V. $\angle$ A B I en I A door de onderstelling: dus vindt men A B, I B, en $\angle$ I A B door het I. geval.

Insgelyks vindt men in den $\triangle$ I C B, de zyde C B, en $\angle$ I C B: waaruit dan ook de hoeken C A B en A C B afgeleid worden, en dus het geheele geval opgelost is.

AANMERKING. Deeze oplossing is vry lang, want zy vereischt dat men, buiten den driehoek A I C, vyf driehoeken oplosse: dus zal misschien de volgende oplossing korter zyn.

II. OPLOSSING. (a).

Men stelle kortheidshalven

$\angle (a + d) = n$: $\angle (d - c) = h$, dan is

$$\text{Tang. } u = \frac{AI \times \text{sin. } n}{AC \times \text{sin. } a - AI.\ \text{sin. } n. \text{cos. } h}$$

en

(a) Ik gaf in het jaar 1772 deeze oplossing aan een goed vriend, die my dit vraagstuk voorstelde.

en $AB = AC \times \frac{\text{fin. } u}{\text{fin. } n}$

Waaruit IB en CB volgen.

BEWYS. 1°. $\text{fin. } n : AC = \text{fin. } u : AB$
$\text{fin. } a : AI = \text{fin. } r : AB$ } IV. Voorst.

2°. dus $AB = \frac{AI \text{ fin. } r}{\text{fin. } a} = \frac{AC \text{ fin. } u}{\text{fin. } n}$.

3°. Maar $r + c = u + d$: dus $r = u + d - c$
$= u + h$: dus, uit N°. 3. en N°. 2.

$\frac{AI \times \text{fin.}(u + h)}{\text{fin. } a} = \frac{AC. \text{ fin. } u}{\text{fin. } n}$: of,

stellende kortheidshalven

$q = \frac{AI}{\text{fin. } a}$; $p = \frac{AC}{\text{fin. } n}$,

$q \text{ fin. } (u + h) = p. \text{ fin. } u$ en dus (VIII. 15)

$q \text{ fin. } u. \text{ cof. } h + q \text{ fin. } h \text{ cof. } u = p \text{ fin. } u$

4°, en $(p - q \text{ cof. } h) \text{ fin. } u = q. \text{ fin. } h. \text{ cof. } u$

en dus $\frac{\text{fin. } u}{\text{cof. } u} = \text{Tang. } u = \frac{q}{p - q. \text{ cof. } h.} =$

$$= \frac{AI}{\text{fin. } a \left(\frac{AC}{\text{fin. } n} - \frac{AI}{\text{fin. } a} \text{cof. } h\right)} =$$

$$\frac{AI. \text{ fin. } n}{AC. \text{ fin. } a - AI \text{ fin. } n \text{ cof. } h}$$

I. AANMERKING. Indien $AC. \text{ fin. } a = AI. \text{ fin. } n \text{ cof. } h$, is tang. u *oneindig*; en dus hoek u recht: indien $AI \text{ fin. } n \text{ cof. } h > AC \text{ fin. } a$ is tang. u *negatief*; en dus hoek u stomp. Zie Aanmerking op de VI. Bep. van het VIII. Boek.

II. AANMERKING. Indien men, in plaats van den tangent u, den finus u onmiddellyk wilde kennen, had men slechts N°. 4. in het quadraat te brengen: en men kreeg dan

$$(p - q \text{ cof. } h)^2 \overline{\text{fin. } u}^2 = q^2 \overline{\text{fin. } h}^2 \overline{\text{cof. } u}^2 = q^2 \overline{\text{fin. } h}^2 - q^2 \overline{\text{fin. } h}^2 \overline{\text{fin. } u}^2$$

waar

waar uit volgt

$$(p^2 - 2pq \text{ cos. } h + q^2 \overline{\text{cos. } h}^2 + q^2 \overline{\text{sin. } h}^2)\ \overline{\text{sin. } u}^2$$
$$= q^2\ \overline{\text{sin. } b}^2$$

en dus (VIII, 14)

$$(p^2 - 2pq \text{ cos. } h. + q^2)\ \overline{\text{sin. } u}^2 = q^2\ \overline{\text{sin. } b}^2$$

of

$$\text{sin. } u = \frac{q.\ \text{sin. } b}{\sqrt{p^2 - 2pq \text{ cos. } b + q^2}}$$

Doch hieruit kan nimmer blyken of de hoek u scherp of stomp is: waarom wy de bereekening door tangens u, welke ook gemaklyker is, zouden verkiezen.

IV. AANMERKING.

OVER EEN TWEEDE BELANGRYK GEVAL IN DE PRAKTYK.

Het tweede geval dat wy beloofd hebben hier te zullen opgeven, is het volgende. (Fig. 93.)

Gegeeven zynde de afstand CD, indien men uit A en B de hoeken CAB, DAB, CBA, DBA met, vraagt men de lengte van AB en de afstanden CA, CB, DA, DB.

I. OPLOSSING.

Tang. L CDA =

$$\frac{\text{sin. CAD. sin. CBA. sin. ADB}}{\text{sin. ABD. sin. ACB} \mp \text{cos. CAD. sin. CBA. sin. ADB}}$$

— zo L CAD scherp: + zo L CAD stomp is.

$$\text{AB} = \frac{\text{sin. ACB. sin. CDA}}{\text{sin. CBA. sin. CAD.}} \times \text{CD.}$$

BEWYS. In de driehoeken ACB, ADB zyn de hoeken ACB en ADB bekend, dewyl de beide overige hoeken in elken driehoek bekend zyn.

Door de II. Oplossing van het III. Geval is

$$\textit{Tang.}\ \text{L CDA} = \frac{\text{CA} \times \text{sin. L CAD}}{\text{AD} \mp \text{CA} \times \text{cos. L CAD:}}$$

 =

$$= \frac{\sin. \angle CAD}{\frac{AD}{CA} \mp \cos. \angle CAD}.$$

maar

$$\sin. \angle ACB : \sin. \angle CBA = AB : AC$$
$$\sin. \angle ABD : \sin. \angle ADB = AD : AB$$

dus

$$AD : AC = \sin. \angle ABD. \sin. \angle ACB : \sin. \angle CBA. \sin. \angle ADB.$$

en

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\sin. \angle ABD. \sin. \angle ACB}{\sin. \angle CBA. \sin. \angle ADB};$$

en dus

$$\text{Tang.} \angle CDA = \frac{\sin. \angle CAD}{\frac{\sin. \angle ABD. \sin. \angle ACB}{\sin. \angle CBA. \sin. \angle ADB} \mp \cos. \angle CAD}.$$

$$= \frac{\sin. \angle CAD. \sin. \angle CBA. \sin. \angle ADB}{\sin. \angle ABD. \sin. \angle ACB \mp \cos. \angle CAD. \sin. \angle CBA. \sin. \angle ADB.}$$

Dus word $\angle CDA$ bekend: waaruit $\angle ACD$ volgt: en voorts

$$AC = \frac{\sin. \angle CDA \times CD}{\sin. \angle CAD}$$

doch

$$AB = \frac{\sin. \angle ACB \times AC}{\sin. \angle CBA.}$$

en dus eindelyk

$$AB = \frac{\sin. \angle ACB \times \sin. \angle CDA \times CD}{\sin. \angle CBA. \sin. \angle CAD.}$$

waaruit al het overige bekend wordt.

I. AANMERKING. Men kan ook zo men wil den hoek CDA door de eerste oplossing van het III. geval zoeken: want, hoewel AC en AD als dan nog niet bekend zyn, is derzelver reeden bekend, het geen tot vinding van den hoek genoeg is.

II.

II. AANMERKING. Beide deeze Voorstellen zyn van een zeer groot nut, om op zee en op land door eene enkele waarneeming den afstand en ligging van de plaats, daar men zich bevindt, te bepaalen, mits men drie voorwerpen hebbe, waarvan de afstand bekend is. En indien men in het I. Voorstel Fig. 181. Uit een tweede stip G (en insgelyks uit meerdere stippen) de zelfde waarneemingen als uit B doet, zal men in den driehoek BAG de zyden AB, AG, en den hoek BAG bekend hebben: en dus ook BG en de hoeken ABG, AGB kunnen bepaalen al kan men B uit G niet zien.

III. AFDEELING.

OVER DE OPLOSSING DER DRIEHOEKEN IN BYZONDERE GEVALLEN, WANNEER SLECHTS TWEE HOEKEN OF ZYDEN EN HET VERSCHIL OF DE SOM VAN TWEE ANDERE HOEKEN OF ZYDEN GEGEEVEN ZYN.

VII. VOORSTEL. Fig. 91.

Gegeeven zynde twee zyden AB, BC, en het verschil der tegenovergestelde hoeken A en C, den driehoek optelossen.

CAGNOLI. §. 237.

OPLOSSING.

$$Tang.\ \tfrac{1}{2}\ \text{begreepen hoek} = \frac{Cot.\ \tfrac{1}{2}\ \text{geg. verschil} \times \text{verschil geg. zyden.}}{\text{som der gegeeven zyden.}}$$

waar uit het overige door het I. Geval gevonden wordt.

BEWYS. Uit het 3. Gev. van het V. Voorstel is

$BC - AB : BC + AB = tang.\ \tfrac{1}{2} B : cot.\ \tfrac{1}{2} (A - C)$

 en

en dus $tang.\ \frac{1}{2} B = \frac{cot.\ \frac{1}{2}(A - C) \times (BC - AB)}{BC + AB.}$

VIII. VOORSTEL. Fig. 91.

Gegeeven zynde de hoeken, en de som of het verschil van twee zyden, den driehoek optelossen.

CAGNOLI §. 238.

OPLOSSING.

I. Verschil der geg. zyden =

$$\frac{\text{som geg. zyden} \times tang.\ \frac{1}{2}\ \text{begr. hoek.}}{cot.\ \frac{1}{2}\ \text{verschil der overige hoeken.}}$$

II. Som der geg. zyden =

$$\frac{\text{Versch. geg. zyden} \times cot.\ \frac{1}{2}\ \text{begr. hoek.}}{tang.\ \frac{1}{2}\ \text{verschil der overige hoeken.}}$$

BEWYS. Uit het VII. Voorstel is

$$Tang.\ \frac{1}{2} B = \frac{cot.\ \frac{1}{2}(A - C) \times (BC - AB)}{BC + AB:}$$

$$\text{dus } BC - AB = (BC + AB) \times \frac{tang.\ \frac{1}{2} B}{cot.\ \frac{1}{2}(A - C)}$$

en

$$BC + AB = (BC - AB) \times \frac{cot.\ \frac{1}{2}(A - C)}{tang.\ \frac{1}{2} B} =$$

$$(BC - AB) \times \frac{cot.\ \frac{1}{2} B}{tang.\ \frac{1}{2}(A - C)}\ \text{(VIII, 20, gev. I.}$$

I. GEVOLG.

Indien de driehoek rechthoekig was in A, en men kende eenen scherpen hoek, (dus alle de hoeken) en boven dien de som of het verschil van de hypotenusa BC en eene zyde AB, dan had men:

$L\ A - C = 90 - C = comp.\ C$: en dus

$tang.\ \frac{1}{2}(A - C) = cot.\ \frac{1}{2} C$: en $cot.\ \frac{1}{2}(A - C) = tang.\ \frac{1}{2} C$

en dus

$$BC - AB = \frac{\overline{BC + AB} \times tang.\ \frac{1}{2} B}{tang.\ \frac{1}{2} C} = \overline{BC + AB} \times tang.\ \frac{1}{2} B \times cot.\ \frac{1}{2} C.$$

en

en

$$BC + AB = \overline{BC - AB} \times \frac{cot.\ \frac{1}{2} B}{cot.\ \frac{1}{2} C} = \overline{BC - AB} \times cot.\ \tfrac{1}{2} B \times tang.\ \tfrac{1}{2} C.$$

Waar uit, het zy BC + AB, het zy BC — AB gegeeven is, BC en AB afzonderlyk te vinden zyn: en daaruit AC.

Men zoude ook AC onmiddelyk kunnen vinden, door het 3. Gev. van het II. Voorstel: want volgens het zelve heeft men in onze figuur (altoos den ∠ A recht stellende.)

$$\frac{BC - AB}{BC + AB} = (tang.\ \tfrac{1}{2} B)^2 : \text{ en dus}$$

$$\frac{BC - AB}{BC + AB} \times \overline{AC}^2 = (tang.\ \tfrac{1}{2} B)^2 \times \overline{AC}^2 : \text{ of (II, 7. Gev. 1.)}$$

$$\frac{\overline{BC - AB} \times (\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2)}{BC + AB} = (tang.\ \tfrac{1}{2} B)^2 \times \overline{AC}^2 ; \text{ of}$$

door II. 5.

$$\frac{(BC - AB)(BC + AB)(BC - AB)}{BC + AB} = \overline{tang.\ \tfrac{1}{2} B}^2 \times \overline{AC}^2$$

$$\text{of } AC = \frac{(BC - AB)}{tang.\ \frac{1}{2} B}$$

Indien men door $\overline{AC}^2$ *divideert* in plaats van te *multipliceeren*, heeft men

$$AC = tang.\ \tfrac{1}{2} B \times (BC + AB).$$

CAGNOLI. §. 218.

II. GEVOLG.

Indien de △ CAB niet in A, maar in B by voorbeeld, rechthoekig was, en men kende de hoeken, en de som of het verschil der rechthoeks zyden, had men ½ ∠ B = 45°: en dus *tang.* ½ ∠ B = *radius* = 1: en dus,

daar A + C = 90, is A = 90 — C: en

A — C = 90 — 2 C: dus ½ (A — C) = 45° — C:

CAGNOLI. §. 240.

BEREIDING. Zy BE = AB: en dus CE, = CB + AB, bekend. En dus ook

$\angle$ CAE − E = $\angle$ CAE − $\angle$ BAE = $\angle$ CAB:

BEWYS. In den $\triangle$ CAE is door de eerste oplossing van het derde Geval.

Tang. ½ ($\angle$ CAE − E) of hier

$$Tang. \tfrac{1}{2} \angle CAB = cot. \tfrac{1}{2} B \times \frac{\overline{CB + AB} - AC}{\overline{CB + AB} + AC}:$$

of (VIII., 20. Gev. 1.)

$$Cot. \tfrac{1}{2} CAB = tang. \tfrac{1}{2} B \times \frac{\overline{CB + AB} + AC}{\overline{CB + AB} - AC}.$$

XI. VOORSTEL. Fig. 91.

In eenen driehoek (ABC) gegeeven zynde een hoek (C,) eene der aangrenzende zyden (AC,) en het verschil der overige zyden (CB − AB) den driehoek op te lossen.

OPLOSSING.

Tang. ½ (hoek die aan de gegev. zyde grenst) =

$$Tang. \tfrac{1}{2} \text{ hoek} \times \frac{\text{gegev. zyde} + \text{gegev. verschil}}{\text{gegev. zyde} - \text{gegev. verschil}}.$$

CAGNOLI. §. 241.

BEREIDING. Zy BD = BA: dus 1°. CD = CB − AB: dus 2°. $\angle$ DAB = $\angle$ ADB: 3°. $\angle$ CDA − $\angle$ CAD = 180° − $\angle$ ADB − $\angle$ CAD = 180° − ($\angle$ ADB + $\angle$ CAD) = 180° − ($\angle$DAB + $\angle$CAD) = 180° − $\angle$ CAB: dus ½ ($\angle$ CDA − $\angle$ CAD) = 90 − ½ $\angle$ CAB = *comp.* ½ $\angle$ CAB.

BEWYS. In den $\triangle$ CAD is door de I. Oplossing van het III. Geval.

tang. ½ ($\angle$ CDA − $\angle$ CAD) = *cot.* ½ $\angle$ CAB

$$= cot. \tfrac{1}{2} \angle C \times \frac{CA - CD}{CA + CD}$$

=

$$= cot. \tfrac{1}{2} \angle C \times \frac{CA - (CB - AB)}{CA + (CB + AB)}\text{: en dus}$$

$$tang. \tfrac{1}{2} \angle CAB = tang. \tfrac{1}{2} C \times \frac{CA + \overline{CB + AB}}{CA - \overline{CB - AB}}.$$

XII. VOORSTEL. Fig. 56, 57.

Gegeeven zynde de drie hoeken, en de grondlyn (AB) de stukken die op dezelve door de loodlyn gemaakt worden te bepaalen.

OPLOSSING.

Verschil of som der stukken $= \dfrac{\text{grondl.} \times \text{fin. versc. hoek op de grondl.}}{\text{fin. tophoek.}}$

CAGNOLI. §. 243.

BEWYS. $AD : DB = cot. \angle CAD : cot. \angle B$:

dus

$$AD + DB : DB - AD = cot. \angle CAD + cot. \angle B : cot. \angle CAD - cot. B :$$

en dus

$$\frac{DB - AD}{AD + DB} = \frac{cot. \angle CAD - cot. B}{cot. \angle CAD + cot. B}$$

$$= \frac{fin. (CAD - B)}{fin. (CAD + B)} \text{ (VIII., 20. het 3. Gev.)}$$

en dus Fig. 56.

$$DB - AD = \frac{AB \times fin\ (CAB - B)}{fin.\ suppl.\ ACB} = \frac{AB \times fin. (A - B)}{fin.\ ACB.}$$

en Fig. 57.

$$AD + DB = \frac{AB \times fin\ (CAD + B)}{fin.\ (CAD - B)}$$

$$= \frac{AB\ fin. (180 - CAB + B)}{fin. (180 - CAB - B)}$$

$$= \frac{AB\ fin. (180 - (CAB - B))}{fin. (180 - (CAB + B))} = \frac{AB\ fin.\ sup. (CAB - B)}{fin.\ sup. (CAB + B)}$$

$$= \frac{AB\ fin.\ (CAB - B)}{fin.\ ACB.}$$

GEVOLG.

Indien de tophoek recht is, is het verschil der stukken = grondlyn × sin. verschil der hoeken op de grondlyn.

of $DB - AD = AB$ sin. $(A - B)$

doch om dat $A + B = 90$: is $A - B = 90 - 2B =$ compl. $2B$.

en dus

$DB - AD =$ cos. $2B$: indien de radius $AB = 1$.

en dus

daar $DB = \frac{1}{2}(AB + \overline{DB - AD})$ (IV. Gev. 1. Opl.)

en $AD = \frac{1}{2}(AB - \overline{DB - AD})$

is $DB : AD = 1 +$ cos. $2B : 1 -$ cos. $2B$

en door (VIII., 16. Gev. 2.)

$= 1 + 2\,\overline{\text{cos. } B}^2 - 1 : 1 - 2\,\overline{\text{cos. } B}^2 + 1$

$= 2\,\overline{\text{cos. } B}^2 : 2 - 2\,\overline{\text{cos. } B}^2$.

$= \overline{\text{cos. } B}^2 : 1 - \overline{\text{cos. } B}^2$

$= 1 : \frac{\overline{\text{sin. } B}^2}{\overline{\text{cos. } B}^2} = 1 : \overline{\text{tang. } B}^2$.

insgelyks,

$AB : DB - AD = 1 :$ sin. $(A - B)$.

Welke beide uitdrukkingen men voor den rechthoekigen driehoek, en dus in een byzonder geval, onmiddellyk en korter had kunnen bekomen.

CAGNOLI. §. 221.

AANMERKING. Het geval waar in men de stukken van de grondlyn vraagt als de drie zyden van den driehoek gegeeven zyn, is de I. Oplossing van het IV. Geval.

XIII. VOORSTEL. Fig. 56, 57.

Wanneer in eenen driehoek (ACB) de tophoek, en de zyden (AC, CB) om dien hoek gegeeven zyn, de stukken te vinden in welke eene loodlyn uit dien hoek op de tegenovergestelde zyde nedergelaaten dien hoek verdeelen zal.

OPLOSSING.

$$Tang.\ \tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\text{verschil}\\ \text{of}\\ \text{som}\end{matrix}\right\}\ \text{der deelen van den hoek.}$$

$$= cot.\ \tfrac{1}{2}\ \text{gegev. hoek} \times \frac{\text{verschil der geg. zyden.}}{\text{som dier zyden.}}$$

CAGNOLI. §. 245.

BEWYS.

$$BC : CD = 1 : cos.\ BCD :$$

$$CD : AC = cos.\ ACD : 1$$

dus $BC : AC = cos.\ ACD : cos.\ BCD$: en

$$BC + AC : BC - AC = cos.\ ACD + cos.\ BCD : cos.\ ACD - cos.\ BCD.$$

$$\frac{BC - AC}{BC + AC} = \frac{cos.\ ACD - cos.\ BCD}{cos.\ ACD + cos.\ BCD}$$

$$= \frac{tang.\ \frac{1}{2}(BCD - ACD)}{cot.\ \frac{1}{2}(ACD + BCD)} : \text{(VIII. 20. Gev. 3.)}$$

dus in Fig. 56.

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(BCD - ACD) = cot.\ \tfrac{1}{2}(ACD + BCD) \times \frac{BC - AC}{BC + AC}$$

$$= cot.\ \tfrac{1}{2}\ \angle\ ACB \times \frac{BC - AC}{BC + AC}.$$

en in Fig. 57.

$$\frac{1}{cot.\ \frac{1}{2}(ACD + BCD)} = \frac{1}{tang.\ \frac{1}{2}(BCD - ACD)} \times \frac{BC - AC}{BC + AC}$$

of

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(ACD + BCD) = cot.\ \tfrac{1}{2}(BCD - ACD) \times \frac{BC - AC}{BC + AC}$$

$$= cot.\ \tfrac{1}{2}\ ACB \times \frac{BC - AC}{BC + AC}.$$

GEVOLG.

Indien $\angle\ ACB$ recht: is $cot.\ \frac{1}{2}\ ACB = 1$

en dus

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(ACD + BCD) = \frac{BC - AC}{BC + AC}.$$

XIV. VOOR-

X. VOORSTEL. Fig. 58.

... op de zyde (AB) van eenen ... worden door eene lyn CF, die ... (ACB) in twee gelyke deelen deelt; ... driehoek de hoeken en de verdeelde ... de zyden kenne en den verdeelden

OPLOSSING.

... der stukken =

$$\frac{\text{verdeelde zyde} \times \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{verſch. aangr. hoeken}}{\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ſom van die hoeken}}:$$

... der ſtukken =

$$\frac{\text{verdeelde zyde} \times \text{verſchil der andere zyden}}{\text{ſom van die andere zyden.}}$$

...OLI. §. 244.

BEWYS.

$BF : CF = \textit{ſin.}\ \angle BCF : \textit{ſin.}\ \angle B:$

$CF : AF = \textit{ſin.}\ \angle A : \textit{ſin.}\ \angle ACF$ of $\textit{ſin.}\ \angle BCF$

dus

$BF : AF = \textit{ſin.}\ A : \textit{ſin.}\ B:$

$BF + AF : BF - AF = \textit{ſin.}\ A + \textit{ſin.}\ B : \textit{ſin.}\ A - \textit{ſin.}\ B$

en dus

$$BF - AF = \frac{\overline{BF + AF} \times (\textit{ſin.}\ A - \textit{ſin.}\ B)}{\textit{ſin.}\ A + \textit{ſin.}\ B}$$

$$= AB \times \frac{\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A - B)}{\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A + B)}\ \text{(VIII., 20. Gev. 3.)}$$

maar

$AC + BC : BC - AC = \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A + B) : \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A - B)$

(door het V. Voorſt.)

dus

$$\frac{\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A - B)}{\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A + B)} = \frac{BC - AC}{BC + AC}:\ \text{en}$$

$$BF - AF = (AB) \times \frac{BC - AC}{BC + AC}$$

I. GE-

I. GEVOLG.

Indien de driehoek rechthoekig is in C, is
$A + B = 90°$: dus $\frac{1}{2}(A + B) = 45°$: en
$\frac{1}{2}(A - B) = 45° - B$: maar
$BD = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2}(BD - AD)$, en
$AD = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2}(BD - AD)$; en gevolglyk

$$BD : AD = \tfrac{1}{2} AB \left(1 + \frac{tang. \frac{1}{2}(A - B)}{tang. \frac{1}{2}(A + B)}\right) : \tfrac{1}{2} AB \times \left(1 - \frac{tang. \frac{1}{2}(A - B)}{tang. \frac{1}{2}(A + B)}\right)$$

$$= tang. \tfrac{1}{2}(A + B) + tang. \tfrac{1}{2}(A - B) : tang. \tfrac{1}{2}(A + B) - tang. \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$= tang. 45° + tang. (45° - B) : tang. 45° - tang. (45° - B)$$

(VIII. 19. Gev. 3)

$$= 1 + \frac{1 - tang. B}{1 + tang. B} : 1 - \frac{1 - tang. B}{1 + tang. B}$$

$$= 1 + tang. B + 1 - tang. B : 1 + tang. B - 1 + tang B$$

$$= 2 : 2\, tang. B = 1 : tang. B.$$

CAGNOLI. §. 222.

II. GEVOLG.

Indien de driehoek gelykbeenig is: namelyk zo $AC = BC$: is $BD - AD = 0$ of $BD = AD$ het geen men reeds van elders weet: namelyk uit I., 11.

XV. VOORSTEL. Fig. 58.

Indien twee zyden (AC, BC,) en de hoek tusschen dezelven begreepen, gegeeven zyn, en die hoek door eene lyn, welke de derde zyde in twee gelyke deelen snydt, verdeeld wordt, de stukken van dien hoek te vinden.

OPLOSSING.

Tang. $\frac{1}{2}$ versch. der stukken van den hoek =

$$tang. \tfrac{1}{2} \text{ geg. hoek} \times \frac{\text{verschil der geg. zyden}}{\text{som der geg. zyden.}}$$

CAGNOLI. §. 246.

XIV. VOORSTEL. Fig. 58.

Te vinden de stukken welke op de zyde (AB) van eenen driehoek (ACB) gemaakt worden door eene lyn CF, die den overgestelden hoek (ACB) in twee gelyke deelen deelt; het zy men in dien driehoek de hoeken en de verdeelde zyde AB, het zy men de zyden kenne en den verdeelden hoek.

OPLOSSING.

I. Versch. der stukken =

$$\frac{\text{verdeelde zyde} \times \textit{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{versch. aangr. hoeken}}{\textit{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{som van die hoeken}}:$$

II. Versch. der stukken =

$$\frac{\text{verdeelde zyde} \times \text{verschil der andere zyden}}{\text{som van die andere zyden.}}$$

CAGNOLI. §. 244.

BEWYS.

$BD : CF = \textit{sin.}\ \angle\ BCF : \textit{sin.}\ \angle\ B :$

$CF : AF = \textit{sin.}\ \angle\ A : \textit{sin.}\ \angle\ ACF$ of $\textit{sin.}\ \angle\ BCF$

dus

$BF : AF = \textit{sin.}\ A : \textit{sin.}\ B :$

$BF + AF : BF - AF = \textit{sin.}\ A + \textit{sin.}\ B : \textit{sin.}\ A - \textit{sin.}\ B$

en dus

$$BF - AF = \frac{\overline{BF + AF} \times (\textit{sin.}\ A - \textit{sin.}\ B)}{\textit{sin.}\ A + \textit{sin.}\ B.}$$

$$= AB \times \frac{\textit{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A - B)}{\textit{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A + B)}\ \text{(VIII., 20. Gev. 3.)}$$

maar

$AC + BC : BC - AC = \textit{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A + B) : \textit{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A - B)$

(door het V. Voorst.)

dus

$$\frac{\textit{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A - B)}{\textit{tang.}\,\tfrac{1}{2}(A + B)} = \frac{BC - AC}{BC + AB} : \text{en}$$

$$BF - AF = (AB) \times \frac{BC - AC}{BC + AC.}$$

I. GE-

I. GEVOLG.

Indien de driehoek rechthoekig is in C, is
$A + B = 90°$: dus $\frac{1}{2}(A + B) = 45°$: en
$\frac{1}{2}(A - B) = 45° - B$: maar
$BD = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2}(BD - AD)$, en
$AD = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2}(BD - AD)$; en gevolglyk

$$BD : AD = \frac{1}{2} AB \left(1 + \frac{tang. \frac{1}{2}(A - B)}{tang. \frac{1}{2}(A + B)}\right) : \frac{1}{2} AB \times \left(1 - \frac{tang. \frac{1}{2}(A - B)}{tang. \frac{1}{2}(A + B)}\right)$$

$$= tang. \tfrac{1}{2}(A + B) + tang. \tfrac{1}{2}(A - B) : tang. \tfrac{1}{2}(A + B) - tang. \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$= tang. 45° + tang. (45° - B) : tang. 45° - tang. (45° - B)$$

(VIII. 19. Gev. 3)

$$= 1 + \frac{1 - tang. B}{1 + tang. B} : 1 - \frac{1 - tang. B}{1 + tang. B}$$

$$= 1 + tang. B + 1 - tang. B : 1 + tang. B - 1 + tang B$$

$$= 2 : 2\, tang. B = 1 : tang. B.$$

CAGNOLI. §. 222.

II. GEVOLG.

Indien de driehoek gelykbeenig is: namelyk zo $AC = BC$: is $BD - AD = 0$ of $BD = AD$ het geen men reeds van elders weet: namelyk uit I., 11.

XV. VOORSTEL. Fig. 58.

Indien twee zyden (AC, BC,) en de hoek tusſchen dezelven begreepen, gegeeven zyn, en die hoek door eene lyn, welke de derde zyde in twee gelyke deelen ſnydt, verdeeld wordt, de ſtukken van dien hoek te vinden.

OPLOSSING.

Tang. $\frac{1}{2}$ verſch. der ſtukken van den hoek =

tang. $\frac{1}{2}$ geg. hoek $\times \dfrac{\text{verſchil der geg. zyden}}{\text{ſom der geg. zyden.}}$

CAGNOLI. §. 246.

BEWYS.

$$AF : CF = \textit{sin.}\ \angle ACF : \textit{sin.}\ A :$$
$$BF \text{ of } (AF) : CF = \textit{sin.}\ \angle FCB : \textit{sin.}\ \angle B :$$

en dus

$$\textit{sin.}\ ACF : \textit{sin.}\ FCB = \textit{sin.}\ A : \textit{sin.}\ B = CB : AC:$$

en dus

$$CB + AC : CB - AC = \textit{sin.}\ ACF + \textit{sin.}\ FCB : \textit{sin.}\ ACF - \textit{sin.}\ FCB$$

en

$$\frac{CB - AC}{CB + AC} = \frac{\textit{sin.}\ ACF - \textit{sin.}\ FCB}{\textit{sin.}\ ACF + \textit{sin.}\ FCB} =$$
$$= \frac{\textit{tang.}\ \frac{1}{2}(ACF - FCB)}{\textit{tang.}\ \frac{1}{2}(ACF + FCB)}.\ \text{(VIII., 20. Gev. 3.)}$$

dus

$$\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}(ACF - FCB) = \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2} ACB \times \frac{CB - AC}{CB + AC}$$

TIENDE BOEK,

OVER DE LIGGING EN SNYDING DER VLAKKEN.

BEPAALINGEN.

I. Fig. 94.

Eene rechte lyn (FE) ſtaat loodrecht op een vlak (RS) wanneer zy loodrecht ſtaat op alle de lynen (AB, DC,) die in het gemelde vlak liggen en elkander ſnyden in het ſtip daar de lyn FE het vlak ontmoet.

EUCL. XI. d. 3. — St. p. 336. def. 10. —

AANMERKING. Men houde hier beſtendig de 5de Bepaaling van het I. Boek in het oog: uit welke het klaarblykelyk volgt dat eene rechte lyn geheel in één en het zelfde vlak ligt: hoewel anderen zulks opzetlyk beweezen hebben.

EUCL. XI. pr. 1. — St. p 332. pr. 1.

II. Fig. 95. en 96.

Wanneer een vlak (AV) op een ander vlak (PQ) ſtaat, of hetzelve ſnydt, wordt de lyn (UV) die aan beide de vlakken gemeen is, de *gemeene ſneede* van die vlakken genoemd.

AANMERKING. Deeze Bepaaling vooronderſtelt dat de *gemeene ſneede* eene rechte lyn is: het geen wederom klaarblykelyk uit de bepaaling van een vlak volgt: anderen hebben dit echter beweezen.

EUCL. XI. 3. — St. p. 333. pr. 2.

III. Fig. 95.

Een vlak (AV) ſtaat loodrecht op een ander vlak (PQ) wanneer de lynen (EF, DG) die in een der vlakken lig-

 gen-

AF : CF = ... UV) loodrecht ſtaan,
BF of (AF ... andere vlak (AV) ſtaan.
... p. 339. def. 13.
... Fig. 97.

Ju. ACF : ...

CB + AC: ... rechte lyn (FC) op een vlak ... hoek (FCE) welke die lyn (FC) ... (CE), die in het gemelde vlak ... (C) der gegeeven lyn getogen wordt ... dat de loodlyn (FE) uit het andere ... gegeeven lyn nedergelaaten het vlak

$\frac{CB-AC}{CB+AC}$.

... def. 5. — St. p. 337. def. 11.

V. Fig. 96.

tans ... van een vlak (AV) op een ander vlak ... ſcherpe hoek (BEF,) welke gevormd ... twee lynen (BE, EF) uit het *zelfde* ... de gemeene ſneede (UV) in ieder *vlak* ... op die ſneede opgericht.
... XI. Bep. 6. — St. p. 338. Bep. 12.

VI.

...om worden vlakken gezegd *gelykelyk* op andere ...ken te hellen, wanneer zy onderling *gelyke* ...ingen hebben: en *evenwydige* vlakken worden die ...oemd welke op een derde vlak gelykelyk hellen, dat is, met eene en dezelfde lyn, die in dat derde vlak loodrecht op de beide gemeene ſneeden ſtaat, gelyke hoeken naar den zelfden kant maaken.

AANMERKING. Anderen zeggen dat twee vlakken onderling evenwydig zyn, indien zy zich nimmer ontmoeten of ſnyden. EUCL. XI. def. 8. — Anderen noemen evenwydige vlakken die welke overal denzelfden afſtand van elkander hebben. — St. p. 345. def. 14.

Zie

ier over het geen wy gezegd hebben van dergelyke bepaalingen in de aanmerking op het VII. Voorſtel; als ook in de aanmerkingen op de VIII. Bepaaling van I. Boek.

I. VOORSTEL. Fig. 98.

Een driehoek ligt altoos in één vlak.

EUCL. XI. 2. — St. p. 335. pr. 3. Gev. 1.

BEWYS. Door de eerſte bepaaling; of rechtſtreeks, of uit het ongerymde: in het laatſte geval onderſtelt men dat het gedeelte ACKI in één vlak, het gedeelte IEK in een ander vlak ligt.

I. GEVOLG.

Wanneer drie ſtippen naar welgevallen gegeeven zyn, kan men altoos onderſtellen dat er een vlak door dezelven gaat: en de ligging van dat vlak is bepaald.

St. p. 333. pr. 1. Gev. 2.

II. GEVOLG.

Twee lynen (AB, DC) die elkander ſnyden, liggen in een en het zelfde vlak.

EUCL. XI. 2. — St. p. 334. pr. 2.

III. GEVOLG.

Men kan altoos een vlak door twee gegeeven lynen laaten gaan; en deszelfs richting is bepaald.

II. VOORSTEL. Fig. 94.

Indien eene rechte lyn (EF) in het ſtip (E), daar twee lynen (AB, DC) zich ſnyden, loodrecht op dezelven ſtaat, ſtaat zy ook loodrecht op alle de lynen die in het vlak liggen dat door de twee gegeeven lynen gaat, en dus ook op dat vlak zelve.

EUCL. XI. 4. — S. p. 337. pr. 4.

BEREIDING. Maak EA = EB, EC = ED:
Trek AD, CB, en door E de lyn PEQ naar willekeur, vervolgens FA, FP, FD, FC, FQ, FB:

BEWYS. Uit I. 8, 9, 12, wordt beweezen dat ∠ PEF = ∠ FEQ, dus = ∟:

I. GEVOLG.

Uit een en het zelfde stip, het zy (F) boven het vlak, het zy (E) in het vlak, kan men maar ééne éénige lyn (FE) trekken, die loodrecht op het vlak is.

II. GEVOLG.

De loodrechte lyn is de kortste van alle de lynen die men uit een stip (F) boven een vlak op het vlak kan laaten vallen.

I. AANMERKING. Fig. 97. Het blykt, dat zo men eene lyn DI naar welgevallen in een vlak trekt, daarop uit een stip F boven het vlak de lyn FC loodrecht laat vallen: verder uit C op DI de loodlyn CE in het vlak trekt, en dan uit F de lyn FE loodrecht op CE; dat dan de lyn FE ook loodrecht op het vlak zyn zal.

EUCL. XI. 11. — St. p. 344. pr. 11.

III. GEVOLG. Fig. 95.

Indien eene lyn BD loodrecht op een vlak staat, staan ook alle de vlakken (zo als AV) welke langs die lyn gaan loodrecht op het zelfde vlak.

EUCL. XI. 18. — St. p. 340. Gev. 7. Bep. 13.

IV. GEVOLG.

Indien men uit een stip B van een vlak AV dat loodrecht op een ander vlak PQ staat eene loodlyn op dat laatstgemelde vlak nederlaat, zal die lyn in de gemeene sneede vallen.

EUCL. XI. 38.

V. GE-

V. GEVOLG. Fig. 99.

Indien twee vlakken CD, AB, die elkander snyden, beiden loodrecht op een derde vlak PQ staan, staat derzelver gemeene snede EF ook loodrecht op dat vlak.

EUCL. XI. 19 — St. p. 341. prop. 6.

III. VOORSTEL. Fig. 100.

Indien eene rechte lyn (FE) loodrecht staat op drie lynen (AE, GE, CE,) in dat stip (E) waar die drie lynen elkander snyden, liggen die lynen in het zelfde vlak.

EUCL. XI. 5 — St. p. 338. Gev. van pr. 4.

BEWYS. Uit het ongerymde door het II Voorstel: stellende byv. dat de lyn EA in een vlak ligt dat van het vlak PQ, waarin de beide andere EG, EC liggen, verschillend is.

IV. VOORSTEL. Fig. 101.

Indien twee rechte lynen (AB, CD) loodrecht op het zelfde vlak (PQ) staan, zyn zy onderling evenwydig. En omgekeerd, indien twee rechte lynen onderling evenwydig zyn, en eene derzelven staat loodrecht op een vlak, is de andere ook loodrecht op dat vlak.

EUCL. XI. 6, 8. —— S. p. 342. pr. 7.

BEREIDING. Men stelt dat door de lynen AB, CD een vlak ACDB gaa, waarvan BD de gemeene snede met PQ is.

BEWYS. Uit het 4. Gev. van het II. Voorstel: en I. Bep. 8. Voor het II. uit het 3. Gev. van het II. Voorstel, en I. Bep. 8.

AANMERKING. Hier uit volgt wederom, dat, indien men (Fig. 101.) uit eenig stip B in een vlak een loodlyn BA op dat vlak wil oprichten, men eerst uit eenig stip C buiten het vlak eene loodlyn CD op het zelve moet laaten

op twee vlakken (PQ, RS,) zullen die vlakken evenwydig aan elkander zyn.

EUCL. XI. 14. —— St. p. 346. pr. 13.

BEREIDING. Men stelle dat 'er door de gegeeven lyn EF, en eenige lyn EG in het vlak, PQ byv., getrokken, een vlak EGHF gaat, waar van de gemeene sneede met RS de lyn FH is.

BEWYS. Uit het 3. Gevolg van het II. Voorstel, en de VI. Bepaling.

I. GEVOLG.

Alle de loodlynen die tusschen twee vlakken, welke onderling evenwydig zyn, getrokken kunnen worden, zyn gelyk. (Door I., 8. stellende HF = GE, en trekkende GF).

AANMRKING. Hier uit worden de reedenen afgeleid der Bepaalingen waarvan wy in de Aanmerking op de VI. Bepaaling gewag gemaakt hebben.

II. GEVOLG.

Indien twee evenwydige vlakken door een derde vlak gesneeden worden, zyn derzelver gemeene sneeden onderling evenwydig.

EUCL. XI. 16.

VIII. VOORSTEL. Fig. 105.

Indien twee rechte lynen (AB, CD) door evenwydige vlakken (HG, LK, NM) gesneeden worden, worden zy in de zelfde reeden gesneeden.

EUCL. XI. 17. —— St. p. 351. pr. 18.

BEWYS. Uit het 2. Gev. van het VII. Voorstel: IV., 2. en III., 10.

ELFDE BOEK,

OVER DE LICHAAMLYKE FIGUUREN DIE DOOR VLAKKE OPPERVLAKTEN BEPAALD ZYN.

I. AFDEELING,

OVER DE PARALLELOPIPEDA, PRISMAS, EN PYRAMIDEN.

EERSTE BEPAALINGEN. (a)

I.

Een *Lichaam*, of *lichaamlyke Figuur*, is eene figuur die in lengte, breedte, en hoogte of diepte uitgestrekt is. Zy wordt dus door oppervlakten bepaald.

EUCL. XI. def. 1. 2. — S. p. 330. def. 1. 2.

II. Fig. 106.

Men noemt eenen *lichaamlyken hoek* eenen hoek, die uit drie of meerder vlakke hoeken (CAB, CAD, DAB) welke in verschillende vlakken liggen, en wier toppen in een stip samenkomen gevormd is.

EUCL. XI. def. 11. — S. p. 352. def. 15.

I. GEVOLG.

De toppen der vlakke hoeken die eenen lichaamlyken hoek uitmaaken komen dus overeen; en een der bei-

(a) De tweede Bepaalingen volgen na het XXIX Voorstel.

beide beenen van ieder' vlakken hoek, is tevens een der beenen van den naastliggenden. AB is gemeen aan de hoeken CAB, en BAD: AD aan de hoeken BAD, en CAD: AC aan de hoeken CAD en BAC. Die beenen worden door sommigen de ribben (*les côtes*), en de driehoeken, die tusschen dezelven begreepen zyn, de *vlakken* of *zyden* van den lichaamlyken hoek genoemd, terwyl het stip waarin zich de toppen der vlakke hoeken vereenigen, de top van denzelven is. Wy zullen die benaamingen van *ribben* en *zyden* behouden.

II. GEVOLG. Fig. 114, 109.

Indien men op eene der ribben van eenen lichaamlyken hoek een stip neemt, en door hetzelve een vlak laat gaan dat de zyden (zo nodig verlengd) van den lichaamlyken hoek snydt, zullen de gemeene sneeden van die zyden en het gemelde vlak op het zelve, eenen veelhoek maaken, van zo veele zyden als er vlakke hoeken zyn die den lichaamlyken hoek uitmaaken; en dus eenen driehoek, vierhoek, vyfhoek, naar maate de gegeeven lichaamlyke hoek uit drie, vier, vyf vlakke hoeken bestaat.

AANMERKING. Hier op komt, naar ons inzien, de 22 prop. van het XI. Boek van EUCLIDES uit: ten minsten voor zo verre het gebruik betreft dat hy daarvan in de 23 propositie maakt: want de voorwaarde die hy opgeeft, dat twee van de drie gegeeven platte hoeken grooter moeten zyn dan de derde, is slechts eene dier voorwaarden welke vereischt worden op dat er uit de drie gegeeven platte hoeken een lichaamlyke hoek gemaakt zoude kunnen worden: de gelykheid der ribben die hy verder vordert, is op dat men zeeker zoude zyn dat 'er door de uiteinden derzelven een vlak zoude kunnen gaan: hetwelk echter alleen doorgaat voor drie hoeken.

III. GEVOLG.

Twee lichaamlyke hoeken zullen dus gelyk zyn, indien,

dien, wanneer de top vooronderfteld wordt met de top overeentekomen, alle de vlakke hoeken, waa uit die lichaamlyke hoeken gevormd zyn, insgelyk overeenkomen: en gevolglyk zyn twee lichaamlyke hoeken gelyk, wanneer zy gevormd worden door vlakke hoeken die gelyk zyn in getal, en boven dien in grootte ieder aan ieder, en eindelyk onderling volgens de zelfde orde geplaatst.

AANMERKING. De vlakken, welke eenen lichaamlyken hoek uitmaaken, kunnen hunne hoeken of allen buitenwaarts, of gedeeltelyk buiten- en gedeeltelyk binnenwaarts gekeerd hebben: welke gevallen men behoorlyk moet onderfcheiden zo als uit de aanmerking op het II Voorfte blyken zal.

III.

Gelykvormige lichaamen zyn die, wier vlakken gelyk in getal, gelykvormig, en gelykelyk geplaatst zyn.

EUCL. XI. def. 9. — S. p. 330. d. 5.

AANMERKING. In gelykvormige lichaamen zyn dan de eveneensgeplaatfte lichaamlyke hoeken gelyk, en de vlakken uit welke deeze gevormd worden, zyn gelykvormig. d. i. de vlakke hoeken zyn in dezelven gelyk, en de zyden om die hoeken zyn evenwydig: waar door deeze bepaaling van gelykvormigheid met de I Bepaaling van het IV Boek overeenkomt.

IV.

De *Inhoud* van eene lichaamlyke figuur is de ruimte welke begreepen is tusfchen de oppervlakten welke de figuur bepaalen: en gevolglyk zyn twee lichaamlyke figuuren gelyk aan elkander, dat is, haare inhouden zyn gelyk, wanneer die ingeflooten ruimten gelyk zyn.

I. AAN-

AANMERKING. Anderen draagen de zaak dus voor. Indien twee lichaamen ieder door vlakken, welke bestendig aan eene hunner oppervlakten evenwydig zyn, gedeeld worden; zullen die lichaamen gelyk zyn, wanneer de vlakken door de zelfde sneede in ieder lichaam gevormd, bestendig gelyk zyn, ieder aan ieder. Zy beschouwen die vlakken, welke door eene dergelyke verdeeling gebooren worden, als zynde de *saamenstellende deelen* uit welke de gegeeven lichaamen gevormd worden. Deeze redeneering komt dan hier op uit: wanneer de samenstellende deelen, welke twee lichaamen uitmaaken, gelyk zyn ieder aan ieder, en evenveel in getal, en op dezelfde wyze geplaatst, zullen die lichaamen gelyk zyn. Dit is buiten twyffel: doch op welke wyze zal men over de gelykheid van die *samenstellende* deelen oordeelen? De schryvers, van welke wy hier spreeken, stellen dat die deelen oneindig *dun* zyn, om dus de lichaamen als uit een *oneindig getal van vlakken samengesteld*, te kunnen beschouwen, het geen geheel en al van de mathematische naauwkeurigheid afwykt, niets dan valsche denkbeelden inboezemt, en dus geheel verworpen moet worden.

S. p. 359. 360.

II. AANMERKING. De Wiskunstenaars letten, in het denkbeeld dat zy zich van lichaamen vormen, alleen op de grootte, het getal, en de plaatsing der oppervlakten, waaruit die lichaamen bestaan, dat is, door welken zy omvat worden; en geenszins op het geen de Natuurkundigen *ondoordringbaarheid* noemen: waarom dan ook de Wiskunstenaars verscheiden lichaamen op het zelfde grondvlak plaatsen, hoewel zulks voor weezenlyke en ondoordringbaare lichaamen onmogelyk is.

V.

Gelyke en gelykvormige lichaamen zyn die, welke door gelykvormige vlakken, gelyk in getal en in grootte, begreepen of omvat worden.

EUCL. XI. def. 10. — St. p. 330. Bep. 4.

VI.

VI. Fig. 107. 117.

Een *parallelopipedum* of *balk* is eene lichaamlyke Figuur, welke omvat of begreepen wordt door zes vlakken, waarvan die, welke tegen over elkander staan, gelyk en evenwydig aan elkander zyn. Het *parallelopipedum* wordt *rechthoekig* (Fig. 107.) genaamd, wanneer die vlakken alle rechthoekig, en dus rechthoekig met elkander veréénigd zyn: *scheefhoekig* (zo als MHABDLKNM Fig. 117.) wanneer die vlakken scheefhoekig, en dus scheefhoekig veréénigd zyn.

EUCL. XI. Bep. 30, volgens sommige uitgaaven. —— St. p. 331. Bep. 5. 6.

I. GEVOLG.

De vlakken, die een *parallelopipedum* uitmaaken, zyn dus *parallelogrammen*, waarvan de tegenoverstaande gelyk zyn: zo als gemaklyk en uit deeze Bepaaling, en uit het XIX. Voorstel van het I. Boek af te leiden is.

EUCL. XI. 24. alwaar beweezen wordt, dat, indien een lichaam uit evenwydige vlakken bestaat, de tegenoverstaande vlakken onderling gelyk, en parallelogrammen zyn: een dergelyk lichaam wordt in de volgende propositiën door EUCLIDES een parallelopipedum genoemd, zonder verdere voorafgaande bepaaling.

I. AANMERKING. Men ziet hieruit hoe men de zes rechthoeken, waaruit een rechthoekig *parallelopipedum* gevormd wordt, op het papier moet stellen, op dat dezelven alleen door omvouwing het *parallelopipedum* zouden uitmaaken: men stelt namelyk (Fig. 192.) vier rechthoekige *parallelogrammen* onder elkander: het eerste en het derde gelyk aan elkander; het tweede en het vierde insgelyks gelyk aan elkander. Verder stelt men aan elke zyde van het tweede een ander, die aan elkander gelyk zyn: dan worden het eerste en derde

twee

twee zyden, het tweede en vierde de onderste en bovenste oppervlakte: waar door het vyfde en zesde of de twee overige zyden van zelven volgen.

Het zelfde heeft plaats voor een *parallelopipedum*, dat niet rechthoekig is: behalven 1° dat dan de *parallelogrammen* N°. 1 en 3, insgelyks N°. 2 en 4, niet alleen onderling gelyk, maar ook gelykvormig zyn moeten: 2° dat dan, zo dra de grootte en gedaante dier *parallelogrammen*, N°. 1 en 3, N°. 2 en 4, bepaald is, zo als ook de stelling van N°. 1 en 3 op het vlak van N°. 2, de *parallelogrammen* N°. 5 en 6 ook bepaald zyn: hunne zyden immers zyn die van N°. 2, en N°. 3, en de hoeken die welke de zyden der *parallelogrammen* N°. 1 en N°. 3 na de omvouwing met het vlak van N°. 2 uitmaaken.

WOLF, g. §. 249. N°. 3 en 6.

II. AANMERKING. Sommige beschouwen een *parallelopipedum* als gevormd door de aan zich zelf evenwydige beweeging van een parallelogram, dat met een' bepaalden hoek op het vlak waar op het zich evenwydig aan zich zelven beweegt, hellende, voorgaat.

WOLF, g. §. 432 en 633.

II. GEVOLG. Fig. 116 en 117.

Men zegt dat een *parallelopipedum* uit drie lynen (AN, NK, NM), gemaakt wordt, wanneer het grondvlak een parallelogram is, uit twee derzelven gemaakt, en de opstaande parallelogrammen ieder uit eene van die twee, en uit de derde gemaakt worden: doch als dan verschillen de *parallelopipeda* uit de zelfde lynen gemaakt, naar maate van de ongelykheid der hoeken van de gemelde parallelogrammen. Gevolgelyk is een *parallelopipedum*, uit drie gegeeven lynen gemaakt, niet van eene bestendige grootte of inhoud, ten zy de grootte der hoeken zo wel van het grondvlak als van de opstaande parallelogrammen bepaald en gegeeven zy. —— Daar nu rechte hoeken alle gelyk aan el-

kan-

kander zyn, volgt het dat een rechthoekig parallelopipedum uit drie gegeeven lynen gemaakt, eene bestendige en gegeeven grootte heeft.

III. GEVOLG. Fig. 107 en 116.

Indien twee *parallelopipeda* onderling gelykvormig zyn, moeten de eveneens geplaatste hoeken der parallelogrammen, uit welke zy bestaan, gelyk, en de drie lynen waar uit zy gevormd worden, evenreedig zyn.

Want door de bepaling moet men hebben:

$$\square AG \backsim \square AK; \square AF \backsim \square AM;$$

en

en $\square HE \backsim \square NL$: en dus ook

$$\left.\begin{array}{l} AH : AN = HG : NK: \\ HG : NK = HF : NM: \\ HF : NM = AH : AN: \end{array}\right\} \text{(IV., 1. Bep.)}$$

dat is

$$AH : HG : HF = AN : NK : NM.$$

En twee rechthoekige *parallelopipeda* zullen gelykvormig zyn, wanneer de drie lynen waaruit zy bestaan evenreedig zyn.

Dit Gevolg komt overeen met EUCL. XI. 27.

VII.

Indien de zes parallelogrammen waar uit een *parallelopipedum* bestaat, vierkanten zyn, en dus onderling aan elkander gelyk; wordt de Figuur een *Cubus* of *Taerling* genoemd.

I. GEVOLG.

Een *Cubus* van of op eene lyn, is dus een *Cubus* waar van de hoogte de gegeeven lyn, en het grondvlak het vierkant op de gegeeven lyn is: een *Cubus* wordt dus uit eene gegeeven lyn, of liever uit drie gelyke lynen rechthoekig, even als een *parallelopipedum*

dum uit drie ongelyke lynen, en ook scheefhoekig, gevormd.

EUCL. XI. def. 25. — St. p. 358. def. 3.

II. GEVOLG.

Alle *Cubi* zyn onderling gelykvormig. (VI. Bep. 3. Gevolg.)

VIII. Fig. 108.

Een *prisma* of *zuil* is een lichaam door verschei-den vlakken omvat of begreepen, van welken 'er twee gelyk, gelykvormig, over elkander gesteld, en aan elkander evenwydig zyn, terwyl de overige allen *parallelogrammen* zyn. De twee eerstgemelden kunnen *bazes* of grondvlakken van het *prisma* of van de *zuil* genoemd worden.

EUCL. XI. def. 13. — St. p. 331. def. 7.

I. GEVOLG.

Naarmaate de grondvlakken, driehoeken, vier-hoeken, vyfhoeken &c. zyn, wordt de *zuil* of het *prisma* driekantig, vierkantig, vyfkantig enz. genoemd. De *zuil* van Fig. 108. is vyfkantig: die van Fig. 124. driekantig: zo als ook ABDFGH in Fig. 107.

II. GEVOLG.

Het *prisma* of de *zuil* is *rechthoekig* of *scheef hoekig*, naar maate de *parallelogrammen*, die de grondvlakken vereenigen, *rechthoekig*, dat is, *rechthoeken*, of *scheef-hoekig* zyn. — Verder, indien het *prisma* of de *zuil* rechthoekig is, en de grondvlakken regelmatige veel-hoeken zyn, kan men de *zuil* regelmatig noemen.

St. p. 331. def. 8.

I. AANMERKING. Men kan dus ook de *Parallelopipeda* of *bal-ken*, en de *Cubi* of *Taerlingen*, als soorten van vierkantige *Zuilen* aanzien.

III. GEVOLG.

De oppervlakte van een *prisma* of *zuil* bestaat,

indien men de grondvlakken niet mede reekent, uit zo veele parallelogrammen, als het grondvlak zyden heeft: en dus, indien het grondvlak eene regelmatige figuur is, is die oppervlakte gelyk aan eenen rechthoek, waarvan de grondlyn de omtrek van het grondvlak is, en de hoogte de hoogte van de *zuil*, of de loodlyn die tusschen de beide grondvlakken staat.

IV. GEVOLG.

Men kan het *prisma* of de *zuil* in zo veele driekantige *zuilen* verdeelen, als het grondvlak in driehoeken verdeeld kan worden: dat is in zo veele driehoeken als 'er zyden in het grondvlak zyn, min twee: zo als fig. 108. GAHBIF: FHBIEK: IBKCDE.

II. AANMERKING. Sommigen beschouwen het *prisma* of de *zuil* als geboren door de evenwydige beweeging van het grondvlak, volgens eene lyn die, of loodrecht, of schuins, op de zyde van het grondvlak staat: als de moet, het spoor, door eene dergelyke beweeging van het grondvlak nagelaaten.

WOLF. *Elem. Math.* g. §. 456.

III. AANMERKING. Wy zullen bestendig voor grondvlakken der zuilen die vlakken aanzien, welke wy in deeze Bepaaling grondvlakken genoemd hebben: doch EUCLIDES neemt dan eens een der parallelogrammen, dan eens een der vlakken welke de parallelogrammen vereenigen voor grondvlak aan; zo als duidelyk uit de 40 propositie van zyn XI. Boek blykt: eene onderscheiding, waarop men wel letten moet om geene feilen te begaan.

V. GEVOLG.

Het blykt uit de III. Bepaaling, dat twee *prismas* gelykvormig zullen zyn, wanneer de grondvlakken gelykvormige veelhoeken zyn, en de opstaande parallelogrammen insgelyks allen gelykvormig zyn: en dus zallen,

len, wat de zyden betreft, de zyden van de grondvlakken evenreedig tot elkander zyn; en de zyden van de opstaande parallelogrammen zullen het insgelyks moeten zyn.

IX. Fig. 109.

Men noemt *Pyramide* of *Naald* eene lichaamelyke Figuur, samengesteld uit driehoeken, waar van de grondlynen het grondvlak van het lichaam uitmaaken, en wier toppen in één stip te saamen komen.

EUCL. XI. def. 12. —— St. p. 332. def. 9.

I. GEVOLG.

'Er zyn derhalven zo veele driehoeken, die de naald of pyramide samenstellen, en derzelver *zyden* genoemd worden, als het grondvlak zyden bezit.

II. GEVOLG.

De *Pyramiden* of *Naalden* zyn dan *driehoekig*, *vierkantig* &c., naar maate het grondvlak een *driehoek*, een *vierkant* enz. is. En eene *veelhoekige* of *veelkantige pyramide*, of *naald*, kan in zo veele driekantige verdeeld worden, als het grondvlak zyden heeft, min twee, zo als A V E B: B V E C: C V E D: in Fig. 109.

St. p. 332. def. 9.

III. GEVOLG.

Eene *Pyramide* of *Naald*, kan *regelmatig* genoemd worden, indien het grondvlak een *regelmatige* veelhoek is, en de driehoeken, die de *zyden* der pyramide zyn, allen gelyke en gelykbeenige (dus ook gelykvormige) driehoeken zyn. Waarom dan ook de loodlyn, die uit den top op het grondvlak wordt nedergelaten, en die in dit geval in het middelpunt van het grondvlak valt, de *as* van de naalde kan genoemd worden.

AANMERKING. Indien men dus op het papier den veelhoek beschryft, die het grondvlak van de naalde zyn moet; en

op ieder der zyden van dien veelhoek den driehoek die de zyde moet zyn van de naald: zal men, door vouwing van het papier, de naald verkrygen.

IV. GEVOLG.

Twee pyramiden zullen dus gelykvormig zyn als de grondvlakken gelykvormig zyn, en de eveneens geplaatste zyden het ook zyn, Waar uit volgt, (door IV., Bep. 1.) dat ook de zyden van de grondvlakken, en de ribben van de zyden der gelykvormige pyramiden onderling evenredig zyn moeten.

X.

Wanneer men een der vlakken, uit welke de lichaamlyke figuur bestaat, voor *grondvlak* aanneemt, noemt men *hoogte* van de figuur de loodlyn die uit den top van de figuur op dat grondvlak nedergelaten *is*: of, zo het meest verheevene vlak van de figuur evenwydig is aan het grondvlak, is de hoogte van de figuur de loodlyn die tusschen die twee evenwydige vlakken begreepen is.

XI.

Alle lichaamlyke figuuren, welke uit verschillende veelhoeken, hoe ook genaamd, samengesteld zyn, worden veelkantige lichaamen (*polyedra*) genoemd.

XII.

Eene lichaamlyke figuur wordt gezegd in eene andere lichaamlyke figuur beschreeven te zyn, als alle derzelver hoeken, of op de hoeken, of op de ribben, of op de zyden van die laatstgemelde figuur rusten.

EUCL. XI. Bep. 31, in sommige uitgaaven van het werk van dien Schryver.

AANMERKING. Wanneer alle de hoeken van de eene Figuur, of op *alle* de zyden, of op *alle* de ribben van de andere Figuur rusten, wordt de eerstgemelde gezegd *volmaaktelyk* in de laatstgemelde beschreeven te zyn: doch wanneer *alle* de hoeken van de eerste slechts, of op *eenige* zyden, of op *eenige* ribben, of in *eenige* hoeken der laatstgemelde rusten, is de inschryving onvolmaakt. Zie verder XXXII. Voorstel, 2. Gevolg.

XIII.

Eene lichaamlyke figuur wordt gezegd om eene andere figuur beschreeven te zyn, wanneer haare zyden, ribben, of hoeken, alle de hoeken van de laatstgemelde figuur raaken.

EUCL. XI. Bep. 32.

I. VOORSTEL. Fig. 114.

Indien een lichaamlyke hoek (A) uit drie vlakke hoeken (BAD, DAC, CAB) bestaat, zyn altoos twee derzelven te saamen grooter dan de derde.

EUCL. XI. 20. — St. p. 353. pr. 19.

BEREIDING. Zy ∠ BAC de grootste der drie: men stelle in het vlak dat langs CA en BA gaat, ∠ BAE = ∠ BAD: AE = AD: men trekke door E, BEC: vervolgens CD, BD.

BEWYS. Men bewyst eerst uit I, 8, dat BD = BE: vervolgens uit I, 15, dat BD + DC > BC: waaruit volgt DC > EC: waaruit door I. 17. door het neemen der som van ∠ DAC en BAD, en van ∠ CAE en BAE het besluit volgt.

II. VOORSTEL. Fig. 114.

Alle de vlakke hoeken welke eenen lichaamlyken hoek uitmaaken zyn kleiner dan vier rechte hoeken.

EUCL. XI. 21. — St. p. 354. pr. 20.

BEREIDING. Men neemt in ieder der zyden AC, AD,

A B, een ſtip C, D, B, zodanig dat door dezelven het vlak C D B gaan kan: hetwelk derhalven met de vlakken langs C A en A D, C A en A B, A B en A D gaande, lichaamlyke hoeken in B, C, D maakt.

BEWYS. Men bewyst eerst uit het eerſte Voorſtel dat de ſom der zes vlakke hoeken (A B C, A B D, A C B, A C D, A D C, A D B) om B, om C, en om D grooter is dan de ſom der drie hoeken van den △ B C D: en dus dan 2 rechte hoeken: (I, 7.) die ſom aftrekkende van de ſom der hoeken in de driehoeken B A C, C A D, D A B, en de 2 rechte hoeken van 6 rechte hoeken die gelyk zyn aan de laatstgemelde ſom (I, 7.) verkrygt men tot beſluit het voorgeſtelde.

I. AANMERKING. Dit Bewys is eigenlyk geſchikt voor eenen lichaamlyken hoek uit drie vlakke hoeken beſtaande; hoewel het zelve op andere meer ſamengeſtelde hoeken kan toegepast worden. Doch het volgende, door CLAVIUS voorgeſteld, is meer algemeen.

In Fig. 100. zyn de hoeken van alle de driehoeken B V C, A V B, enz. die eenen vlakken hoek uitmaaken, en waar van de zyden C B, B A, enz. in één vlak zyn, gelyk aan 2 maal zo veel rechte hoeken, als het grondvlak zyden heeft. Maar alle de hoeken B A E, A B C, enz. van het grondvlak zyn gelyk aan het zelfde getal rechte hoeken, min vier (II, 11.) dus zyn alle de hoeken van de gemelde driehoeken = aan alle de hoeken van het grond vlak, plus vier rechte hoeken.

Dan van alle die hoeken in de gemelde driehoeken zyn de twee, zo als A B V, V B C, die eene gemeene ribbe V B hebben grooter dan de hoek A B C van het grondvlak met welken zy eenen lichaamlyken hoek uitmaaken: (I. Voorſtel.)

Gevolglyk, dit wederzyds aftrekkende, heeft men de hoeken om den top, dat is, die welke den lichaamlyken hoek uitmaaken, te ſaamen kleiner dan vier rechte hoeken.

II. AANMERKING. Dit Voorſtel geldt ſlechts wanneer alle de vlak-

vlakke hoeken die eenen lichaamlyken hoek uitmaaken buitenwaarts gekeerd, of alle uitspringende zyn: maar niet zo eenige derzelver uitspringende, andere inspringende zyn, zo als zulks het eerst is opgemerkt door den Heer LE SAGE *Hist. de l'Acad. de Paris* A°. 1756. p. 77. Wy hebben in het XII. Voorstel van het II. Boek iets dergelyks voor de veelhoeken aangeteekend.

III. VOORSTEL. Fig. 183.

Indien men uit den top (A) van eenen lichaamlyken hoek uit drie vlakke hoeken (BAC, CAD, DAB) bestaande, eene loodlyn (AP) nederlaat op het driehoekig vlak, (BCD), 't welk door de stippen (C, B, D) op ieder der ribben op gelyke afstanden (AC = AD = AB) van den top genomen, gaat; zal die loodlyn AP op het middelpunt vallen van den cirkel, welke om den gemelden driehoek (BAD) beschreeven kan worden.

BEREIDING. Trek uit P de lynen PB, PC, PD: men moet bewyzen dat deeze gelyk zyn, het zy het stip P binnen, het zy het buiten den driehoek BCD valle.

BEWYS. In de driehoeken PAC en DAP is AC = AD, AP = AP, ∠ in P recht: dus (I. 11, Gev. 6.) is PD = PC: insgelyks, in △△ PAC en PAB, is PC = PB: dus PD = PC = PB: en PA het middelpunt van den cirkel om den driehoek beschreeven.

I. GEVOLG.

Dus □ op AP = □ op AC — □ op PC. (II, 7. Gev. 1.)

II. GEVOLG.

Hier uit blykt hoe men uit drie gegeeven vlakke hoeken, waar van er twee kleiner zyn dan de derde, en die te saamen kleiner zyn dan vier rechte, eenen lichaamlyken hoek maaken kan.

Want men neeme AB = AC = AD. Men trekke de

grondlynen BC, CD, BD: en maake uit dezelven eenen driehoek. (III. B. der Werkſtukken, het I. Werkſt.) Men beſchryve om dien driehoek eenen cirkel (V. B. 5 Werkſtuk) waar van P het middelpunt is. Men richte uit P op het vlak BCD eene loodlyn PA. (X. 4: Aanmerking:) men maake PA zodanig dat □ op PA = □ op AC — □ op PC: (B. III, 26 Werkſtuk:) men trekke AB, AC, AD: en de vlakken die langs AB, AD en BD: AB, AC en BC: AC, AD en CD gaan, zullen den gevraagden lichaamlyken hoek uitmaaken.

I. AANMERKING. Dit is het 23 Voorſtel in het XI. B. van EUCLIDES.

II. AANMERKING. Dit Voorſtel gaat niet door voor de lichaamlyke hoeken die uit meer dan drie vlakke hoeken beſtaan: om dat, al zyn de ribben (AV, BV, CV, DV, EV Fig. 109.) gelyk, de ſlippen A, B, C, D, E niet altoos in één vlak zyn: daar in tegendeel drie ſlippen B, C, D, (Fig. 183.) zich altoos in één vlak bevinden. Doch wanneer dit plaats heeft voor den lichaamlyken hoek uit meer dan drie platte hoeken ſamengeſteld, dan heeft dit Voorſtel ook plaats.

IV. VOORSTEL. Fig. 184.

Twee lichaamlyke hoeken (F en A) ieder uit drie vlakke hoeken (GFH, GFI, IFH, en MAD, MAC, CAD) beſtaande, zyn gelyk, indien, wanneer in beiden eene vlakke hoek gelyk is, ($\angle$ GFH = $\angle$ MAD) de ribben die over die gelyke hoeken ſtaan, in beiden, met het vlak van dien hoek de zelfde ſtelling hebben ($\angle$ IFL = $\angle$ CAE): en het vlak dat langs die ribbe loodrecht op het vlak van den gelyken hoek ſtaat, denzelven in beiden in de zelfde reeden verdeelt.

BEREIDING. Zy IL de loodlyn uit I op het vlak FGH nedergelaaten: trek FL en door L de lyn GLH: vervolgens FI, IH.

Zy

Zy CA = FI: CE de loodlyn uit C op het vlak MAD nedergelaaten: trek AE: dus is (X. Bep. 4.) ∠ CAE = ∠ IFL.

Zy MA = GF: trek door M en E de lyn MED: vervolgens MC, CD.

Men moet bewyzen dat ∠ MAC = ∠ GFI en ∠ CAD = ∠ IFH.

BEWYS. In de driehoeken FLI en EAC, is AC = FI: ∠ CAE = ∠ IFL: ∠ FLI = ∠ AEC = L dus 1°. AE = FL: LI = EC: (I, 8.)

verder ∠ GFL: ∠ LFH = ∠ MAE: ∠ EAD. (onderstel) dus (III, 8.)

∠ GFL + ∠ LFH: ∠ MAE + ∠ EAD = ∠ GFL: ∠ MAE = ∠ LFH: ∠ EAD.

of

∠ GFH: ∠ MAD = ∠ GFL: ∠ MAE = ∠ LFH: ∠ EAD

en dus (III, 9.) om dat ∠ GFH = ∠ MAD

is 2°. ∠ GFL = ∠ MAE en ∠ LFH = ∠ EAD.

Dus is in de △△ GFL en MAE,

GF = MA: FL = AE: en ∠ GFL = ∠ MAE (N°. 2.)

dus 3°. ∠ FGL = ∠ AME: en GL = ME. (I, 8.)

4°. Op de zelfde wyze in △△ LFH en EAD is LH = ED.

En dus, in △△ GLI en MEC, is

LI = EC (N°. 1.:) GL = ME (N°. 3.:)

∠ GLI = L = MEC: dus (I. 8.)

5°. MC = GI.

6°. Op de zelfde wyze: IH = CD:

dus is in △△ GFI en MAC, GF = MA: FI = AC (bereid): en GI = MC N°. 6. dus

7°. ∠ GFI = ∠ MAC (I. 12.:) en op de zelfde wyze ∠ IFH = ∠ CAD.

grondlynen BC, CD, BD: en [...]
driehoek. (III. B. der Werkft[...] gegeeven ftip A van eene
befchryve om dien drieho[...] lichaamlyken hoek gelyk aan eenen
ftuk) waar van P het m[...] lynen niets te doen heeft, dan uit
het vlak BCD eene [...] vallen, FL te trekken, vervol
men maake PA zoda[...] FH, MA = GF, AD = FH,
op PC: (B. III, 26[...] AE = FL te maaken: uit E, EC
en de vlakken die [...] MAD te richten: EC gelyk aan LI
AC, AD en CD [...] AC te trekken: de vlakken die langs
hoek uitmaaker[...] langs CA en AD gaan, zullen met het vlak
I. AANMERKIN[...] een lichaamlyken hoek maaken gelyk aan den
EUCLIDES. [...] lichaamlyken hoek F.
II. AANME[...] XI. 26.
haamly[...]
ftaar

II. GEVOLG.

E[...] omgekeerde van dit Voorftel, waar van de waarheid [...] het oog loopt, levert de 35 propofitie van EUCLIDES XI. [...] boek op: namelyk: „indien twee vlakke hoeken, GFH, „ MAD, onderling gelyk zyn, en men uit de toppen F en „ A twee rechte lynen FI, AC, in een ander vlak trekt, „ welke met de zyden der gegeeven hoeken, hoeken maa- „ ken die onderling gelyk zyn: namentlyk ∠ MAC = „ ∠ GFI: ∠ CAD = ∠ IFH: en men uit eenige ftippen „ C en I in die lynen, op de vlakken der gegeevene hoeken „ MAD, GFH loodlynen CE, IL laat vallen, en de ftip- „ pen daar die loodlynen vallen met de toppen dier hoeken „ door lynen (EA, LF) vereenigt; zullen de hoeken EAC, „ LFI, welke die lynen met de gemelde loodlynen maaken, „ onderling gelyk zyn."

V. VOORSTEL. Fig. 107.

Indien men een parallelopipedum (AE) deelt door een vlak dat door de diagonalen der tegenover elkander ftaande parallelogrammen (BD en GF) gaat; zal het zelve in twee gelyke en gelykvormige deelen verdeeld worden.

EUCL.

8.

...9. en het I. Gevolg van de VI. Be-

I. GEVOLG.

deelen waar in het parallelopipedum op ...erdeeld word zyn driehoekige *prismas*, of VIII. Bepaaling.)

II. GEVOLG.

...us is een driehoekig prisma de helft van een parallelopipedum, wiens grondvlak het aangevulde parallelogram van het grondvlak van het prisma is, en wiens zyden de parallelogrammen zyn van het prisma, welke op de zyden van deszelfs grondvlak staan, en de zelfde stelling op het grondvlak hebben.

III. GEVOLG.

Indien men de diagonaal BF van dit vlak BDGF trekt, kan men dezelve als de *diagonaal* van het parallelopipedum aanzien: zo als ook de lyn van den hoek C tot den hoek H of van A tot E getrokken, diagonaal zyn zoude; en het is niet minder klaarblykelyk, dat alle die diagonaalen zich in één stip ontmoeten, en zich aldaar in twee gelyke deelen snyden: gelyk ook, indien men, zo als in Figuur 120, vlakken PVXM, aUTI, KRWY*b* door het midden der tegen over elkander staande zyden liet gaan, de gemeene sneeden dier vlakken en de diagonaalen zich onderling in het gemelde stip in twee gelyke deelen snyden zouden.

EUCL. XI. 39.

VI. VOORSTEL. Fig. 115.

Indien een parallelopipedum (BF), door een vlak (GC) gesneeden wordt dat evenwydig is aan de tegen over elkander staande vlakken (BH, LM) zul-

len

len de deelen (BG, GD) tot elkander ſtaan zo als hunne grondvlakken (IG, GM.)

EUCL. XI. 25.

BEREIDING. Men verlenge de lyn HGF, INM wederzyds: en neeme in dezelven een gelyk getal deelen, ieder gelyk aan HG aan den eenen en ieder gelyk aan GF aan den anderen kant: Men volmaake de ▭▭ PH, UQ enz., FE, Ec enz. zo als ook de lichaamen MH, RQ, FV, Vc enz. welke alle gelyke parallelopipeda zyn zullen (7 en 5 Bepaaling) en allen ſlechts als 't ware de verlenging van het gegeeven parallelopipedum uitmaaken.

BEWYS. Uit het 3. Voorſtel van het III. Boek.

AANMERKING. Het is volſtrekt het *zelfde* bewys als dat van het VI. Voorſtel van het IV. Boek: en men ziet dat beide de Voorſtellen ook van den zelfden aart zyn. Zy hebben het zelfde onderwerp, doch het eene dient voor de driehoeken of parallelogrammen, het andere voor de parallelopipeda.

VII. VOORSTEL. Fig. 116. 117.

Parallelopipeda (MB, NE) die op het zelfde grondvlak ſtaan, (KLMN) en de zelfde hoogte hebben, *en dus* tusſchen de zelfde evenwydige vlakken begreepen zyn, zyn gelyk.

EUCL. XI. 29. 30. — S. p. 364. pr. 2.

I. GEVAL. Fig. 116. Wanneer de parallelogrammen AHMN en NIFM, zo als ook de parallelogrammen BDLK en KCEL van de beide parallelopipeda in dezelfde vlakken ſtaan: en alleen de parallelogrammen ICKN en ABKN, EFLM en HDLM in verſchillende vlakken zyn.

BEWYS. Men bewyst eerst dat het prisma ABCINK en het prisma HDEFML gelyk zyn, om dat zy uit gelyke en op dezelfde wyze geplaatſte vlakken beſtaan: het geen uit II, 1 beweezen wordt: en dan wordt het Voorſtel op gemaakt met van die gelyke prismas een gemeen ſtuk H

CIO

CIOP afteneemen, en er een gemeen ſtuk LMNKPO by te voegen.

II. GEVAL. Fig. 117. Wanneer niet alleen de ▭▭ ICKN en FELM in andere vlakken ſtaan dan de ▭▭ ABKN en HDLM, maar ook de ▭▭ NIFM en KCEL in andere vlakken ſtaan dan de ▭▭ AHMN en BDLK: zo dat het parallelopipedum NE ten opzichte van het parallelopipedium MB, aan beide kanten helt.

BEREIDING. Men verlengt de lynen EC, FI, AB, HD, zo dat zy zich in P, Q, R, O ſnyden: waar door een parallelopipedum PQRLMON gebooren wordt, dat met betrekking zo wel tot het parallelopipedum MB, als tot het parallelopipedum NE, in het eerſte geval ſtaat.

BEWYS. Uit het eerſte geval.

I. AANMERKING. De reeden van de gevolgtrekking *en dus* in het Voorſtel vermeld, blykt uit X, 7. het I. Gevolg en X. Bepaaling van dit Boek.

II. AANMERKING. Men ziet dat het bewys van het eerſte geval juist het zelfde is en op de zelfde gronden ſteunt als dat van het I. Voorſtel van het II. Boek, behalven dat hier van parallelopipeda, daar van parallelogrammen geſprooken wordt.

GEVOLG.

Dus is een ſcheefhoekig parallelopipedum gelyk aan een rechthoekig, dat op het zelfde grondvlak ſtaat, en de zelfde hoogte heeft: en dus zullen in dit parallelopipedum de zyden van de parallelogrammen, welke rechthoekig op het grondvlak ſtaan, gelyk zyn aan de hoogte van dat ſcheefhoekig parallelopipedum: dat is aan de loodlyn die tusſchen het grondvlak en de bovenſte oppervlakte der beide parallelopipeda begreepen is.

VIII. VOORSTEL. Fig. 118.

Parallelopipeda die op gelyke grondvlakken (EG, en

gelyk zyn aan derzelver grondvlakken: en AH, en PN aan derzelver hoogten.

Men neeme op AH, HI = PN: en ftelle dat door I het vlak IKEL evenwydig aan HF en dus aan BD gaat.

BEWYS. Uit het IX. en X. Voorftel en III. 10. en het IV. Axioma.

I. AANMERKING. Het IX. en X. Voorftel zyn byzondere gevallen van dit: doch dit kan niet beweezen worden zonder dat de beide voorgaanden het zyn. Wy hebben reeds te vooren meer dan een dergelyke voorbeelden ontmoet, inzonderheid in het VII. Voorftel van het IV. Boek, dat juist het zelfde is als dit behalven dat daar van parallelogrammen en dus van *grondlynen*, hier van parallelopipeda en dus van *grondvlakken* gefproken wordt.

I. GEVOLG.

Indien verfchillende parallelopipeda gelyk zyn, ftaan derzelver hoogten in omgekeerde reeden van de grondvlakken.

EUCL. XI. 34. — S. p. 367. pr. 6.

II. AANMERKING. EUCLIDES bewyst dit rechtftreeks, byna op de zelfde wyze als de 23. propofitie van zyn VI. Boek, zo als wy het in IV. 7, Aanm. gezegd hebben: hy maakt eene dergelyke bereiding als wy gemaakt hebben: 'er zy dan een parallelopipedum Q, gelyk aan het parallelopipedum AF waar van g het grondvlak, h de hoogte is; en zy in het ander parallelopidum IF, IH = h: dat is
parallelop. IF : Q = HF : g: of
parallelop. IF : parallelop. AF = HF : g: maar
parallelop. IF: parallelop. AF = IM : AM = IH : AH
dus HF : g = IH : AH.

II. GEVOLG.

Indien het grondvlak HF tot het grondvlak NO ftaat zo als $m \times n$: 1 : en indien de hoogte van het

pa-

parallelopipedum AF, *h* maalen de hoogte van het parallelopipedum Z bevat: heeft men parallelopipedum AF: parallelopip. Z $=$ *m* $\times$ *n* $\times$ *h*: 1 en dus (III, 9) indien men het parallelopipedum Z voor de *eenheid* aanneemt, of voor de gemeene maat, is het getal, dat den inhoud van het parallelopipedum AF uitdrukt, gelyk aan *m* $\times$ *n* $\times$ *h*: dat is, het parallelopipedum AF zal zo veele parallelopipeda gelyk aan Z bevatten, als er eenheeden zyn in het getal *m* $\times$ *n* $\times$ *h*

Men neemt doorgaans tot parallelopipedum Z, dat tot *maat* dient, of voor *eenheid* gebruikt wordt, niet alleen een rechthoekig parallelopipedum, waar van de reeden uit het gevolg van het VIII. Voorstel blykt; maar zodanig een, waarin tevens de zyden van het grondvlak onderling gelyk zyn, dat is, welks grondvlak een vierkant is, waarvan de reeden uit het 7de Gevolg van IV, 7, genoegzaam blykt; en welks hoogte gelyk is aan de zyde van het grondvlak: dat is, men neemt voor de maat van alle parallelopipeda, voor de *eenheid* om derzelver lichaamlyken inhoud te meeten, een' *Cubus* waarvan de zyde die *eenheid* is welke tot het meeten der zyden AH, HG, GF gebruikt wordt: byv. één *duim*, één *voet*, ééne *roede* enz. en men noemt dien *Cubus* de *Cubieke-eenheid*, om dezelve te onderscheiden zo wel van de *lengte-eenheid* die ter meeting van afstanden of lengten dient, als van de *vierkante-éénheid* die ter meeting van vlakke figuuren gebruikt wordt. Dus, indien het parallelopipedum AF 10 voeten bedraagt, zal dit getal 10 *Cubieke* voeten aanduiden: dat is, dat het gelyk is aan 10 *Cubi* wier zyden ieder éénen voet bedraagen.

III. GEVOLG.

Hier uit volgt dat enkele en Cubieke éénheden van verschillende benaaming tot elkander staan als het getal onderdeelen, die de enkele éénheid bevat, tot den *Cubus* of de derde magt van dat getal: dus behelst *één voet* 12 duimen, *één vierkante* voet 12 maal 12 of 144 *vierkante* duimen, en één *cubieke voet*, 12 maal 12 maal 12, of 1728 Cu*bieke* duimen. Dit is het geen EUCLIDES in de 12. propositie van zyn VIII. Boek bewyst: dat namelyk een *Cubiek* getal tot een *Cubiek getal* staat in de driedubbele reeden der zyden.

II. AANMERKING. Men ziet hieruit, hoe men met EUCLIDES (VII. bep. 17.) het product van drie getalen een *lichaamlyk getal* (*numerus solidus*) noemen kan, waar van de getalen die hetzelve voortbrengen de *zyden* zyn: dat lichaamlyke getalen in de famengestelde reeden staan hunner wortelen: en dat *gelykvormige lichaamlyke getalen* zodanige zyn wier wortels evenreedig zyn.

EUCL. VII. bep. 21.

IV. GEVOLG.

Uit het tweede Gevolg blykt, hoe en in welken zin men zeggen kan;

1°. Dat de vermenigvuldiging van drie lynen het rechthoekig parallelopipedum op dezelven gemaakt uitdrukt; en gevolglyk hoe eene reeden uit drie reedens famengesteld door het rechthoekig parallelopipedum van die lynen, welke de enkele reedens uitdrukken, en eene driedubbele reeden door den cubus op eene lyn, aangeweezen worden, en daarmeede overeenkomen.

2°. Dat de inhoud van een parallelopipedum uitgedrukt kan worden door het product van het grondvlak vermenigvuldigd door de hoogte, en dat dit over-

overeenkomt met het Gevolg van ons VIII. Voorstel.

En insgelyks dat de inhoud van een Cubus uitgedrukt kan worden door de derde magt of den Cubus van deszelfs zyde.

Voor het overige kan men hierop de X. Aanmerking op het VII. Voorstel van het IV. Boek, (bl. 157) toepassen.

V. GEVOLG.

Zo dan het getal eenheden, waar door de inhoud van eenen Cubus uitgedrukt wordt, geen *Cubiek* getal is, is de zyde van dien cubus altoos *onmeetbaar* met betrekking tot de eenheid die de lengte meet.

VI. GEVOLG.

Indien men de inhouden van twee parallelopipeda door I en *i*, de grondvlakken door G en *g*, de hoogten door H en *h* uitdrukt, is ons Voorstel dit

$$I : i = G \times H : g \times h:$$

en dus

1°. Zo het grondvlak onmeetbaar is tot het grondvlak, of de hoogte tot de hoogte, doch niet beiden te gelyk, zullen ook (III. Boek, XI. Bep. 1 Gev.) de inhouden I en *i* onderling onmeetbaar zyn: dat is, geene lichaamlyke ruimte zal derzelver gemeene maat kunnen zyn.

2°. Indien en hoogte en grondlyn van beide de Parallelopipeda onderling onmeetbaar zyn, kan de reeden van de inhouden *I* en i meetbaar zyn.

Byv. indien men in fig. 75. stelt dat □ op AF : □ op BF = 15 : $\sqrt{60}$ zo als wy te vooren IV, 7. IX Gev. N°. 4. op bl. 158. gezegd hebben: en men op die beide vierkanten parallelopipeda stelt waar van de hoogten zyn als $\sqrt{5} : \sqrt{3}$, en dus onderling onmeetbaar, zullen die parallelopida tot elkander staan als $15 \times \sqrt{5} : \sqrt{60} \times \sqrt{3}$, of als $15 \times \sqrt{5} : \sqrt{180}$, of als $15 \times \sqrt{5} : \sqrt{36} \times \sqrt{5}$

 =

= 15 : 6, en dus zyn de parallelopipeda onderling meetbaar.

3°. Cubi zelf kunnen onderling onmeetbaar zyn : en dit heeft altoos plaats wanneer de lynen, op welke zy gesteld worden, onmeetbaar in lengte, doch meetbaar in macht zyn; by voorbeeld, de Cubi, welke op de diagonaal, en op de zyde van een vierkant gemaakt worden, zyn onderling onmeetbaar: doch Cubi zyn onderling meetbaar als zy gesteld worden op lynen die in lengte meetbaar zyn, of die aangeweezen worden door getalen die $\sqrt[3]{}$ genoemd worden van een getal dat geen *Cubiek* getal is, zo als door $\sqrt[3]{2}$, of $\sqrt[3]{3}$: enz.

XII. VOORSTEL.

Gelykvormige Parallelopipeda, zo als ook alle Cubi, staan tot elkander in driedubbele reeden hunner eveneensstaande zyden.

EUCL. XI. 33. — St. p. 369. pr. 7.

BEWYS. Uit het XI. Voorstel, IV, 15, en III, 11, 14.

AANMERKING. Wy hebben in de Aanmerking op de 17de bep. van ons III. Boek gezegd dat die uitdrukking *driedubbele reeden* in den eersten opslag eene andere beteekenis by EUCLIDES schynt te hebben dan by ons: en wy hebben in de Aanmerking op het XIV. Voorstel van dat zelfde boek getoond hoe beide de beteekenissen in de daad overeenkomen. Volgens de beteekenis, door EUCLIDES aan het woord driedubbele reeden gegeeven, moet men bewyzen, dat de beide gegeeven parallelopipeda het eerste en het laatste zyn van vier *geduurig* evenreedige parallelopipeda: en dat boven dien dat eerste en het tweede in dezelfde reeden staan als de eveneensstaande zyden der twee gegeevene.

Men stelle dat gegeeven zyn de twee gelykvormige parallelopipeda 𝔄 en 𝔇: en dat de twee lynen die de parallelogrammen uitmaaken welke de gelykvormige grondvlakken zyn van 𝔄 en 𝔇, uitgedrukt worden door a en a, b en d:

de

en de zyde van het opſtaande parallelogram in ieder door *a* en *d*: men ſtelle twee andere parallelopipeda 𝔅 en ℭ beide gelykhoekig met 𝔄 en dus ook met 𝔇; laaten 𝔞, a, en *d* de ribben zyn van 𝔅; en d, 𝔞, en *d* de ribben van ℭ: dan hebben parallelopipeda 𝔄 en 𝔅 de zelfde hoogte, indien men de parallelogrammen uit 𝔞 en *a*, 𝔞 en *d* voor grondvlakken aanneemt: insgelyks hebben de parallelopipeda 𝔅 en ℭ dezelfde hoogte, indien de parallelogrammen uit 𝔞 en a, en uit 𝔞 en d de grondvlakken zyn: en eindelyk hebben de parallelopipeda ℭ en 𝔇 de zelfde hoogte, zo men de parallelogrammen uit 𝔞 en d en 𝔡 en d voor grondvlakken aanziet: dus is door Voorſtel XI. en IV, 15.

𝔄 : 𝔅 = ▭ uit 𝔞 en *a*: ▭ uit 𝔞 en *d* = *a* : *d*

𝔅 : ℭ = ▭ uit 𝔞 en a: ▭ uit 𝔞 en d = a : d

ℭ : 𝔇 = ▭ uit 𝔞 en d: ▭ 𝔡 en d = 𝔞 : 𝔡

Maar omdat de parallelopipeda 𝔄 en 𝔇 gelykvormig zyn, is (Bep. VI. Gev. 3.) *a* : *d* = a : d = 𝔞 : 𝔡

en dus is ∻ 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇: dus ook (III. 14.)

𝔄 : 𝔇 = $𝔄^3 : 𝔅^3 = a^3 : d^3 = 𝔞^3 : 𝔡^3$: dat beweezen moest worden.

I. GEVOLG.

Dus komt de cubus op eene lyn overeen met het geen men de derde magt van eene lyn noemen kan, dat is, met de derde magt van het getal dat de lengte van die lyn uitdrukt. Zie III. Boek, Bep. 4.: en het 4. Gevolg van het voorgaande Voorſtel.

II. GEVOLG.

Indien vier lynen evenreedig zyn, zullen de gelykvormige parallelopipeda op dezelven gelykvormig geſteld, insgelyks evenreedig zyn, en omgekeerd. (Uit dit Voorſtel en III., 10, Gevolg 1.)

EUCL. XI. 37.

III. GEVOLG.

Uit dit Voorstel, vergeleeken met het 2 en 3de Gevolg van het XI. Voorstel, blykt, in welken zin EUCLIDES heeft kunnen zeggen in de 19de. propositie van zyn VIII. Boek, „ dat gelykvormige lichaamlyke getalen in de driedubbele „ reeden staan hunner eveneensstaande zyden, en prop. 27 „ dat zy staan als een Cubiek getal tot een Cubiek getal."

IV. GEVOLG.

Zo drie lynen geduurig evenreedig zyn, is het parallelopipedum, dat uit die drie lynen gemaakt wordt, gelyk aan het gelykzydig parallelopipedum dat uit de middelste gemaakt wordt, en gelykhoekig is met het eerstgemelde: en dus is ook de Cubus op de middelste lyn gelyk aan het rechthoekig parallelopipedum uit de drie lynen samengesteld.

EUCL. XI. 36. — S. p. 372. pr. 9.

V. GEVOLG.

Indien vier lynen geduurig evenreedig zyn, staan de Cubus op de eerste tot die op de tweede, zo als de eerste lyn tot de laatste: (Uit dit Voorstel en III., 14)

I. AANMERKING. Hier uit blykt in welken zin EUCLIDES heeft kunnen zeggen (VIII. Boek, 19 en 21 prop.) „ dat er „ tusschen twee gelykvormige lichaamlyke getalen twee „ middelevenreedigen vallen: en omgekeerd, dat, indien'er „ tusschen twee getalen twee middelevenreedige vallen, „ die getalen gelykvormige lichaamlyke getalen zyn.

II. AANMERKING. Hier uit volgt verder dat het vermaarde vraagstuk om een' cubus te vinden welke het dubbeld zy van eenen gegeeven cubus, op dit vraagstuk uitkomt, twee middelevenredigen te vinden tusschen twee lynen waar van de tweede het dubbeld is van de eerste: een vraagstuk het welk buiten de paalen van de Meetkunde, in den striktsten zin der ouden genomen, gesteld is. Zie de Aanmerking op het XX. Werkstuk van ons I. Boek.

XIII. VOORSTEL. Fig. 120.

Indien men eene lyn (AG) in twee deelen (AI, IG)

IG) naar willekeur verdeelt, zal de cubus op de geheele lyn gemaakt gelyk zyn aan de som van de cubi van ieder deel, en van het drievoud der parallelopipeda uit het vierkant van ieder deel, en het ander deel gevormd.

Dat is, indien *a* en *b* de deelen van de lyn zyn, is cubus op $\overline{a + b} =$

Cubus op *a* + *Cub.* op *b*: + 3 *parallelopip.* uit □ op *a* en *b*: + 3 *parallelopip.* uit □ op *b* en *a*

BEWYS. Zy AF het vierkant op de lyn AG, en AZ de Cubus. Men neemt GX = GI; en trekke IT en XM. Dan zal het vierkant AF in vier deelen gedeeld zyn, namelyk in

1°. □ HL = het □ op AI:

2°. ▭ AL = ▭ LF = rechth. uit AI en IG:

3°. in □ IX = het □ op IG: Zie II. B. het 2. Voorst.

Indien men dan door IT en MX twee rechthoekige vlakken I*a*UT, XM PV laat gaan, die elkander in QL snyden; wordt de Cubus in vier parallelopipeda verdeeld, welke alle de hoogte van den Cubus hebben, en tot grondvlakken de gemelde vier deelen van het grondvlak.

Eindelyk, indien men AK = AI stelt, en door K een vlak KRW*b* laat gaan, evenwydig aan het grondvlak, dat de gemelde twee loodrechte vlakken in NY en S*s* snydt, wordt ieder van die vier parallelopipeda weder in twee parallelopipeda verdeeld, die ieder het zelfde grondvlak, doch waar van de eene de hoogte AK = AI, de andere de hoogte BK = IG hebben zal: en dus heeft men de acht volgende deelen van den Cubus:

1°. Parallelopipedum MS, uit □ HL, en hoogte NM of AK: dat is Cubus op AI.

2°. Parallelopipedum NU, uit □ HL en hoogte NP of BK = IG: dat is parallelopipedum uit □ AI en hoogte IG.

3°. Parallelopipedum KL uit ▭ AL, en hoogte KA of

 AI;

AI: of uit ▭ KsIA en hoogte IL = IG: dat is uit □ AI en hoogte IG.

4°. Parallelopipedum KQ uit ▭ KO of AL en hoogte BK of IG: of uit □ aQOs en hoogte Ks of AI, dat is uit □ IG en hoogte AI.

5°. Parallelop. OG, uit ▭ IX en hoogte Is = AI of uit □ IG en hoogte AI.

6°. Parallelop. sV, uit □ sY en hoogt sq: dat is Cubus op IG.

7°. Parallelop. LW, uit ▭ TX en hoogte WE: of uit ▭ XW en hoogte LX: dat is uit □ AI en hoogte IG.

8°. Parallelop. OZ, uit ▭ OW en hoogte ZW: of uit ▭ UW en hoogt YW, dat is uit □ op IG en hoogte AI.

Nu de som van alle deeze deelen in de volgende orde neemende N°. 1, N°. 2, 3, 7: N°. 4, 5, 8: en N°. 6. krygt men

Cubus op AG, of op (AI + IG) =

Cub. op AI + 3 parallelop. van □ uit AI en IG + 3 Parallelopip. van □ uit IG en AI + Cub. op IG. of in het algemeen

Cubus op $\overline{a+b}$ = Cub. op a + 3 parallelopip. uit a^2 en b + 3 parallelop. uit b^2 en a + Cub. uit b.

I. GEVOLG.

Indien de lyn in twee gelyke deelen gesneeden is, zal de Cubus uit *acht* gelyke Cubi, ieder op de halve lyn gemaakt, bestaan.

II. GEVOLG.

Daar de derde magt van een getal den inhoud uitdrukt van eenen cubus op de lyn, wier lengte door dat getal aangeduidt wordt, gesteld; en het product van een vierkant getal door een enkel getal den inhoud te kennen geeft van een parallelopipedum gevormd uit een vierkant en eene lyn wiers inhoud en lengte door die getalen aangeduid worden, volgt het

het dat dit Voorstel het middel opgeeft om den *Cubiek-wortel* uit een getal te trekken: want men zal hebben.

$\overline{a+b}^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$: en

$\overline{a+b+c}^3 = (\overline{a+b}+c)^3 = \overline{a+b}^3 + 3(a+b)^2 c$
$+ 3(a+b) c^2 + c^3 =$

$a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2 c + \overline{3a+b}$
$c^2 + c^3$

het geen juist den regel oplevert, dien men in de bewerking volgt.

AANMERKING. Indien men nu den Cubus zelven moest maaken, of alle de deelen waaruit hy bestaan zal aanduiden, zou men hebben:

Cubus uit $(a+b+c) =$
Cub. op a + Cubus op b + Cubus op c
3 paralp. uit a^2 en b + 3 uit a^2 en c
3 —— uit b^2 en a + 3 uit b^2 en c
3 —— uit c^2 en a + 3 uit c^2 en b
6 paralp. uit a, b, en c

XIV. VOORSTEL. Fig. 107.

Een driekantig prisma, of zuil (HABDFG) is de helft van eenig parallelopipedum, dat de zelfde hoogte heeft, en op het parallelogram staat dat het aanvulsel is van het driehoekig grondvlak van dat prisma.

BEWYS. Uit het 2. Gevolg van het V, en uit het VII. Voorstel.

GEVOLG.

Dus is ook een driehoekig prisma gelyk aan een rechthoekig parallelopipedum, dat de zelfde hoogte heeft, en wiens grondvlak een rechthoek is gelyk aan den driehoek, grondvlak van het prisma.

XV. VOORSTEL.

Een prisma, het zy driekantig, het zy veelkantig,

XI. Voorstel, in welken zin men het gezegde van veelen te verstaan hebben dat de inhoud van een prisma gelyk is aan het grondvlak door de hoogte vermenigvuldigd.
St. p. 361. Gevolg.

XVI. VOORSTEL.

Verschillende prisma staan tot elkander in samengestelde reeden van hunne hoogte en grondvlakken.

BEWYS. Uit het Gevolg van het voorgaande Voorstel: en het XI. Voorstel.

I. GEVOLG.

Dus zyn de prismas die de zelfde hoogte en de zelfde of gelyke grondvlakken hebben, gelyk:

II. GEVOLG.

Dus zyn de grondvlakken en hoogten van gelyke prismas in omgekeerde reeden van elkander: en omgekeerd.

III. GEVOLG.

Dus zyn prisma op gelyke grondvlakken staande zo als derzelver hoogten: en die op gelyke hoogten zo als derzelver grondvlakken.

IV. GEVOLG.

Gelykvormige Prismas zyn in driedubbelde reeden hunnen eveneenstaande zyden. (9. bep. 5. Gevolg.)
St. p. 372. pr. 10.

XVII. VOORSTEL.

De oppervlakte van een rechthoekig prisma is, indien men de grondvlakken uitzonderd, gelyk aan eenen rechthoek waarvan de grondlyn de omtrek is van het grondvlak van het prisma, en de hoogte de zyde van de opstaande rechthoeken, waaruit het prisma gevormd is.

BE-

is altoos gelyk aan een rechthoekig parallelopipedum, waar van de hoogte die van het prisma, en het grondvlak een rechthoek is gelyk aan den veelhoek die het grondvlak is van het prisma.

BEWYS. Uit het 4. Gevolg van de IX. bepaaling, en het gevolg van het XIV. Voorstel.

I. AANMERKING. Wy neemen hier het woord *grondvlak* van het prisma in den zin dien wy 'er aan gehecht hebben in de IX. Bepaaling: anders immers zoude dit Voorstel met het 40 van het XI. Boek van EUCLIDES schynen te stryden: het zelve luidt dus:

„Indien twee prismas even hoog zyn en het een eenen „ driehoek, het ander een parallelogram tot grondvlak „ heeft, en het parallelogram het dubbeld is van den drie„ hoek, zyn die prismas gelyk." Want dan stelt men dat in het tweede geval, daar een parallelogram het grondvlak is, de opstaande zyden driehoeken zyn: en dan komt het Voorstel in de daad, hoe wel het in woorden verschilt, met het onze overéén: beide de prismas immer zyn in dat geval de helft van parallelopipeda die *gelyke grondvlakken*, en de zelfde hoogte hebben. WHISTON en CLAVIUS schynen de mindere geschiktheid van de uitdrukking van EUCLIDES gemerkt te hebben: want de eerstgemelde herinnert, in zyne aanmerkingen over deeze plaats van den EUCLIDES van TACQUET, dat deeze beide gegeeven driekantige zuilen de helft zyn van gelyke parallelopipeda door *diagonaalen* verdeeld: doch met dit onderscheid dat de deeling in het eene door de diagonaal van het grondvlak geschied, en niet in het andere: en CLAVIUS merkt aan dat dit voorstel alleen geldt voor prismas waar in twee tegen over elkander gestelde grondvlakken driehoeken zyn.

GEVOLG.

De inhoud van de prismas wordt tot dien van de parallelopipeda gebragt.

II. AANMERKING. Het blykt uit het III. en IV. Gevolg op het

XI.

XI. Voorſtel, in welken zin men het gezegde van veelen te verſtaan hebben dat de inhoud van een prisma gelyk is aan het grondvlak door de hoogte vermenigvuldigd.
St. p. 361. Gevolg.

XVI. VOORSTEL.

Verſchillende prisma ſtaan tot elkander in ſamengeſtelde reeden van hunne hoogte en grondvlakken.

BEWYS. Uit het Gevolg van het voorgaande Voorſtel: en het XI. Voorſtel.

I. GEVOLG.

Dus zyn de prismas die de zelfde hoogte en de zelfde of gelyke grondvlakken hebben, gelyk:

II. GEVOLG.

Dus zyn de grondvlakken en hoogten van gelyke prismas in omgekeerde reeden van elkander: en omgekeerd.

III. GEVOLG.

Dus zyn prisma op gelyke grondvlakken ſtaande zo als derzelver hoogten: en die op gelyke hoogten zo als derzelver grondvlakken.

IV. GEVOLG.

Gelykvormige Prismas zyn in driedubbelde reeden hunnen eveneensſtaande zyden. (9. bep. 5. Gevolg.)
St. p. 372. pr. 10.

XVII. VOORSTEL.

De oppervlakte van een rechthoekig prisma is, indien men de grondvlakken uitzonderd, gelyk aan eenen rechthoek waarvan de grondlyn de omtrek is van het grondvlak van het prisma, en de hoogte de zyde van de opſtaande rechthoeken, waaruit het prisma gevormd is.

BE-

BEWYS. Uit het 3. Gev. van de VIII. Bepaaling: en II., 1. het 3. Gevolg.

XVIII. VOORSTEL. Fig. 121.

Indien men eene pyramide of naald, (CDBAD) door een vlak (GFE) fnydt dat evenwydig is aan het grondvlak: zal de fneede aan het grondvlak gelykvormig zyn, en tot hetzelve ftaan, zo als het vierkant van haaren afftand van den top tot het vierkant van den afftand des grondvlaks.

BEWYS. IV., 1, III. Axioma 5, IV. 4. en IV, 13.

GEVOLG.

Indien men dan twee even hooge pyramiden door het zelfde vlak, dat aan de grondvlakken evenwydig is, fnydt, en dus op den zelfden afftand van de grondvlakken, zullen de fneeden tot elkander ftaan als de grondvlakken zelve.

St. p. 374. pr. 12.

XIX. VOORSTEL. Fig. 121.

Indien men alle de ribben (AB, AC, AD, DB, BC, CD,) van eene driekantige pyramide in twee gelyke deelen fnydt, en vlakken (GFE, FHIE, EKI,) door de tegenovergeftelde ftippen van fnyding laat gaan; zullen deeze de pyramide verdeelen in twee gelyke en gelykvormige driekantige pyramiden, (EFGAF: CKIEK) en in twee gelyke prismas, (GEFHBI: DHFEIK) doch die te famen genomen grooter zyn dan de helft van de geheele pyramide.

EUCL. XII. 3.

BEWYS. VOOR HET I, uit de IV. Bepaaling: VOOR HET II, uit het XV. Voorftel: II, 6. Cor. 1.

AANMERKING. De twee gemelde prisma's zyn te famen niet alleen grooter dan de helft van de gegeeven pyrami-

de,

de, 't welk het eenige is dat EUCLIDES 'er van zegt: maar zy zyn 'er juist de drie vierde gedeelten van: doch dit kan niet beweezen worden, dan na dat het derde Gevolg van het XXV. Voorstel beweezen zal zyn. Zie dus de Aanmerking op dat Gevolg.

XX. VOORSTEL. Fig. 121, 122.

Indien men twee driekantige pyramiden, die de zelfde hoogte hebben, volgens het voorgaande Voorstel ieder in twee prismas (GEH, FED en MNP, QNU) en in twee pyramiden (AGEF, IECK en LNQM, NSTR) deelt: en ieder dier pyramiden wederom op de zelfde wyze: en ieder de pyramiden, welke uit die deeling gebooren worden wederom op de zelfde wyze, en zo voorts, zo ver men wil: zal de som van alle de prismas, door die herhaalde deelingen in eene der gegeeven pyramiden gebooren, staan tot de som van alle de prismas in de andere pyramide, zo als het grondvlak (BCD) van de eerstgemelde, tot het grondvlak (OSU) van de laatstgemelde.

EUCL. XII. 4.

BEWYS. Uit het XVI. Voorstel, 3. Gevolg: IV., 2; III., 12, en *axioma* 4.

XXI. VOORSTEL. Fig. 121.

Indien men eene driekantige pyramide, volgens het voorgaande Voorstel, in prismas en pyramiden verdeelt, zo ver men wil: zal de gegeeven pyramide de limiet zyn van de som van alle de prismas door die herhaalde verdeeling gebooren: dat is, de laatste reeden van de pyramide en de som dier prismas is eene reeden van gelykheid.

BEWYS. Uit het XIX. Voorstel; en het I. en II. Voorstel van het VII. Boek.

XXII. VOOR-

XXII. VOORSTEL. Fig. 121, 122.

Twee driehoekige pyramiden, die even hoog zyn, ſtaan in de zelfde reeden als haare gronvlakken.

EUCL. XII. 5.

BEREIDING. Men verdeele dezelven volgens het XX. Voorſtel.

BEWYS. Daar de gegeeven pyramides even hoog zyn, is het getal van prismas die uit de gemelde verdeeling geboren worden, in beiden het zelfde.

Maar, de prismas, in iedere verdeeling, ſtaan onderling zo als hunne grondvlakken, (XVI. Voorſtel, Gev. 3) en die grondvlakken zyn zo als de grondvlakken der gegeeven pyramiden. (IV., 2.)

Dus ſtaan de prismas, in iedere verdeeling, zo als de grondvlakken der gegeeven pyramiden. (III., Axioma 5.)

Dus ſtaan de ſommen van alle de prismas in iedere pyramide zo als de grondvlakken van die pyramiden. (III, 12.)

Maar, de pyramiden zyn de limieten van die ſommen (XXI. Voorſtel.)

Dus ſtaan de pyramiden onderling in de zelfde reeden als haare grondvlakken. (VII. 6.)

XXIII. VOORSTEL.

Twee verſchillende pyramiden, hoe ook genaamd, die de zelfde hoogte hebben, ſtaan tot elkander zo als haare grondvlakken.

EUCL. XII. 6.

BEREIDING. Men onderſtelle dat die veelkantige pyramiden ieder in driehoekigen verdeeld zyn, volgens het 2 Gev. van de IX. Bepaling.

BEWYS. Uit het XXII. Voorſt. en III, 8. 12. en Axioma 5

XXIV. VOORSTEL. Fig. 124.

Een driekantig prisma kan in drie driekantige gelyke pyramiden verdeeld worden.

EUCL.

FIGUUR. XII. 7. —— S. p. 377. pr. 14.

BEREIDING. Men trekke de diagonalen BF, BD en FC: 1°, dan zullen de driehoeken FBE en EBD met FED de pyramide DFBE maaken.

men laate vervolgens

2°. een vlak gaan langs BF en FC: dit maakt met ABC, ABF en ACF de pyramide BAFC

3°. de driehoeken FBC, FCD, BCD en FBD, maaken de pyramide FBDCB.

BEWYS. De 1. en 2. pyramide zyn onderling gelyk uit het XXII. Voorstel.

De 2. en 3. om dat zy beiden de helft van eene pyramide zyn, die de zelfde hoogte, doch het ▭ ACDF tot grondvlak, en dus een dubbeld grondvlak, zoude hebben.

GEVOLG.

Eene driekantige pyramide is dus het derde gedeelte van een driekantig prisma, dat op het zelfde driehoekige grondvlak, en onder de zelfde hoogte staat.

XXV. VOORSTEL.

Eene pyramide, welke ook haar grondvlak zyn moge, is altoos het derde gedeelte van het prisma dat op het zelfde grondvlak en onder de zelfde hoogte staat.

BEWYS. Uit het 4. Gev. van de IX. Bepaling en het XXIV. Voorstel.

I. GEVOLG.

Hier uit, en uit het XV. Voorstel, blykt, dat men den inhoud van pyramides tot dien van prismas, en daardoor tot dien van een parallelopipedum herleidt. Eene pyramide namelyk is gelyk aan het derde gedeelte van een rechthoekig parallelopipedum, dat de zelfde hoogte heeft, en waar van het grondvlak,

dat

dat een rechthoekig parallelogram is, gelyk is aan den veelhoek die het grondvlak is van de pyramide.

II. GEVOLG.

Hier uit en uit het 4. Gev. van het XI. Voorstel, volgt verder, in welken zin men het gezegde van veelen verstaan moet dat de inhoud van eene pyramide gelyk is aan het grondvlak door het derde gedeelte van de hoogte vermeenigvuldigd.

St. p. 379. pr. 15. — p. 381.

III. GEVOLG.

Verschillende pyramiden staan dus tot elkander in samengestelde reeden van haare grondvlakken en van haare hoogten.

AANMERKING. Wy hebben in de Aanmerking op het XIX. Voorstel gezegd, dat de twee *prismas* waar van in dat Voorstel gesproken wordt, te zamen drie vierde gedeelten van de geheele pyramide uitmaaken: *en in de daad*, de grondvlakken der beide pyramides staan ieder *tot die* van de groote pyramide als 1 : 4 (IV., 14) de hoogten zyn als 1 : 2: dus is ieder kleine pyramide tot de groote als 1 : 8: en beiden te samen zyn zy het vierde gedeelte van de geheele pyramide: dus zyn de twee prismas de drie vierde gedeelten van dezelve.

IV. GEVOLG.

Hier uit volgt 1°. dat, wanneer pyramiden gelyk zyn, haare hoogten in omgekeerde reden staan van haare grondvlakken: en omgekeerd.

EUCL. XII. 9.

V. GEVOLG.

2°. Dat pyramiden die gelyke grondvlakken hebben in de zelfde reeden staan als haare hoogten: en omgekeerd.

VI. GE-

VI. GEVOLG.

En eindelyk dat gelykvormige pyramiden in driedubbele reeden van haare eveneensgeplaatste zyden staan.

EUCL. XII. 8. — S. p. 387. pr. 20., Gev. 2.

VII. GEVOLG.

Uit het eerste Gevolg blykt, dat indien men op het grondvlak van een' cubus eene regelmatige pyramide stelt, die de hoogte van den cubus heeft, en wier top dus op het midden van de bovenste oppervlakte van den cubus komt, die pyramide het derde gedeelte van den Cubus zyn zal.

Indien men verder vier vlakken laat gaan, ieder langs eene ribbe van de pyramide, en de tegenoverstaande loodrechte ribbe van den cubus zullen er vier gelyke en gelykvormige pyramiden geboren worden, die ieder een vierkant, (zyde van den cubus) tot grondvlak, en de halve hoogte van den cubus tot hoogte zullen hebben, en dus ieder de helft van de eerstgemelde en middelste pyramide zyn zullen, en gevolglyk het zesde gedeelte van den cubus.

Dus wordt een cubus in vyf vierkantige pyramiden gedeeld, waarvan 'er vier gelyk en gelykvormig zyn, en de vyfde het dubbeld van iedere der vier overigen is.

VIII. GEVOLG.

Hier uit volgt dat men ook den inhoud van eene geknotte pyramide vindt, door het verschil tusschen de geheele pyramide en het afgeknotte stuk, dat ook eene pyramide is, te neemen.

XXVI. VOORSTEL. Fig. 109.

De oppervlakte van eene *regelmatige* pyramide is, (het grondvlak niet meede gereekend zynde), gelyk aan den inhoud van eenen driehoek, wiens grondlyn gelyk is aan den omtrek van het grondvlak der pyramide, en wiens hoogte de

 lood-

loodlyn is uit den top op de grondlyn van eene der zyden nedergelaaten.

BEWYS. Uit het 1. en 3. Gevolg van de VIII. Bepaling.

XXVII. VOORSTEL. Fig. 123.

Indien men zyde B A van eene pyramide in gelyke deelen *vo*, *n*B, enz. verdeelt, en men op het grondvlak BC*D*, een prisma ſtelt, CDB *mniklin*, dat de hoogte *n*B hebbe, en insgelyks op het bovenſte vlak *nml*, dat door de zyden van de pyramide bepaald is, wederom een nieuw *prisma* van de zelfde hoogte; en op het bovenſte vlak van dat *prisma* wederom een ander*, en zo voorts: is de pyramide de *limiet* van de ſom van alle die prismas: en de uiterſte reeden van de ſom van alle die prismas tot de pyramide is eene reeden van gelykheid.

BEWYS. De overmaat van alle de prismas boven de pyramide is de ſom van alle de prismas CD*mikl*, *qptsru* enz. die al langer hoe kleiner worden, en allen de zelfde hoogte hebben: naar maate dus die ſom *kleiner* is, komt de ſom der prismas nader aan de *pyramide*, en die ſom wordt kleiner naar mate de hoogte *iD* geringer is: dus kan de ſom van alle de prismas aan de pyramide naderen zo veel men wil, en minder van dezelve verſchillen dan eenige eindige grootheid bedraagt: dus is de pyramide de limiet van de ſom van alle de prismas (VII, bep. 1.): dus is de *uiterſte* reeden van beiden eene reeden van gelykheid (VII. 2.)

I. GEVOLG.

Hier uit blykt in welken zin men verſtaan moet het geen ſommigen zeggen, dat eene pyramide uit een *oneindig* aantal van gelyke *oneindig dunne* prismas, en dus uit een oneindig aantal vlakken, die aan het grondvlak evenwydig zyn, gevormd wordt: (het geen anderen ook uit het Gevolg van het XVIII. Voorſtel afleiden:) en hoe ver dergelyke uitdrukkingen van alle mathematiſche naauwkeurigheid ontblootzyn.

* S. p. 375. Gevolg.

II. GE-

II. GEVOLG.

Daar de grondvlakken van alle die prismas in de zelfde reeden staan als de vierkanten der afstanden van den top (XVIII. Voorstel) of als de tweede magten der getalen welke die afstanden uitdrukken (IV, 15, Gev. 1) en dus, indien de deelen vo, nB, gelyk aan elkander en voor *éénheid* genomen worden, van den top af de reeden volgen van de vierkanten der natuurlyke getalen; ziet men, in welken zin men zeggen kan dat de limiet van de som dier vierkanten, of, zo als veelen zich uitdrukken, de *som van alle die vierkanten*, uitgedrukt kan worden door den inhoud van eene pyramide, wiens grondvlak het vierkant van het laatste getal, en de hoogte het getal zelve is, en die dus (Voorstel XXV. 2 Gev.) gelyk is aan het derde gedeelte van het product van het quadraat van dat getal door het getal zelve gemultipliceerd, of van het derde gedeelte van den cubus van het getal.

Zie 's *Gravesande* Natuurkunde §. 486, alwaar dit Voorstel van zeer veel gebruik is.

XXVIII. VOORSTEL. Fig. 185.

De inhoud van alle lichaamen, welke door rechte lynen en vlakken bepaald worden, kan tot den inhoud van een parallelopipedum gebragt worden.

BEWYS. Men kan door vlakken het lichaam of in parallelopipeda, of in prismas, of in geheele of geknotte pyramiden verdeelen, van welke allen men den inhoud afzonderlyk vinden kan: en de som is de gezochte inhoud.

VOORBEELD. Indien het lichaam BADHEFGC tot bazis het trapezium DCBA heeft, en de vlakken EB, DH, HC, GB loodrecht zyn; indien voorts HD = EA, GC = FB, en men de uitdrukkingen in het 4. Gevolg van het XI. Voorstel vermeld, gebruikt, zal de inhoud van het lichaam door deeze grootheid uitgedrukt worden, indien e^2 en d^2 de inhouden van de driehoeken ACB en ACD aanwyzen.

$$\frac{2e^2 \times FB + 2d^2 \times EA + e^2 \times EA + d^2 \times FB}{3}$$

 Want

Want, indien men AK = DI = FB = GC ſtelt, en door FGIK een vlak laat gaan, is dat vlak evenwydig aan DCBA: en de inhoud van het lichaam KIGFBADC is $(e^2 + d^2) \times FB$.

Het bovenſte ſtuk EKIHGF beſtaat uit drie pyramiden: de eene, FKEG, heeft tot bazis den driehoek FGK (= CAB) en tot hoogte de lyn EK: dus is de inhoud $= e^2 \left(\frac{EA - FB}{3}\right)$

Het overige gedeelte van het bovenſte ſtuk is eene vierzydige pyramide HIKEG, die verdeeld kan worden in twee gelyke driekantige, GEIH en GEIK; de laatſte, wanneer men GIK (= CDA) voor grondvlak en EK voor hoogte neemt, is $= d^2 \left(\frac{EA - FB}{3}\right)$: dus de ſom van beiden $= 2\,d^2 \left(\frac{EA - FB}{3}\right)$

de ſom van de drie deelen is derhalven

$$\frac{2\,e^2 \times FB + 2\,d^2 \times EA + e^2 \times EA + d^2 \times FB}{3}$$

MAUDUIT *Mem. preſentés* IV. p. 624.

AANMERKING. Het komt in de Bouwkunde zeer dikwerf te pas den inhoud van dergelyke lichaamen te moeten vinden.

XXXIX. VOORSTEL.

Indien men binnen een veelvlakkig lichaam een ſtip neemt, en van daar lynen naar alle de lichaamlyke hoeken tracht: zullen er zo veele pyramiden gebooren worden, als de figuur vlakken of zyden heeft: en derzelver ſom zal gelyk zyn aan den inhoud van de geheele figuur.

I. AF-

II. AFDEELING.

OVER DE REGELMATIGE LICHAAMLYKE FIGUUREN.

TWEEDE BEPAALINGEN.

XIV. BEPAALING.

Men noemt *regelmatige lichaamen* zodanige, welke uit gelykvormige, gelyke, en eveneensgeplaatste vlakken bestaan.

I. GEVOLG.

In regelmatige lichaamen zyn dus de lichaamlyke hoeken allen gelyk aan elkander: en het middelpunt is dat stip het welk even ver van alle de hoeken afstaat.

II. GEVOLG.

Alle regelmatige lichaamen van de zelfde soort zyn onderling gelykvormig. (III. Bep.)

XV. Fig. 110.

Een *Tetraedrum* of vierzydig lichaam bestaat uit vier gelyke en gelykzydige driehoeken.

EUCL. XI. bep. 26.

XVI. Fig. 111.

Een *Octaedrum* of achtzydig lichaam bestaat uit acht gelyke gelykzydige driehoeken.

EUCL. XI. bep. 27.

XVII. Fig. 113.

Een *Icosaedrum* of twintigzydig lichaam bestaat uit twintig gelyke gelykzydige driehoeken.

EUCL. XI. bep. 29.

XVIII. Fig. 107.

Een *Cubus* of taerling bestaat uit zes vierkanten.
Zie boven bep. 7.

XIX. Fig. 112.

Een *Dodecaedrum* of twaalfzydig lichaam bestaat uit twaalf gelyke regelmatige vyfhoeken.

EUCL. XI. bep. 28.

AANMERKING. Men moet bewyzen dat die figuuren in de daad bestaanbaar zyn, en uit den aart der eenige *moogelyke* lichaamlyke hoeken, welke uit gelyke *vlakke hoeken* gevormd kunnen worden, volgen. Dit is door EUCLIDES niet gedaan: doch hier toe strekt het volgende Voorstel met deszelfs gevolgen.

XXX. VOORSTEL.

Indien een lichaamlyke hoek door vlakke hoeken van gelyke regelmatige veelhoeken gevormd wordt, bestaat dezelve, of uit drie, of uit vier, of uit vyf hoeken van gelykzydige driehoeken: of uit drie hoeken van vierkanten, dat is uit drie rechte hoeken: of uit vyf hoeken van regelmatige vyfhoeken. Geen lichaamlyke hoek kan uit meerder of minder hoeken van de gemelde veelhoeken, of uit hoeken van eenige andere regelmatige veelhoeken bestaan.

BEWYS. Uit het II. Voorstel van dit boek, en II, 11 het 1. Gevolg.

I. GEVOLG.

Er zyn dus maar vyf regelmatige lichaamen mogelyk. Het zyn de vyf bovengemelde, zo als nu blyken zal.

EUCL. XIII, *scholium* op de laatste propositie.

II. GE-

II. GEVOLG. Fig. 110.

Wanneer een lichaamlyke hoek uit drie hoeken van eenen gelykzydigen driehoek bestaat, en men die driehoeken voltooit, en dezelven als de zyden van eene lichaamlyke figuur aanziet, zullen de grondlynen van die drie driehoeken, eenen nieuwen en gelyken gelykzydigen driehoek maaken, die de vierde zyde van het lichaam zal zyn. Dat lichaam zal derhalven bestaan uit vier gelykzydige driehoeken. Het is dus een *tetraedrum*.

Hier uit volgt 1°. dat een *tetraedrum* eene alleszins regelmatige driekantige pyramide is, waarvan de zyden gelyk zyn aan het grondvlak.

2°. Dat de loodlyn uit eenen der toppen op de tegenovergestelde zyde, die dus ten opzichte van dien top het grondvlak is, nedergelaaten, op het middelpunt van dien driehoek (III. Voorstel) valt, en dus op twee derde gedeelten van de lyn, uit eenen der hoeken van dien driehoek loodrecht op de tegenovergestelde zyde van den zelven getrokken (IV, 11, Gevolg 3. en IV. 10.)

3°. Dat, indien men op het papier eenen gelykzydigen driehoek maakt, en wederom eenen op ieder der zyden van deezen, men door vouwing van het papier een *tetraedrum* zal verkrygen, waar van de eerstgemelde driehoek het grondvlak, en de drie andere de zyden zyn zullen.

III. GEVOLG. Fig. 111.

Wanneer een lichaamlyke hoek uit vier hoeken van gelykzydige driehoeken bestaat, en men die vier driehoeken voltooit, zullen derzelver vier grondlynen eene gelykzydige en gelykhoekige figuur, en dus een vierkant, uitmaaken, waarop die vier driehoeken als eene regelmatige pyramide zullen staan: over welke pyramide men op het zelfde grondvlak eene gelyke stellen kan: zo dat dan het geheele lichaam uit acht gelykzydige driehoeken bestaan zal: het is een *Octaedrum*.

Hier uit volgt, dat de lynen, die uit iederen hoek naar den tegenoverstaanden getrokken worden, *diagonaalen* of *a-*

sen van de figuur zyn, en elkander onderling in twee gelyke deelen snyden in één stip dat dus het *middelpunt* van de figuur is.

Voorts, indien men acht gelykzydige en gelyke driehoeken stelt, zo als in fig. 190, zal men door vouwing van het papier een *Octaedrum* verkrygen: namelyk *a*, *b*, *c*, *d*, zullen de eene helft waar van *i* de top is maaken: en *e*, *f*, *g*, *h*, de andere helft, waar van *k* de top is.

IV. GEVOLG. Fig. 113.

Wanneer een lichaamlyke hoek G uit vyf hoeken van gelyke gelykzydige driehoeken bestaat, zullen *de vyf grondlynen* FH, HI, ID, DE, EF van die vyf voltooide driehoeken FGH, HGI, IGD, DGE, EGF eenen regelmatigen vyfhoek FHIDE uitmaaken. Op ieder dier lynen ID, IH, HF enz. zal men wederom eenen gelyken gelykzydigen driehoek ICD, BIH, AHF, enz. kunnen stellen: en dan tusschen de twee naastliggende, CID en BIH, BIH en AHF, enz. wederom eenen BIC, AHB, die de lichaamlyke hoeken I, en H, enz. ieder uit vyf hoeken bestaande zullen voltooien. De grondlynen CB, AB enz. van die vyf driehoeken maaken wederom eenen regelmatigen vyfhoek: op wiens zyden men wederom vyf gelyke gelykzydige driehoeken stellen kan, wier toppen eenen lichaamlyken hoek zullen uitmaaken, en de geheele figuur sluiten. De Figuur bestaat dan uit twintig gelykzydige driehoeken, en *is een Icosaedrum.*

Hier uit volgt dat de lynen die van iederen hoek naar zynen tegenovergestelden getrokken worden, en die dus *diagonaalen* of *assen* en aan elkander gelyk zyn, zich onderling in twee gelyke deelen snyden in één stip dat het middelpunt van de figuur is.

Ook blykt het, indien men twintig gelykzydige en gelyke driehoeken op het papier teekent, zo als in fig. 191. dat dezelven door vouwing van het papier een *icosaedrum* zullen uitmaaken: namelyk, de vyf *b*, *c*, *f*, *e*, *d* zullen om het

stip

ſtip *x* als top eenen lichaamlyken hoek maaken: insgelyks *p*, *q*, *r*, *s*, *u* om het ſtip *y*: door welker vereeniging men het bovenſte en onderſte gedeelte verkrygt: daar de overige tien driehoeken het middelſte gedeelte zullen maaken.

V. GEVOLG. Fig. 107.

Indien een lichaamlyke hoek D uit drie rechte hoeken ADC, CDF, en ADF, beſtaat, en men voltooit de vierkanten ABCD, CDFE, ADFH: zal men door het vierkant CBGE op BC en CE en ABGH op BG en AB te voltooien, de drie vierkanten CBGE, ABGH, en GEFH, verkrygen, die eene lichaamlyke figuur uit zes vierkanten beſtaande zullen uitmaaken, en dus eenen *Cubus* of *Taerling*.

Hier uit blykt dat de zes gelyke vierkanten, waar uit een *Cubus* gemaakt wordt, op de zelfde wyze als de rechthoeken in fig. 192. geſteld moeten worden.

VI. GEVOLG. Fig. 112.

Wanneer een lichaamlyke hoek M uit drie hoeken van gelyke regelmatige vyfhoeken beſtaat, en men de vyfhoeken MLABC, MCDEN, MLPON voltooit, en op de zyden LP, PO, NO, van eenen dier vyfhoeken wederom gelyke vyfhoeken AKIPL, PIHGO, OGFEN, ſtelt, zullen deze, met de reeds gegeeven drie te ſamen, zes vyfhoeken uitmaken, onderling met vyf lichaamlyke hoeken vereenigd; doch men ziet duidelyk dat BC en CD, DE en EF, FG en GH, HI en IK, KA en AB, ieder twee aan twee wederom twee zyden GH en HI zullen zyn van vyf nieuwe vyfhoeken, die met de reeds gegeevene, MLABC en MCDEN MCDEN en OGFEN, enz. twee aan twee vyf lichaamlyke hoeken ieder uit drie vlakke hoeken van regelmatige vyfhoeken beſtaande zullen uitmaaken: en dat de vyf zyden van die vyf vyfhoeken, welke aan elkander grenzen, vlak over MLPON eenen vyfhoek zullen uitmaaken, en de figuur ſluiten, even als de vyfhoek MLPON gevormd door de vyf zyden LM, MN, NO, OP, PL van de vyfhoeken MLABC,

 MCDEN

MCDEN enz. *De figuur zal* dan uit twaalf gelyke regelmatige vyfhoeken *bestaan, en is* een *dodecaedrum.*

Hier uit *volgt, dat de lynen*, die van iederen hoek naar zynen *tegenovergestelden* getrokken worden en *diagonaalen* of *assen zyn, zich* allen in twee gelyke deelen *in één stip snyden: welk stip* het *middelpunt* der figuur is.

Men ziet verder, dat indien men op alle de zyden van *eenen* regelmatigen vyfhoek, gelyke vyfhoeken stelt: deeze*ges* door het vouwen van het papier de helft van een *dodecaedrum* zullen uitmaaken: en dat men, indien men een anderdergelyk stel maakt, de andere helft op gelyke wyze zal bekomen: zo dat zy beiden te samen het *geheele dodecaedrum* vol maaken: men kan, tot meer gemak, wanneer men het eerste stel gemaakt heeft, een' der uiterlyke vyfhoeken van het tweede op de zyde van een' der uiterlyke vyfhoeken van het eerste stel plaatsen.

XXXI. VOORSTEL.

Ieder regelmatig lichaam heeft zo veel *ribben*, als het product van het halve getal van vlakken *die het lichaam* uitmaken, door het getal der zyden van die vlakken gemultipliceerd, eenheden bevat: en zo veele lichaamlyke hoeken als 'er eenheden zyn in het quotient van het product der vlakken en van het getal der zyden in ieder vlak, door het getal der hoeken die iederen lichaamlyken hoek uitmaaken gedivideerd.

EUCL. XV. 6.

I. BEWYS. Het getal van zyden in alle de veelhoeken die het lichaam uitmaken, is het product van het getal zyden in iederen veelhoek, door het getal van veelhoeken of vlakken gemultipliceerd. Doch de vereeniging van twee naastliggende zyden maakt eene ribbe, en dus bestaat het getal van ribben uit het gemelde halve product.

II. 'Er zyn zo veel vlakke hoeken als 'er eenheden zyn in het product van het getal vlakken die de *lichaamlyke* figuur uitmaaken, door het getal der hoeken in ieder vlak

of

of veelhoek gemultipliceerd. Doch ieder lichaamlyke hoek van de figuur bestaat uit zo veel vlakke hoeken, als de aart van de figuur vereischt: waarom men het gemelde product door dat getal moet divideeren, om het getal van hoeken te verkrygen.

GEVOLG.

Dus bestaat een *Tetraedrum* uit zes ribben, vier hoeken en vier zyden.

Een *Octaedrum* uit twaalf ribben, zes hoeken, en acht zyden.

Een *Icosaedrum* uit dertig ribben, twaalf hoeken, en twintig zyden.

Een *Cubus* uit twaalf ribben, acht hoeken, en zes zyden.

Een *Dodecaedrum* uit dertig ribben, twintig hoeken, en twaalf zyden.

XXXII. VOORSTEL.

Geen lichamelyke figuur kan in eene andere beschreeven worden, ten zy het getal of van ribben, of van zyden, of van hoeken in de laatstgemelde, ten minsten even groot zy als het getal der hoeken in de eerstgemelde.

BEWYS. Uit de XII. Bepaling.

I. GEVOLG.

Dus kunnen noch de *cubus*, noch het *icosaedrum*, noch het *dodecaedrum*, in een *tetraedrum* beschreeven worden: noch het *dodecaedrum* in het *octaedrum*, of in den *cubus*.

II. GEVOLG.

De overige lichaamen kunnen in elkander beschreeven worden, doch niet allen even volmaaktelyk: *volmaaktelyk* noemt men het, wanneer alle de hoeken, van de ingeschreeven figuur alle de zyden of ribben van de andere raaken: *minder volmaaktelyk*, wanneer eenige van de ribben der laatstgemelde niet geraakt worden, om dat zy grooter in getal zyn.

J. AANMERKING. In het vyftiende Boek der Grondbeginselen van EUCLIDES, doch het welk, even als het XIV, hoogst waarschynlyk niet van EUCLIDES zelven, maar van HYPSICLES den *Alexandryner* is, wordt alleen over de *volmaakte* inschryving gehandeld, en te recht: deeze alleen kan dien naam waarlyk dragen, en voldoet aan de bepaaling. Een der uitgeeveren van EUCLIDES, FOIX DE CANDALLE, heeft aan het einde van het XV. Boek, te beginnen namelyk met het VI Voorstel, en het VI. en VII. van den Schryver weglaatende, eenige voorstellen gevoegd over die inschryving welke wy *onvolmaakte* noemen, en ook over eene andere soort van inschryving welke enkel hierin bestaat, dat een lichaam in een ander lichaam bevat of ingesloten is, zonder dat echter alle deszelfs hoeken, maar slechts eenige, de zyden of ribben van de andere raaken; of ook zodanig dat eenige zyden van de eene geheel op de zyden van de andere liggen: hy heeft insgelyks by de XV. Boeken een XVI. Boek over de onderlinge in- en omschryving van de regelmatige Figuuren gevoegd: CLAVIUS heeft dit alles overgenomen. Doch hierin zullen wy ons niet inlaaten: en slechts met een enkel woord de volmaakte omschryving aanstippen.

III. GEVOLG.

Een *tetraedrum* is in den *cubus* beschreeven wanneer de zes ribben van het zelve de zes zyden van den cubus raaken, en dus langs derzelver diagonaalen liggen: waaruit volgt, dat de hoeken van het tetraedrum met hunne toppen die van den cubus raaken, en in die hoeken begreepen zyn. EUCL. XV. I.

IV. GEVOLG.

Een *octaedrum* kan beschreeven worden in een *tetraedrum*, en in een' *cubus*.

In een *tetraedrum*, mits de zes hoeken ieder op eene der ribben van het tetraedrum staan, en wel *op het midden* dier ribben.

EUCL.

EUCL. XV. 2.

In een' *cubus* mits de zes hoeken de zes zyden van den cubus raaken, en wel in het middelpunt dier zyden, dat is in het stip daar de beide diagonaalen zich snyden.

EUCL. XV. 3.

V. GEVOLG.

Eén *cubus* kan beschreeven worden in een *octaedrum* en in een *dodecaedrum*.

In een *octaedrum*, wanneer de acht hoeken van den cubus ieder op eene der zyden van het octaedrum rusten; en dat wel in het middelpunt van die zyden: dat is (IV, 11. Gev. 3.) op de twee derde gedeelten van de lyn welke uit den top van iederen hoek der driehoekige zyde loodrecht op de tegenoverstaande zyde van dien driehoek staat.

EUCL. XV. 4.

In een *dodecaedrum*: indien men namelyk in de vier vyf-hoeken (Fig. 112.) die om de ribbe MN byv. liggen, de diagonaalen CE, CL, LO, OE trekt, heeft men een vierkant het welk zich met vyf vierkanten op gelyke wyze beschreeven veréénigt, en den cubus uitmaakt, wiens acht hoeken dus in acht hoeken van het dodecaedrum staan: en de vier lynen die de assen zyn van den cubus, zyn tevens assen van het dodecaedrum.

AANMERKING. Een gedeelte van de bewerking van EUCLIDES XIII, 17. kan hiertoe gebragt worden.

VI. GEVOLG.

Een *dodecaedrum* kan in een *icosaedrum* beschreeven worden, indien de hoeken van het dodecaedrum ieder op eene zyde van het icosaedrum rusten, en wel op het middelpunt van die zyde: dat is op twee derde gedeelten van de lyn welke uit den top van iederen driehoek, die de zyde van het icosaedrum uitmaakt, op de tegenovergestelde zyde van dien driehoek loodrecht staat.

EUCL. XV. 5.

VII.

VII. GEVOLG.

Het ſpreekt van zelf dat ieder regelmatig lichaam in *een* regelmatig lichaam van de zelfde ſoort kan beſchreeven worden:

II. AANMERKING. De beſchouwing deezer lichaamen kan ſomtyds zonderlinge vraagſtukken opleeveren, onder welken dit uitmunt, het welk in de voorleeden eeuw door den kundigen Paltziſchen Prins RUPERT werd voorgeſteld, en door WALLIS opgelost (zie *Oper. Tom.* II. p. 470. of *Algebr. cap.* 109.) „ Eenen cubus zodanig te doorbooren, „ dat er een ander cubus van gelyke grootte door kan."

Men kan zelfs gemaklyk eenen cubus zodanig doorbreeren, dat 'er een grooter Cubus door kan: en de paalen van de grootte des laatstgemelden kunnen gemaklyk aangeweezen worden.

XXXIII. VOORSTEL.

Indien men eene ribbe van eene lichaamlyke *figuur* in twee gelyke deelen deelt, en uit het *ſtip der verdeeling* eene loodlyn trekt op die ribbe in elk der *twee* vlakken die door haare zyden de ribben uitmaaken, zal de hoek, welken die lynen met elkander maaken, de helling aanduiden der vlakken waar uit die lichaamlyke figuur beſtaat.

BEWYS. Uit X, bep. 4.

GEVOLG.

In het *tetraedrum*, *octaedrum*, *icoſaedrum* en *dodecaedrum* gaan de gemelde loodlynen door de toppen van de driehoeken of vyfhoeken in welke zy getrokken zyn, zo als blykt uit I. 11.

Doch voor den *cubus* ſtaat die lyn rechthoekig op de twee tegenovergeſtelde ribben.

AANMERKING. Dit Voorſtel is het eerſte gedeelte van de 7. propoſitie in het XV. Boek van EUCLIDES: en de bewerking die men aldaar aantreft komt met ons *Voorſtel overéén.*

De ouden ſchynen hier in niet verder gegaan te zyn dan de enkele aanwyzing van dien boek. Door onze drie-

hoeks-

hoeksmeeting komen wy verder, en wy kunnen de grootheid van die hoeken berekenen, op de volgende wyze

I. Voor het TETRAEDRUM.

Zy in fig. 186. AVD de driehoek die, in fig. 110., door de ribbe AV gaande, loodrecht op het vlak BAC komt: daaruit volgt 1°. dat VD in het vlak VCB ligt en de loodlyn is die uit V op CB getrokken wordt: en dus is $VD = AV \times \sqrt{\frac{3}{4}}$. (VI. 16 en 8. Gev. 3): 2°. dat AD eene dergelyke loodlyn is in het vlak ABC, en dus $AD = VD = AV \times \sqrt{\frac{3}{4}}$.

Men stelle 3° dat E het middelpunt van △ ABC fig. 110. zy: dan zal E in AD vallen en $AE = \frac{2}{3} AD$ zyn (IV. 11. Gev. 3.) en ∠ VEA recht (V. 5.)

gevolgelyk

$$AE = \tfrac{2}{3} \times AV \sqrt{\tfrac{3}{4}} = AV \sqrt{\frac{4 \times 3}{9 \times 4}} = AV \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

en dus

$$4^\circ.\ VE = \sqrt{AV^2 - AE^2} = AV \sqrt{1 - \tfrac{1}{3}} = AV \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

Eindelyk indien men op AV de lyn AZ rechthoekig trekt tot dat dezelve VEZ in Z ontmoet, en op VZ den cirkel VAZ beschryft is $VC = AC$: en dus is C het middelpunt van het tetraedrum. Maar $VE : AV = AV : VZ$ (IV. Gev. 2.) dus $VZ = AV \sqrt{\tfrac{3}{2}}$. en $VC = \tfrac{1}{2} AV \sqrt{\tfrac{3}{2}} = AV \sqrt{\tfrac{3}{8}}$.

Uit de driehoeks meeting is (IX. 1.)

AV : VE = rad : sin. ∠ VAD: en

VD : VE = rad : sin. ∠ VDA:

Dus vindt men ∠ VAD, dat is, den hoek dien eene ribbe maakt met het vlak daar hy op staat, gelyk aan 54°. 44'. 8'' omtrent; en ∠ VDA, dat is, den hoek dien twee vlakken of zyden van het tetraedrum onderling maaken = 70°. 31'. 43'' omtrent.

II. Voor het OCTAEDRUM. Fig. 111.

Het blykt duidelyk in het Octaedrum 1°(XXXV. Gev. 3.) dat de hoeken die zo wel de vlakken als de ribben onderling maaken

recht

recht zyn: 2°. dat de as van het octaedrum de diagonaal is van het vierkant ABCD: en dus dat die as $= AB \times \sqrt{2}$: en eindelyk 3°. dat de afstand van het middelpunt tot den top de helft is van dien as, en dus $= \frac{1}{2} AB \sqrt{2} = AB \sqrt{\frac{1}{2}}$.

III. Voor het ICOSAEDRUM. Fig. 113 en 187.

Indien men het *icosaedrum* (Fig. 113.) door een vlak snydt dat langs de ribbe BI en vervolgens aan den anderen kant van I door de loodlyn IK van den gelykzydigen driehoek IGD gaat; dan zal die sneede vervolgens wederom door eene dergelyke loodlyn, dan door eene ribbe, door eene loodlyn, en eindlyk door eene ribbe gaan: zo dat men den zeshoek KMNLBI (Fig. 187.) verkrygt waarin IB en MN ribben zyn, en dus zyden van de gegeeven gelykzydige driehoeken die het *icosaedrum* uitmaaken, en de overige KI, KM, NL, LB, loodlynen in die driehoeken zyn: en dus ieder $= BI \sqrt{\frac{3}{4}}$.

Verder, in de zelfde figuur is de lyn IN, die de beide ribben IB en MN, en dus de toppen van de tegenoverelkander staande hoeken I en N, vereenigt, de *as* van het *icosaedrum*: en KB, is in den regelmatigen vyfhoek BCDGH, (Fig. 113.) dien de vyf driehoeken om den top I maaken, de loodlyn uit B in dien vyfhoek op de tegenovergestelde zyde GD getrokken: en daar IN de as is, welke loodrecht op het vlak van gemelde vyfhoek staat, is het stip G daar dezelve dat vlak snydt even ver van alle de hoeken van die vyfhoek af, en dus is BG de radius van den cirkel welke men om dien vyfhoek trekken zoude, waarvan de zyden gelyk aan BI zyn.

Indien men dan T voor de zyde van den tienhoek in den zelfden cirkel beschreeven stelt.

is $\overline{BI}^2 = \overline{BG}^2 + T^2$ (VI. 14.)

Maar $T = \frac{BG}{2}(\sqrt{5}-1)$ (VI. 13. Gev. 3: en IV. 7. Aanm. 7)

dus $\overline{BI}^2 = \overline{BG}^2 + \frac{\overline{BG}^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2$.

=

$$= \overline{BG}^2 + \frac{\overline{BG}^2}{2}(3-\sqrt{5})$$

$$= \overline{BG}^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\text{: en dus is } \overline{BG}^2 = \frac{2\,\overline{BI}^2}{5-\sqrt{5}}$$

$$\text{en } BG = BI \times \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}.$$

en dus, daar $\overline{IG}^2 = \overline{BI}^2 - \overline{BG}^2$ is,

$$\overline{IG}^2 = \overline{BI}^2 - \frac{2\,\overline{BI}^2}{5-\sqrt{5}} = \frac{\overline{BI}^2(3-\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}} \text{ en dus}$$

$$IG = BI\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}.$$

Doch daar de halve cirkel op IN, waarvan C het middelpunt is, ook door B gaat, is ∠ IBN = L (V. 5.) en dus is (IV. 12. Gev. 2.)
IG : BI = BI : IN: waar uit volgt

$$IN = BI\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$$

en dus IC, of de afstand van het middelpunt op den as, = $\frac{BI}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$.

Men kan insgelyks KG vinden: want indien men de 187. fig. met de 79. fig. vergelykt, zal men zien dat de lyn KB de zelfde lyn is in beide de figuuren, en dat GK van de eerste CK in de laatste is: dus, daar in deeze $\overline{CK}^2 = \overline{CE}^2 - \overline{KE}^2 = \overline{BG}^2 - \frac{1}{4}\overline{FE}^2$, is ook in fig. 187.

$$\overline{KG}^2 = \overline{BG}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{BI}^2 = \frac{2\,\overline{BI}^2}{5-\sqrt{5}} - \frac{\overline{BI}^2}{4} = \overline{BI}^2 \times \left(\frac{8-5+\sqrt{5}}{4(5-\sqrt{5})}\right) = \overline{BI}^2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4(5-\sqrt{5})}\right)\text{: en dus } KG = \frac{BI}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}.$$

Men is dus in staat IB en BG, IK en KG bekend zynde, in de driehoeken IBG en IKG te berekenen

1°. ∠ IBG dien men vindt . . . 31° - 43 - 3''
dus ∠ BIG = ∠ NBG . . . 58 - 16 - 57
2°. ∠ KIG, dien men vindt . . 52 - 37 - 21
dus ∠ KIB = ∠ IBL . . . 110 - 54 - 18
en ∠ IKG . . . . . 37 - 22 - 39
en ∠ NBL (= ∠ IBL − 90°.) = ∠ BNL 20 - 54 - 18
Gevolglyk ∠ NLB = ∠ MKI . . . 138 - 11 - 24.

Indien men nu daaruit de hoeken KBL en BKM opmaakt, vindt men

∠ KBL = 79°. 11' 15'' en ∠ BKM = 100°, 48' 45''

dus te samen = 2 L: waar uit volgt (I-4.) KM // BL: 't geen uit de constructie zelve van het icosaedrum ligt is op te maaken.

Eene ribbe maakt dan met het aangrenzend vlak een' hoek van 110°. 54' 18'': en twee aangrenzende vlakken maaken onderling eenen hoek van 138°. 11' 24''.

Om nu de loodlyn CO uit het middelpunt op de *driehoekige zyden* neêr te laaten, te vinden, behoeft men slechts in aanmerking te neemen dat die lyn op het middelpunt O van den driehoek valt: dus $IO = \frac{2}{3} KI = \frac{2}{3} BI \sqrt{\frac{3}{4}} = BI \sqrt{\frac{1}{3}}$:

en dus $CO = \sqrt{CI^2 - EI^2} = BI \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} - \frac{1}{3}} =$

$= \frac{BI}{2} \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5} - 12 + 4\sqrt{5}}{3(3-\sqrt{5})}} = \frac{BI}{2} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3(3-\sqrt{5})}} =$

$\frac{1}{2} BI \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})^2}{3(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}} = \frac{1}{2} BI \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$

en dus is de hoogte $OP = BI \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$.

IV. Voor den CUBUS. Fig. 107.

Het spreekt van zelf 1°. dat de vlakken onderling rechte hoe-

hoeken maaken, zo als ook de ribben: 2°. dat het vierkant van den as, AE of BF, van den cubus het drievoud is van het vierkant der zyde: want □ op BF =

= □ op BD + □ op DF;

= 2 □ op DG of DF + □ op DF.

= 3 □ op DF: dus

$BF = DF\sqrt{3}$: en dus de halve as

$= \frac{DF}{2}\sqrt{3} = DF\sqrt{\tfrac{3}{4}}$.

V. Voor het DODECAEDRUM.

Indien men het *dodecaedrum* (Fig. 112.) door een vlak snydt het welk langs de ribbe CM, de loodlyn MR, de loodlyn RH, en insgelyks aan den anderen kant van de figuur door dergelyke loodlynen gaat, en eindelyk door de ribbe die vlak over CM staat, verkrygt men eenen zeshoek CMRHSQ fig. 188, waar in CM en SH de ribben, en MR, HR, SQ en QC de loodlynen zyn.

Indien men verder (Fig. 112.) in de drie vyfhoeken om den top M, de diagonalen CL, CN, LN trekt, maaken dezelve eenen gelykzydigen driehoek; de loodlyn MR snydt de diagonaal LN in twee gelyke deelen in I, en de lyn CI, in het vlak van den driehoek CLN getrokken, is de loodlyn uit den top van eenen gelykzydigen driehoek op de grondlyn getrokken: en dus is CI (ook in fig. 188.) $= CL \times \sqrt{\tfrac{3}{4}} = LN \times \sqrt{\tfrac{3}{4}}$.

Maar de diagonaal LN is bekend: want, indien men R voor den radius van den vyfhoek LMNOP stelt, is (VI. 14. Gev. 2.)

$\overline{LN}^2 = 5R^2 - \overline{MN}^2$: en uit het geen wy voor het *icosaedrum* gezegd hebben blykt dat $R^2 = \frac{2\,\overline{MN}^2}{5-\sqrt{5}}$: dus is

$$\overline{LN}^2 = \frac{10\,\overline{MN}^2}{5-\sqrt{5}} - \overline{MN}^2 =$$

$$\overline{MN}^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right) = \overline{CM}^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)$$

 en

en dus $LN = CM\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}$

Gevolglyk, daar $Ci = LN\sqrt{\frac{3}{4}}$:

is $Ci = CM\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} = CM \times \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)\times 3}{(\sqrt{5}-1)\times 4}}$

Maar Fig. 188. de as MS valt loodrecht op de lyn Ci, en dus valt Z op $\frac{2}{3}$ Ci: (Voorstel 30. Gev. 2. N°. 2) waar uit volgt $CZ = \frac{2}{3}\, Ci$

$$= \frac{2}{3}\, CM\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)}\times\frac{3}{4}} = CM\sqrt{\frac{4\times 3}{9\times 4}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)}$$

$$= CM\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{3(\sqrt{5}-1)}}:$$

Maar $MZ = \sqrt{\overline{CM}^2 - \overline{CZ}^2}$: dus

$$MZ = CM\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}+1}{3(\sqrt{5}-1)}} = CM \times$$

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{5}-2}{3(\sqrt{5}-1)}} =$$

$$= CM\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-1}\right)} = CM \times$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}} = CM\sqrt{\frac{2(3-\sqrt{5})}{3\times 4}}$$

$$= \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}.$$

Maar, om dat △ MCS rechthoekig is, (V. 5.) is (IV. 12.)

$MZ : CM = CM : MS$: dus is $MS = \frac{\overline{CM}^2}{MZ} = CM \times$

$$\sqrt{\frac{2\times 3}{3-\sqrt{5}}} = CM\sqrt{\frac{4\times 3}{6-2\sqrt{5}}} = CM$$

$$\sqrt{\frac{4\times 3}{(\sqrt{5}-1)^2}} = CM \times \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}.$$

Welke uitdrukking volmaakt overeenkomt met het geen wy te vooren gezien hebben (Voorst. 32. Gev. 5.) dat namelyk

lyk ook LN fig. 112. de zyde is van den cubus in het dodecaedrum beschreeven, en wiens as de as is van het dodecaedrum: immers

$$MS = LN\sqrt{3} = \sqrt{3} \times CM \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} =$$

$$CM \times \sqrt{3} \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)^2}} = CM \times \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}.$$

$$\text{dus } MD = \tfrac{1}{2} MS = CM \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1} = CD.$$

Om nu de loodlyn DX te vinden, moet men slechts aanmerken dat die lyn op het middelpunt van den vyfhoek vallen moest en dus op CQ; zodanig dat CX de radius van den vyfhoek is, gevolglyk (p. 433) gelyk aan $CM \times \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}$: waardoor

$$DX = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{CX}^2} = CM \sqrt{\frac{3}{(\sqrt{5}-1)^2} - \frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}}$$

$$= CM \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{CM}{\sqrt{5}-1} \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}},$$

en dus is XT, of de hoogte van het dodecaedrum, $= \frac{2\,CM}{\sqrt{5}-1} \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}$.

De bepaaling nu deezer lynen geeft ook die der hoeken: want

MS : CM = 1 : sin. ∠ CSM = sin. ∠ SMH
dus ∠ SMH = 20°. 34' 19''
en ∠ CMS = ∠ MSD = 69°. 5 - 41
CD : DX = 1 : sin. ∠ XCD = 52. 37 - 21
dus ∠ QCM = ∠ CMR . . 121 . 43 - 2
waar uit volgt ∠ CQS = ∠ MKH 116°. 34' 4''

Eene ribbe maakt dan met de aangrenzende vlakken hoeken van 121° - 43' - 2'': en twee vlakken maaken onderling eenen hoek van 116° - 23' - 56''.

Waardoor al wat het dodecaedrum betreft bekend is.

XXXIV. VOORSTEL.

De inhoud van een *tetraedrum* is gelyk aan een rechthoekig parallelopipedum van de zelfde hoogte en wiens grondvlak gelyk is aan het derde gedeelte van het driehoekig grondvlak des tetraedrums.

De inhoud van een *octaedrum* is gelyk aan een rechthoekig parallelopipedum wiens hoogte de as is van het octaedrum, en wiens grondvlak een derde gedeelte is van het vierkant op de zyde van het octaedrum beschreeven.

De inhoud van een *icosaedrum* is gelyk aan een rechthoekig parallelopipedum, waar van de hoogte het derde gedeelte is van de loodlyn tusschen twee tegenoverstaande evenwydige zyden van het icosaedrum begreepen of van de hoogte van het icosaedrum, en het grondvlak het tienvoud van een der driehoeken die het icosaedrum uitmaaken.

De inhoud van het *dodecaedrum* is gelyk aan een rechthoekig parallelopipedum waar van de hoogte de hoogte is van het dodecaedrum, en het grondvlak het dubbeld van eenen der vyfhoeken die het dodecaedrum uitmaaken.

BEWYS. Uit het XXIX. Voorstel, en het XXV. en XV.

TOEPASSING OP IEDER DE VYF REGELMATIGE LICHAAMEN.

I. TETRAEDRUM. Fig. 186. en 110.

De inhoud van het driehoekig grondvlak is $\frac{1}{2} AV \times \sqrt{\frac{3}{4} \overline{AV}^2} = \overline{AV}^2 \times \frac{1}{4} \sqrt{3}$: gevolglyk is de oppervlakte van het *tetraedrum* $= 4\, \overline{AV}^2 \times \frac{1}{4} \sqrt{3} = \overline{AV}^2 \sqrt{3}$: de hoogte VE is $= AV \sqrt{\frac{2}{3}}$: dus is de geheele inhoud $= \overline{AV}^3 \times 3 \times \frac{1}{12} \sqrt{\frac{2 \times 3}{3}} = \overline{AV}^3\, \frac{1}{12} \sqrt{2}$: of, de zyde door Z en den inhoud door T uitdrukkende is

$$T = Z^3 \times \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

II. OCTAEDRUM. Fig. 111.

De inhoud van het vierkant op AB is $\overline{AB}^2$: de as is $AB\sqrt{2}$.

dus is de inhoud O van het Octaedrum $= \frac{1}{3}\overline{AB}^3\sqrt{2}$: of

$$O = Z^3 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$$

De inhoud van de driehoekige zyde is $\frac{1}{4}\overline{AB}^2\sqrt{3}$: dus is de oppervlakte van het octaedrum $= \frac{8}{4}\overline{AB}^2\sqrt{3} = 2\overline{AB}^2\sqrt{3}$.

III. CUBUS.

Men heeft $C = Z^3$:

en de oppervlakte $= 6Z^2$

IV. ICOSAEDRUM. Fig. 111. en 187.

De inhoud van den driehoek is $\overline{BI}^2 \times \frac{1}{4}\sqrt{3}$:

dus is de oppervlakte $= 20\,\overline{BI}^2 \times \frac{1}{4}\sqrt{3} = 5\,\overline{BI}^2\sqrt{3}$.

De hoogte is $= BI\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$

dus de inhoud

$$= 10\,BI^3 \times \frac{1}{12}\sqrt{\frac{(7+3\sqrt{5})\times 3}{6}}$$

$$= \frac{10}{12}BI^3\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$$

V. DODECAEDRUM.

Men moet eerst den inhoud van den vyfhoek vinden: deeze is gelyk $5\,CM \times \frac{1}{2}$ loodlyn: maar; stellende R voor den radius, is die loodlyn $L = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\overline{CM}^2} =$

$$\sqrt{\frac{2\,CM^2}{5-\sqrt{5}} - \frac{1}{4}CM^2} = \frac{CM}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}}$$

en dus is de vyfhoek $= \frac{5\,CM^2}{4}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}}$

gevolglyk is de oppervlakte = 12 × 5 CM × ½ loodlyn = 30 CM × loodlyn: het geen de 3 propositie in EUCLIDES XIV. Boek is: of ook de oppervlakte = $\frac{5 \times 12\, CM^2}{4}$ × $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,(\sqrt{5}-1)}} = 15\, CM^2 \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,(\sqrt{5}-1)}}$: de hoogte is $= 2\, DX = \frac{2\, CM}{\sqrt{5}-1} \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}$

dus is het dodecaedrum =

$$\frac{10\, CM^3}{2(\sqrt{5}-1)} \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}{5\,(\sqrt{5}-1)}} =$$

$$\frac{5\, CM^3}{\sqrt{5}-1} \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{5\,(\sqrt{5}-1)}} = \frac{5\, CM^3}{\sqrt{5}-1} \sqrt{\frac{6\sqrt{5}+14}{5\,(\sqrt{5}-1)^2}} =$$

$$\frac{5\, CM^3}{(\sqrt{5}-1)^2} \sqrt{\frac{6\sqrt{5}+14}{5}}$$ of

$$D = \frac{5\, Z^3}{(\sqrt{5}-1)^2} \sqrt{\frac{6\sqrt{5}+14}{5}}$$

XXXV. VOORSTEL.

Alle de gelykvormige regelmatige lichaamen zyn in de driedubbelde reeden der ribben uit welke ze gevormd worden.

BEWYS. Uit het XXIV. Voorstel.

TWAALF-

TWAALFDE BOEK,

OVER DEN ROL OF CYLINDER, DEN KEGEL, EN DEN KLOOT.

BEPAALINGEN.

I, Fig. 125.

Indien 'er twee Cirkels (A G B en C H D) in twee verschillende doch evenwydige vlakken geplaatst, en derzelver middelpunten (E en F) door eene rechte lyn (E F) vereenigd zyn: en men onderstelt dat 'er zich eene rechte lyn rondom de omtrekken van die cirkels altoos evenwydig aan zich zelve en aan de lyn (E F) die de middelpunten vereenigt beweege, en door die beweeging eene oppervlakte beschryve: zal het lichaam (A C H D B G A) dat door die beweeging gevormd, en door de gegeeven cirkels beslooten wordt, een *Cylinder* of Rol zyn. —— Die cylinder of rol zal recht op het grondvlak staan, indien de lyn, welke de middelpunten der gegeeven cirkels vereenigt, en die men den *as* van den rol noemt, rechthoekig op die cirkels staat: zo niet, staat de cylinder of rol scheef op het grondvlak, zo als C H D *b g a*.

EUCL. XI. def. 21. 22. 23. — S. p. 357. bep. 1.

1. AANMERKING. Men kan dus den rechten cylinder ook begrypen als gebooren te zyn door de omwenteling van een rechthoekig parallelogram G E F H, op eene der zyden E F als op eene spil of as: dan zal de andere opstaande zyde G H den omtrek van den cylinder, en de twee overige H F, G E de cirkels beschryven. Dit is de bepaaling door EUCLIDES gegeeven: doch dezelve sluit de scheeve cylinders uit.

Anderen beschouwen den cylinder als gebooren uit de evenwydige beweeging van een cirkel langs eene gegeeven lyn: byv. van den cirkel, CHD langs de lyn CA of langs de lyn Ca.

I. GEVOLG.

Indien men den cylinder door vlakken snydt welke evenwydig aan het grondvlak zyn, zullen die sneeden cirkels zyn. Indien de sneede door de middelpunten van de grondvlakken gaat, of evenwydig is aan een vlak dat door die punten gaat, is zy een parallelogram; en wel een rechthoek voor den rechten cylinder.

Die parallelogrammen hebben alle de zelfde hoogte, die van den cylinder, en staan dus tot elkander als hunne grondlynen, dat is, als de choorden der boogen welke zy van de grondvlakken afsnyden.

II. AANMERKING. De schuinsche sneeden van den cylinder behooren niet tot de grondbeginselen der Meetkunde, wanneer men deeze weetenschap in eenen striktem zin volgens de gewoonte der ouden neemt.

II. GEVOLG. Fig. 130.

Indien FBDL een cirkel is evenwydig aan het grondvlak van den cylinder, zal de raaklyn GE die deezen cirkel in L raakt, ook eene raaklyn van den cylinder in dat zelfde stip zyn: en indien men op de oppervlakte, (Fig. 125.) de lyn AC evenwydig met den as EF trekt, zal die lyn geheel in de oppervlakte van den cylinder liggen.

III. GEVOLG. Fig. 125.

Indien een vlak den cylinder zodanig raakt, dat eenige lyn AC van het zelve evenwydig zy met den as van den cylinder, en geheel op de oppervlakte van deezen lig-

ligge, (II. Gev.) en dat alle de lynen, die in het vlak op de lyn A C loodrecht getrokken worden, tevens raaklynen zyn van cirkels in den cilinder, die evenwydig en gelyk zyn aan deszelfs grondvlak, zal dat vlak den cylinder in die lyn alleen raaken, en nimmer snyden.

II. Fig. 126.

Indien een stip (V) boven het vlak van een' cirkel (A D B) verheeven is, en eene lyn (V A) zich uit dat onbeweeglyke stip (V) als uit een middelpunt, om den omtrek van den gegeeven cirkel (A D B) beweegt, wordt de figuur, welke door die beweeging gevormd, en door den gegeeven cirkel als grondvlak besloten wordt, een *Keegel* of *Conus* genoemd; de kromme oppervlakte door die beweeging gebooren, is de *keegelachtige* oppervlakte; het gegeeven stip de *kruin*; de gegeeven cirkel het *grondvlak*. De lyn, welke het gegeeven stip en het middelpunt van den gegeeven cirkel vereenigt, is de *as* van den keegel. De lyn, door wier beweeging de keegel gevormd wordt, is de *zyde* van den keegel. Indien de *as* rechthoekig op het grondvlak staat, is de keegel *recht*; zo niet, *schuinsch*, zo als B D A V.

EUCL. XI. bep. 18. 19. 20. — S. p. 358. d. 2.

I. AANMERKING. Anderen beschouwen den keegel als geboren door de omwenteling van eenen rechthoekigen driehoek V C A om eene der rechthoekszyden als om eenen as; de schuinsche zyden beschryft dan de kegelachtige oppervlakte: de andere rechthoek-zyde de *bazis* of het grondvlak: doch dan is de scheeve kegel onder de bepaling niet begrepen.

I. GEVOLG.

De *zyde* van den keegel heeft eene bestendige groot-

te

to in rechte keegels: doch is voor ieder ſtip van den omtrek verſchillend in ſchuinſche keegels.

II. GEVOLG.

Indien men een vlak laat gaan door den top *V* en het middelpunt van het grondvlak, en dus langs den as VC, is de ſneede een driehoek AVB, welke gelykbeenig is, en rechthoekig op het grondvlak ſtaat, zo de keegel recht is. Naar maate de top hoek AVB van dien driehoek recht, ſtomp of ſcherp is, wordt de keegel *rechthoekig*, *ſtomphoekig* of *ſcherphoekig* genoemd.

III. GEVOLG.

Indien men den keegel evenwydig aan het grondvlak ſnydt, zyn de ſneeden cirkels, waar van de omtrekken, zo als ook de middellynen, tot elkander ſtaan, zo als hunne afſtanden van den top: en de inhouden in verdubbelde reeden van die afſtanden (VII. 14.)

AANMERKING. De ſchuinſche ſneeden van den Keegel behooren niet tot de grondbeginſelen der Meetkunde, wanneer men die wetenſchap in eenen ſtrikten zin volgens de gewoonte der ouden neemt.

III.

Gelykvormige keegels en cylinders zyn die, waarvan de asſen in de zelfde reden ſtaan als de middellynen der grondvlakken, en gelyke hoeken met die grondvlakken maaken.

EUCL. XI. def. 24.

AANMERKING. Deeze bepaaling is een gevolg van de derde bepaaling van ons XI. Boek. Om dezelve op den zelfden leest te ſchoeijen zoude men moeten zeggen „ gelykvor„ mige keegels en cylinders zyn die welke *gelykvormige* „ grondvlakken en gelykvormige keegelachtige of cylindri„ ſche

„ fche oppervlakten hebben." Maar de grondvlakken zyn cirkels; en deeze zyn altoos gelykvormig, en hunne omtrekken ftaan in dezelfde reeden als hunne middellynen (VII, 12.) en wy zullen in het IV. en het IX. Voorftel van dit Boek bewyzen, dat de cylindrifche of keegelachtige oppervlakten altoos tot elkander ftaan zo als rechthoeken waarvan de grondlynen de omtrek van den cirkel, en de hoogten zo alsde asfen zyn: waar uit dan de gelykvormigheid van verfchillende of cylinders of keegels tot die van de gemelde rechthoeken gebragt wordt: en dus tot de gelykheid der reedens van as en middellyn des cirkels: waar uit deeze verkorte bepaaling haaren oorfprong ontleend.

Indien de cylinders of keegels recht, en teevens gelykvormig zyn, zyn de rechthoekige parallelogrammen of driehoeken, waar door zy gevormd worden, gelykvormig.

S. p. 373. bep. 6. p. 386. bep. 7.

IV. Fig. 127.

Indien een halve cirkel om zyn middellyn als om een fpil wentelt, zal hy door die beweeging een lichaam vormen, dat een *kloot* of *fpheer* genoemd wordt. De middellyn van den cirkel is de *as* van den kloot: het middelpunt is het *middelpunt* van den kloot: en de beide uiteinden van den as worden de *poolen* van den kloot genoemd.

EUCL. XI. bep. 14. 15. 16. 17. — S. p. 387. 388.

I. GEVOLG.

De lynen die men uit het middelpunt van den kloot naar alle de ftippen van deszelfs omtrek trekt, zyn gelyk: en dit is de reeden waarom fommigen den kloot een lichaam noemen, zodanig gefteld, dat alle de lynen uit zeker punt naar deszelfs oppervlakte getrokken, onderling gelyk zyn.

TACQUET op de 5 definitie van EUCLIDES XII.

II. GE-

II. GEVOLG.

Op welke wyze men eenen kloot fnydt, is de fneede altoos een cirkel.

BEWYS. Zy DE de fneede of liever de gemeene fneede van dat vlak, en den cirkel BGHB die door het middelpunt van den kloot gaat: dan is DE eene choorde van dien cirkel BGHB: en dus indien men dezelve in F in twee gelyke deelen fnydt, en door F en het middelpunt C de lyn BFCH trekt, is die lyn BH eene middellyn van den cirkel BGIB. Dus zyn BEH en BDH halve cirkels: en gevolglyk indien de halve cirkel BDH om BH wentelde zoude dezelve den zelfden kloot befchryven: en het ftip D, zoude eene cirkel befchryven, waar van DE de middellyn is. Dus is de fneede van het vlak dat den kloot langs ED fnydt een cirkel.

III. GEVOLG.

Alle de fneeden die door het middelpunt gaan zyn cirkels, en wel *gelyke* cirkels. Zy worden ook *groote cirkels* van den kloot genoemd, en derzelver middellynen *middellynen* van den kloot: men kan altoos eenen derzelven, en welken men wil, voor *as* van den kloot aanneemen. Maar zo de fneeden niet door het middelpunt gaan, zyn zy wel cirkels, maar worden *kleine cirkels* van den kloot genoemd, en zy zyn kleiner naarmaate zy verder van het middelpunt afftaan.

S. p. 386. Kap. 9. 10.

I. AANMERKING. Het blykt dat men de bepaaling van kleine cirkels niet geeven kan, dan na dat men beweezen heeft dat alle de fneeden van den kloot cirkels zyn: het geen echter door de meesten verwaarloosd wordt. Men noemt ook *Equator* van eenen kloot den omtrek van den cirkel die door het middelpunt gaat en loodrecht op den as ftaat, welke cirkel dus, zo als alle groote cirkels, den kloot in

twee

twee gelyke deelen deelt. —— De omtrekken nu en middellynen van de kleine cirkels die evenwydig aan dien Equator zyn, zyn zo als de *Cosinussen* der bogen die hunne afstanden van den Equator meeten. Want, zy, Fig. 169, EKFGE de sneede van den kloot, EF de as, GK de sneede van den *Equator*; en IND, MRB die van twee kleine cirkels: zo zyn de bogen KD en KB hunne afstanden van den *Equator*, en ND, RB zyn de *Cosinussen* van die afstanden.

Dus zyn ook de inhouden van die cirkels zo als de vierkanten van de gemelde Cosinussen.

IV. GEVOLG.

Indien eene lyn, (GE,) (Fig. 130.) eene raaklyn is van eenen grooten cirkel (FBDL) van den kloot, en dus op den diameter (BL) van den cirkel, welke diameter dan voor as van den kloot gehouden wordt, loodrecht staat, is die lyn ook eene raaklyn van den kloot, en het uiteinde (L) van dien as is het stip der aanraking.

En dus zal ook een vlak den kloot in L raaken, indien de as BL, die door L gaat, in L loodrecht staat op alle de lynen die uit L in dat vlak getrokken kunnen worden.

V.

Een prisma, of parallelopipedum, wordt gezegd om eenen cylinder beschreeven te zyn, wanneer de grondvlakken op elkander liggen, en alle de opstaande zyden van het prisma of parallelopipedum, den omtrek van den cilinder raaken.

Een cilinder wordt gezegd om eenen keegel beschreeven te zyn, als zy op hetzelfde grondvlak staan, en het bovenste vlak van den cilinder den top van keegel raakt.

Een

Een Cubus of een cylinder, worden gezegd om eenen kloot beschreeven te zyn, als de kloot zodanig in de zelven bevat is, dat hy alle de vlakken en oppervlakten raakt.

S. p. 388. Bep. 11.

GEVOLG.

Hier uit volgt 1°. dat de zyde van den cubus, of de middellyn van de bazis des cylinders, om den kloot beschreeven, gelyk is aan de middellyn van den kloot.

2°. Dat de aanraking van den kloot met den oppervlakte van den cylinder, of de zyden van den cubus geschiedt door den equator van den kloot, en op de helft van de hoogte van cubus of cylinder.

3°. Dat de as van den kloot met dien van den cylinder overeenkomt.

VI.

Een kegel wordt gezegd om eenen kloot beschreeven te zyn, als de kloot op het grondvlak van den keegel rust, en de oppervlakte van den kloot door die van den keegel geraakt wordt.

GEVOLG. Fig. 189.

Die cirkel welke de oppervlakte van eenen rechten kegel raakt, is altoos een kleine cirkel, en is meer van den Equator verwyderd naar maate de kegel stomper is; want $Po : PC =$ cof. $\angle$ $oPC : 1 =$ cof. $\angle$ $POI : 1 =$ cof. $\frac{1}{2}$ $\angle$ $GOF : 1$.

VII.

Eene lichaamlyke figuur wordt gezegd in eenen kloot beschreeven te zyn, als alle de hoeken van die figuur op de holle oppervlakte van den kloot rusten.

L o

I. GEVOLG.

En dus een cylinder, wanneer de onderste en bovenste cirkel; en een keegel, wanneer het grondvlak en de top de holle oppervlakte van den kloot raaken.

II. GEVOLG.

Geen cylinder kan in een' kloot beschreeven worden, ten zy hy rechthoekig is.

I. VOORSTEL. Fig. 125.

Een cylinder is de limiet van alle de prismas die om en in den cylinder beschreeven kunnen worden.

TACQUET, *Selecta ex* ARCHIMEDE. pr. 8. 10.

BEWYS: Uit de VII. Bep. en VII. 11.

GEVOLG.

Hieruit blykt, hoe men te verstaan hebbe wat veelen zeggen, dat de cylinder een prisma is van een *oneindig* getal zyden: welke uitdrukking geheel van de mathematische naauwkeurigheid afwykt.

II. VOORSTEL.

De cylinders staan tot elkander in de samengestelde reeden hunner grondvlakken en hoogten.

BEWYS. Uit het I. Voorstel, VII. 5, 8. en XI. 16.

I. GEVOLG.

Dus staan cylinders tot elkander in de samengestelde reeden uit de enkele reeden der hoogten, en de verdubbelde reeden der middellynen van de grondvlakken.

II. GEVOLG.

Dus zyn cylinders, wier grondvlakken en hoogten ge-

gelyk zyn, gelyk: en die, wier hoogten gelyk zyn, ſtaan in de zelfde reeden als hunne grondvlakken.

EUCL. XII. 11.

III. GEVOLG.

Dus ſtaan cylinders, wier grondvlakken gelyk zyn, in de zelfde reeden als derzelver hoogten: en gevolglyk, zo men eenen cilinder door vlakken, die evenwydig aan de grondvlakken zyn, ſnydt, zullen de deelen de zelfde reeden tot elkander hebben, als de deelen die zy van den as afſnyden.

EUCL. XII. 14. 13.

IV. GEVOLG.

Indien twee cylinders gelyk zyn, zyn hunne grondvlakken in omgekeerde reeden hunner hoogten: en omgekeerd.

EUCL. XII. 15.

V. GEVOLG.

Hieruit, en uit XI., 11., het 4. Gev., blykt, hoe men deeze uitdrukking te verſtaan hebbe, dat de cylinder gelyk is aan het grondvlak door de hoogte vermeenigvuldigd. Dat is: zy I de inhoud van den cylinder, H de hoogte, M de middellyn van het grondvlak, O: 1 de reeden van den omtrek van den cirkel tot de middellyn: zo wordt de inhoud van den cylinder uitgedrukt door $\frac{O \times M^2 \times H}{4}$.

S. p. 361. Gev. en p. 364.

III. VOORSTEL.

Een cylinder ſtaat tot het omſchreeven *parallelopipedum*, zo als de inhoud van den cirkel tot het vier-

kant

kant op de middellyn: of zo als het vierde gedeelte van den omtrek tot de middellyn.

S. p. 371. pr. 8. Gev. 2. N°. 3.

BEWYS. Uit het I. Voorstel, XI. 16. Gev. 3. en VII. 13. Gev. 2.

GEVOLG.

En dus, volgens de reeden door ARCHIMEDES bepaald, als 11 : 14. (VII. 25.)

IV. VOORSTEL.

De cylindrische oppervlakte van eenen cylinder is gelyk aan een parallelogram, waarvan de hoogte de as van den cylinder, en de grondlyn de omtrek is van het grondvlak van den cylinder: of, wat op het zelfde uitkomt, die oppervlakte is gelyk aan den inhoud van een' cirkel, wiens radius middenevenreedig is tusschen den as van den cylinder, en de middellyn van het grondvlak.

TACQUET *Selecta ex* ARCHIMEDE pr. 10. Cor. 1. en Cor. 5. en pr. 11, en Cor. 1. pr. 11.

BEWYS. Uit het I. Voorstel en XI, 17. en VII. 13. Gev. 2.

I. AANMERKING. Op dit Voorstel steunt de bepaaling van gelykvormige cylinders. Voor den rechten cylinder is de as ook de hoogte, en men kan die woorden onderling verwisselen.

II. AANMERKING. En dus hebben alle de gevallen, in welke parallelogrammen onderling gelyk zyn, of in eene bepaalde reeden staan (Zie IV, 6, 7:) ook plaats voor de oppervlakten van cylinders.

TACQUET pr. 10. Cor. 2. en pr. 11. Cor. 2, 3. &c.

I. GEVOLG.

De cylindrische oppervlakte van een' rechten cylinder staat tot het grondvlak, zo als de as van den cylin-

 der

der tot het vierde gedeelte der middellyn van het grondvlak.

TACQUET l. c. pr. 10. Cor. 3. en pr. 12.

II. GEVOLG.

Indien de hoogte van den rechten cylinder gelyk is aan de middellyn van het grondvlak, is de cylindrische oppervlakte van den cylinder het viervoud van die des grondvlaks.

TACQUET pr. 12. Cor.

III. GEVOLG.

Zy dan C de cylindrische oppervlakte, G het grondvlak: dan is de geheele oppervlakte (C + 2 G) in dit geval gelyk aan 4 G + 2 G = 6 G dat is: de oppervlakte van eenen rechten cylinder, wiens hoogte gelyk is aan de middellyn van het grondvlak, is het zesvoud van dit grondvlak.

V. VOORSTEL.

Gelykvormige cylinders staan in de driedubbele reeden van de middellynen hunner grondvlakken.

EUCL. XII. 12. — St. p. 373. pr. 11.

BEWYS. I. Voorstel en XI. 12.

VI. VOORSTEL.

Indien de cylindrische oppervlakten van twee rechte cylinders gelyk zyn, staan die cylinders tot elkander in de zelfde reeden als de middellynen hunner grondvlakken of in omgekeerde reeden der hoogten: en indien de cylinders gelyk zyn, staan hunne cylindrische oppervlakten in omgekeerde reeden van de middellynen der oppervlakten, of in *onderverdubbelde* reeden van de hoogte.

TACQUET pr. 10 Schol. 2.

BEWYS. I. Zy de reeden van den omtrek des cirkels tot de middellyn als O : 1. laaten H en *h* de hoogten van de cylinders, I en *i* hunne inhouden, S en *s* de oppervlakten,

M en m de middellynen der grondvlakken verbeelden: dan is de cylindrische oppervlakte van den eenen tot die van den ander $= H \times OM : h \times Om$: en dus, in dit geval $H \times OM = h \times Om$; dus $H : h = Om : OM = m : M$. Maar $I : i = H \times M \times M : h \times m \times m$. (II. Voorst. Gev. 1.)

$$= mMM : Mmm$$
$$= M : m$$
$$= h : H.$$

II. Uit de onderstelling is $I = i$: dus $M^2 H = m^2 h$: dus $M : m = \sqrt{h} : \sqrt{H}$; dus $S : s = MH : mh =$

$$MHMm : mhmM = m : M = \sqrt{H} : \sqrt{h}.$$

I. GEVOLG.

Indien men dan uit een blad, dat een rechthoekig parallelogram is, een cylindrisch vat moet maaken, zal de inhoud grooter zyn indien men de kleinste zyde, dan indien men de grootste zyde voor hoogte neemt: het geen in de praktyk van belang is.

II. GEVOLG.

Hier uit ziet men hoe veel de oppervlakte van eenen draad vermeerderd wordt met denzelven te rekken: en dus, indien het eene vergulde draad is, hoe veel de dunheid van het goud (welks dikte in de zelfde reeden als de oppervlakte is, doch omgekeerd) daar door vermeerdert.

VII. VOORSTEL. Fig. 126.

Een keegel is de limiet van alle de Pyramiden die de zelfde hoogte hebben als de keegel, en wier grondvlak een veelhoek is in den cirkel, grondvlak van den keegel, beschreeven.

TACQUET pr. 9. 10.

BEWYS. Uit VII. 11.

GEVOLG.

Hier uit blykt hoe men het gezegde van veelen te verstaan heb-

hebbe, dat de keegel eene pyramide is van een *oneindig* getal *oneindig kleine* zyden: welke uitdrukking geheel te verwerpen is.

VIII. VOORSTEL.

Een keegel is het derde gedeelte van eenen cylinder om dien keegel beschreeven.

EUCL. XII. 10. — S. p. 383. pr. 18.

BEWYS. Uit het VII. en I. Voorstel; VII. 5. en XI, 25.

I. GEVOLG.

Hier uit blykt hoe men het gezegde van veelen te verstaan hebbe dat de inhoud van eenen keegel gelyk is aan het grondvlak door het derde gedeelte van de hoogte vermeenigvuldigd. S. p. 384. Gev. 2.

II. GEVOLG.

Een keegel staat tot een parallelopipedum om den keegel beschreeven, zo als het derde gedeelte van den inhoud des cirkels tot het vierkant op de middellyn: *of zo als een twaalfde gedeelte van den omtrek tot de middellyn.* (III. Voorst.)

IX. VOORSTEL.

Verschillende keegels staan tot elkander in samengestelde reeden hunner grondvlakken en hoogten.

BEWYS. Uit het VIII Voorstel, en II, 8.

I. GEVOLG.

Keegels die de zelfde hoogte hebben zyn als hunne grondvlakken, of in verdubbelde reeden van de middellynen dier grondvlakken: kegels die gelyke grondvlakken hebben zyn als hunne hoogten: en keegels, welke op gelyke grondvlakken en tusschen de zelfde evenwydige vlakken staan, zyn gelyk.

EUCL. XII, 11, 14.

II. GE-

II. GEVOLG.

Indien twee keegels gelyk zyn, ſtaan derzelver grondvlakken in omgekeerde reeden hunner hoogten: en omgekeerd.

EUCL. XII. 15.

X. VOORSTEL.

De keegelachtige oppervlakte van eenen rechten keegel is gelyk aan eenen driehoek, waar van de grondlyn de omtrek van het grondvlak en de hoogte de zyde van den keegel is: of, wat op het zelfde uitkomt, die oppervlakte is gelyk aan eenen cirkel wiens radius middelevenreedige is tusſchen den radius van het grondvlak, en de zyde van den kegel.

TACQUET l. c. pr. 10. Cor. 6. Cor. 10. en pr. 13. en Cor. pr. 13.

BEWYS. Uit het VIII. Voorſt., en XI, 26. en VII. 13. Gev. 2.

AANMERKING. Alle de gevallen in welke de inhouden van verſchillende driehoeken gelyk zyn, of in een bepaalde reeden ſtaan (zie IV, 6. 7. enz.) hebben ook plaats voor de oppervlakte van keegels.

TACQUET pr. 10. Cor. 7. en pr. 13. Cor. 2. 3. enz.

I. GEVOLG.

Hier op ſteunt de bepaaling van de gelykvormige kegels.

II. GEVOLG.

De keegelachtige oppervlakte van den rechten keegel ſtaat tot zyn grondvlak, zo als de zyde van den keegel tot den radius van het grondvlak.

TACQUET l. c. pr. 10. Cor. 8. en pr. 14.

III. GEVOLG.

En dus, zo de ſneede van den keegel die door den top gaat een gelykzydige driehoek is, dat is, zo de zyde van den

keegel gelyk is aan de middellyn van het grondvlak, is de kegelachtige oppervlakte van den kegel het dubbeld, en dus de *geheele* oppervlakte het drievoud van het grondvlak.

TACQUET pr. 10. cor. 9.

IV. GEVOLG.

De keegelachtige oppervlakte van eenen rechten keegel staat tot de cylindrische oppervlakte van eenen rechten cylinder die de zelfde hoogte en het zelfde grondvlak heeft, als de halve zyde van den keegel tot de hoogte van den cylinder (IV. Voorst. Gev. 1.)

TACQUET 10. cor. 9. en 14. cor. 3.

V. GEVOLG.

Dus is ook de keegelachtige oppervlakte van eenen rechten keegel gelyk aan eenen cirkel-*sector*, wiens boog aan den omtrek van het grondvlak, en wiens radius aan de zyde van den keegel gelyk is. De zyde nu van den keegel staat tot den radius van het grondvlak, zo als 360° tot den gemelden boog.

Hier uit beschryft men gemaklyk eenen *Sector*, die door omrolling van het papier een keegel van eene gegeeven hoogte en grondvlak worde.

Want, zy (fig. 193.) PQ de middellyn van den cirkel die het grondvlak van den keegel zyn zal: zy AC de zyde van den keegel: zy 2 AC of de middellyn tot PQ = 360° of de omtrek tot den boog DE, dat is tot den hoek DCE: maak dan op CA, uit C, ∠ DCA = ∠ ACE = ½ gevonden hoek: dan is de driehoek DCE de oppervlakte van den keegel, de boog DAE gelyk aan den omtrek van het grondvlak IZ, en dus, indien men DAE om den cirkel Z rolt, zal men den gevraagden keegel verkrygen.

XI. VOORSTEL. Fig. 128.

De oppervlakte van eenen geknotten rechten keegel is gelyk aan den inhoud van een rechthoekig *trapezium* waar van

de

de hoogte de zyde van den geknotten keegel is, en de onderste en bovenste zyden de omtrekken zyn van den ondersten en bovensten cirkel des geknotten keegels; of, 2°. wat op het zelfde uitkomt, die oppervlakte is gelyk aan den inhoud van een parallelogram, wiens hoogte de gemelde zyde is, en wiens grondlyn middel *arithmetisch evenredig* is tusschen de omtrekken der beiden cirkels van den keegel; of eindelyk, 3°. wat nog op het zelfde uitkomt, die oppervlakte is gelyk aan den inhoud van een' cirkel wiens radius geometrisch middenevenredig is tusschen de zyde des keegels, en de som der radiën van de beide cirkels.

TACQUET l. c pr. 15.

BEWYS Uit het X. Voorstel, en IV. 7. Gev. 8. N° 7.

AANMERKING. Indien Y de cirkel is die de bovenste oppervlakte is van een' geknotten keegel: en men stelt, (Fig. 193.) middellyn van Z tot middellyn van Y = AC: CF: zal boog GH gelyk aan den omtrek van den cirkel Y zyn: en dus zal GDEH de oppervlakte zyn van den geknotten keegel, en het vlak, daar door omrolling op de beide cirkels, den geknotten keegel uitmaakt.

XII. VOORSTEL. Fig. 131.

De kloot is de limiet van alle de veelzydige lichaamen die in den zelven beschreeven kunnen worden.

BEWYS. Uit VII. 11.

GEVOLG.

Hieruit blykt hoe men te verstaan hebbe 't geen veelen zeggen dat de spheer een veelzydig lichaam of *polyedrum* is van een *oneindig* getal *oneindig kleine* zyden; een denkbeeld dat geheel onnaauwkeurig is. (XI. 29.)

XIII. VOORSTEL. Fig. 129.

De oppervlakte van den kloot is het viervoud van den grooten cirkel van dien kloot: of, 2° wat op het zelfde uitkomt, zy is gelyk aan een cirkel wiens radius

 het

het dubbeld is van den radius des grooten cirkels; of eindelyk 3° wat nog op het zelfde uitkomt, zy is gelyk aan den rechthoek uit de middellyn en den omtrek eens grooten cirkels.

TACQUET, pr. 18—24.

BEREIDING. Men onderstelle dat 'er in den grooten cirkel een regelmatige veelhoek van een even getal zyden beschreeven, doch welk getal door vier deelbaar is. Zy ABCDEFGH een dergelyke veelhoek, AE de as van den kloot: men trekke de lynen zo als in de figuur, en men stelle dat nu de kloot door de omwenteling van den halven cirkel gevormd word: dan beschryft de omtrek ABCDE van den halven veelhoek een lichaam, bestaande uit twee gelyke keegels ABH en EFD en verschillende geknotte keegels BCGH, doch die wederzyds van den equator CG altoos ieder in hun rang gelyk zyn, zo dat 'er altoos twee gelyke gevonden worden.

BEWYS. Men neemt de oppervlakten van die keegels en geknotte keegels ABH, HBCG &c. en derzelver som: welke men tot eene eenvouwdige waardy herleid: namelyk O × AE × BE door VI., 24; de oppervlakte des keegels is dus de limiet van die som, en men stelt dus, voor de lyn BE die in dezelve voorkomt, derzelver limiet, namelyk de middellyn AE; waaruit het gestelde volgt door VII. 13. Gev. I.

AANMERKING. Men neemt een getal zyden voor den veelhoek, dat door vier deelbaar is, opdat het even zoude zyn in den halven cirkel: en opdat 'er dus geen zyde evenwydig aan den diameter zoude zyn, en 'er dus geen cylinder geboren zoude worden.

I. GEVOLG.

De oppervlakte van den kloot is dus gelyk aan de cylindrische oppervlakte van eenen rechthoekigen cylinder die om denzelven beschreeven is. (IV. Voorstel.)

TACQUET pr. 26.

II. GE-

II. GEVOLG.

De oppervlakten van verschillende spheeren staan tot elkander als de vierkanten hunner middellynen.

I. AANMERKING. Indien men dit Gevolg vergelykt met de 3. Bepaaling van het XI. Boek, en met het geen wy in de I. Aanmerking op het XII. Voorstel van het VII. Boek gezegd hebben, zal het blyken dat alle *klooten gelykvormige* lichaamen zyn.

III. GEVOLG. Fig. 189.

De oppervlakte van den kloot staat tot de geheele oppervlakte van den gelykzydigen keegel in denzelven beschreeven als 16 : 9.

Want, de oppervlakte van den kloot is het viervoud van den grooten cirkel; die van den keegel het drievoud van het grondvlak (X. Gev. 3.) Maar groote cirkel van den kloot tot grondvlak van den keegel zo als $ON^2 : \overline{GF}^2$ of $\overline{OG}^2$

$= \overline{GO}^2 : \overline{OI}^2$ (V. 5. Gev. 2.) en dus

$= OG^2 : (\frac{3}{4} OG)^2 := 16 : 9$

en dus oppervlakte van den kloot tot die van den keegel $= 16 : 9$.

TACQUET pr. 39.

IV. GEVOLG. Fig. 189.

De oppervlakte van den kloot staat tot de geheele oppervlakte van den gelykzydigen keegel om denzelven beschreeven als 4 : 9

TACQUET pr. 40.

want oppervl. van kloot GNFO : oppervl. van keegel GOF $= 16 : 9$. (Gev. 3.)

Maar, om dat $KI = \frac{1}{2} ON$,

is oppervl. van kloot KBID $= \frac{1}{4}$ oppervl. van kloot GNFO (II. Gevolg.)

dus oppervl. van kloot KBD : oppervl. van kegel BKD $= 4 : 9$

V. GE-

V. GEVOLG.

Dus is de geheele oppervlakte van den omschreeven keeg[el] het viervoud van de geheele oppervlakte van den inschree[ven] keegel.

TACQUET 41.

XIV. VOORSTEL. Fig. 129.

De ronde oppervlakte van een stuk (ACDFGHA) van eenen kloot is gelyk aan den inhoud van een' cir[]kel wiens radius eene lyn (AD) is getrokken uit he[t] stip A van dat stuk, pool van den cirkel die het grond[]vlak van het stuk is, naar den omtrek van dezen cirkel.

TACQUET pr. 25.

BEWYS. Uit het XIII. Voorstel en VI. 25.

XV. VOORSTEL. Fig. 130.

Indien er een rechthoekige cylinder om eenen kloot be[]schreeven is, en men snydt den cylinder en den kloot beide door vlakken ISQM die loodrecht op den as *BL* staan zullen de cylindrische oppervlakten van ieder stuk (ACMI) van den cylinder, gelyk zyn aan de ronde oppervlakten va[n] ieder overeenkomend stuk (SDQ) van den kloot.

TACQUET pr. 26. 27.

BEREIDING. Zy het □ AE de sneede van den cilinde[r] door den as, en dus de cirkel FBDL die van den kloot.

BEWYS. Uit het IV. en XIV. Voorstel.

XVI. VOORSTEL. Fig. 131.

De kloot is gelyk aan een' keegel, wiens hoogte de radi[us] is van den kloot, en wiens grondvlak gelyk is aan de opper[]vlakte van den kloot.

TACQUET pr. 28.

BEWYS. Uit XI. 39, en het VII. Voorstel.

I. GEVOLG.

De kloot is het viervoud van eenen keegel wiens grond[]

vlak

lak de groote cirkel van den kloot en wiens hoogte de ra-
lius van den kloot is.

II. GEVOLG.

En dus is ook de kloot het dubbeld van eenen keegel wiens grondvlak de groote cirkel van den kloot, en wiens hoogte le middellyn van den kloot is.

III. GEVOLG.

En de halve kloot is het dubbeld van eenen keegel wiens grondvlak de groote cirkel van den kloot, en wiens hoogte le radius van den kloot is.

TACQUET pr. 28. Cor. en pr. 30.

IV. GEVOLG.

Een sector van den kloot is gelyk aan een' keegel, wiens hoogte de radius van den kloot is, en wiens grondvlak de oppervlakte van den sector is.

TACQUET. pr. 29.

XVII. VOORSTEL. Fig. 131.

De cylinder is gelyk aan *anderhalf maal* den kloot om welken hy beschreeven is, zo wel wat den inhoud als de *geheele* oppervlakte betreft.

TACQUET pr. 32. —— S. p. 388. pr. 21.

BEWYS. Uit XVI, Gev. 2, VIII, XIII. en IV. Gev.

AANMERKING. ARCHIMEDES schatte dit Voorstel zo hoog, dat hy beval dat men op zyn graf eenen kloot, in eenen cylinder beschreeven, verbeelden zoude.

I. GEVOLG.

Hier uit blykt hoe men te verstaan hebbe het geen veelen zeggen, dat de kloot gelyk is aan den inhoud van den grooten cirkel, door twee derde gedeelten van de middellyn gemultipliceerd.

S. p. 390. Gev. 2.

II. GE-

II. GEVOLG.

Indien een keegel, en een cylinder den grooten cirkel v… eenen kloot tot grondvlak hebben, en tot hoogte de mi… dellyn van den kloot: zullen de keegel, de kloot, en de c… linder tot elkander staan als 1, 2, 3.

TACQUET pr. 32. Cor. 1.

S. pr. 390. Gev. 1.

XVIII. VOORSTEL.

Een kloot staat tot den cubus die om denzelven be… schreeven is, als het zesde gedeelte van den omtre… tot de middellyn.

BEWYS. Uit het XVII. en III. Voorstel.

GEVOLG.

De kloot staat tot den cubus van de middellyn, naa… de reeden door ARCHIMEDES gegeeven als 11: 21… naar die van LUDOLF als 157: 300 of 11: 21, o…

BEWYS. Uit VII. 16.

XIX. VOORSTEL. Fig. 189.

De kloot staat tot den gelykzydigen keegel in denzelve… beschreeven, als 32 - 9.

TACQUET pr. 42.

BEWYS. Kloot KMDIBP : keegel BKD $= 4\,\overline{KI}^2 \times$ CI : $BD^2 \times KL$ (XVI. en IX.)

$= 16\,CI^3 : BD^2 \times KL$

$= 16\,CI^3 : 3\,CI^2 \times KL$, (VI. 16)

$= 16\,CI^3 : 3\,CI^2 \times \frac{3}{2}\,CI$ (VI. 8. Gev. 2.)

$= 32 : 9.$

XX. VOORSTEL. Fig. 189.

De kloot staat tot den gelykzydigen kegel om denzelven beschreeven, zo als 4 : 9.

TACQUET pr. 44.

XX.

BEWYS. Kloot KMDIBP : keegel GOF $= 4\ KI^2$
$\times$ CI : $GF^2 \times$ OI (XVI, en IX.)
$= 16 \times CI^3 : GF^2 \times OI$
$= 16 \times CI^3 : 3\ CN^2 \times OI$
$= 16 \times CI^3 : 3\ CN^2 \times \frac{3}{4}\ CN$
$= 32\ CI^3 : 9\ CN^3$
$= 32\ CI^3 : 9 \times 8\ \overline{CI}^3$
$= 4 : 9$

AANMERKING. De zelfde reeden heeft ook plaats voor de oppervlakten van dien kloot en van dien cylinder, zo als blykt uit XIII. Gev. 4.

GEVOLG.

Dus is de gelykzydige keegel om den kloot beschreeven, het achtvoud van den gelykzydigen keegel binnen den kloot beschreeven.

TACQUET pr. 43.

XXI. VOORSTEL.

De gelykzydige keegel en de rechte cylinder, beiden om den kloot beschreeven, staan zo wel voor den inhoud als voor de *geheele* oppervlakte tot elkander zo als de gemelde cylinder tot den kloot of zo als 3 : 2

TACQUET pr. 45.

BEWYS. Uit het XX. en XVII. Voorstel.

XXII. VOORSTEL. Fig. 189.

Indien een gelykzydige keegel en een rechte cylinder beide om denzelfden kloot beschreeven zyn, staan hunne *geheele* oppervlakten, hunne bolle oppervlakten, hunne inhouden, hunne hoogten, hunne grondvlakken, als 3 : 2.

TACQUET pr. 46.

BEWYS. Voor de geheele oppervlakten, en de inhouden
keegel : kloot $= 9 : 4$: (XX. en XII.)
kloot : cylinder $= 2 : 3$ (XVII.)
Dus keegel : cylinder $= 3 : 2$

Voor

Voor de bolle oppervlakten:

keegel : cylinder = ½ GF² : KI² (IV, X, en Boek VII, 13, 14.)

= ½ CN² : 4 IN² (VI. 16)

= ½ CN² : CN² = 3 : 2.

Voor de boogten: keegel : cylinder = OI : KI = 3 : 2

Voor de grondvlakken: keegel : cylinder = ⊙ op GF : ⊙ op TS + ⊙ op QR

= ⊙ op GF : 2 ⊙ op TS

= GF² : 2 TS² (VII. 44.)

= 3 CN² : 2 CN²

= 3 : 2

XXIII. VOORSTEL.

Verschillende spheeren staan tot elkander in de driedubbelde reeden hunner middellynen.

EUCL. XII. 18 — S. p. 391. pr. 22.

BEWYS. Uit XVIII

XXIV. VOORSTEL.

Kleine spheeren hebben meerder oppervlakten met betrekking tot derzelver inhoud, dan grooten: en wel in omgekeerde reeden der middellynen.

BEWYS. Indien O en o de oppervlakten: I en i de inhouden, M en m de middellynen aanduiden is

O = 4 gr Cirk. = 4 omtr. gt. Cirk. × ¼ M = omtr gr. cirk. × M

I = O × ⅙ M = omtr gr. cirk. × $\frac{M^2}{6}$

dus O : I = 6 : M en $\frac{O}{I} = \frac{6}{M}$

insgelyks $\frac{o}{i} = \frac{6}{m}$: en $\frac{O}{I} : \frac{o}{i} = \frac{6}{M} : \frac{6}{m} = m : M$

XXV. VOORSTEL.

Alle regelmatige lichaamen kunnen in eenen kloot beschreeven worden.

AAN-

AANMERKING. Men vindt in het XIII, XIV, en XV Boek van EUCLIDES veele voorstellen die inschryving betreffende; wy zullen alléén aanmerken, vooreerst dat wanneer een regelmatig lichaam in eenen kloot beschreeven is, de as van den kloot ook die van het lichaam is: en ten tweeden, dat, zo dra de as van een regelmatig lichaam gegeeven is, zyne zyden en ribben ook eene bepaalde grootte hebben. Gevolglyk, om een bepaald lichaam in eenen bepaalden kloot te beschryven, moet men 1° uit de gegeeven grootte van den as des kloots besluiten, welke de grootte is van de ribben in het gemelde lichaam: en 2° de stippen van de klootsche bolle oppervlakte bepaalen op welke de hoeken van het lichaam rusten zullen.

II. AANMERKING. Wat het eerste gedeelte betreft, men kan zulks gemaklyk verrichten door het geen wy in het Gevolg van het XXXIII. Voorstel van het XI. Boek gezegd hebben. Wy zullen nu kortheidshalven door A den as van den kloot en dus ook van het lichaam, en door R de ribbe van het lichaam uitdrukken. Verder, men kan ook, de as van den kloot door eene lyn uitgedrukt zynde, de ribben van alle de regelmatige lichaamen, in dien kloot beschreeven, insgelyks door lynen uitdrukken.

Zy dan (Fig. 194.) AB de as van den kloot, AEB de halve cirkel op denzelven, en dus de halve sneede van den kloot langs den as.

I. Voor het TETRAEDRUM.

$A = R\sqrt{\tfrac{3}{2}}$:, en dus

$R = A\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ of

$R^2 = \tfrac{2}{3} A^2$ of $R^2 : A^2 = 2 : 3$

Dit is de XIII. propositie van het XIII. Boek van EUCLIDES.

Indien men nu maakt $AD : DB : AB = 2 : 1 : 3$; ZD loodrecht in D opricht; en AZ trekt: dan is AZ de ribbe van het *tetraedrum*: want 1° $ZD^2 = AD \times DB$ (V. 12. Gev. 3.) $= \tfrac{2}{3} AB \times \tfrac{1}{3} AB = \tfrac{2}{9} AB^2$; voorts $AD^2 = \tfrac{4}{9} AB^2$

dus

dus $AZ^2 = AB^2 \times \frac{6}{9} = AB^2 \times \frac{2}{3}$: en

$AZ = AB \sqrt{\frac{2}{3}}$.

EUCL. XIII. 18.

II. Voor het OCTAEDRUM.

Is $A = R \sqrt{2}$:

of $A^2 = 2 R^2$

dus $R = \frac{A}{\sqrt{2}}$: of $R : A = 1 : \sqrt{2}$

Dit is EUCL. XIII, 14.

Men trekke, uit C, CE loodrecht, en dan AE: AE is de ribbe van het Octaedrum: want $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{EC}^2 = \frac{2}{4} \overline{AB}^2 = \frac{1}{2} \overline{AB}^2$: dus $AE = AB \sqrt{\frac{1}{2}}$.

EUCL. XIII. 18.

II. Voor den CUBUS.

Is $A = R \sqrt{3}$: dus $R = \frac{A}{\sqrt{3}}$

of $A^2 = 3 R^2$.

dus $A^2 : R^2 = 3 : 1$

Dit is EUCL. XIII. 15.

Trek ZB: ZB is de ribbe van den Cubus: want $\overline{ZB}^2 = ZD^2 + DB^2 = \frac{2}{9} AB^2 + \frac{1}{9} AB^2 = AB^2 \times \frac{1}{3}$: dus $ZB = AB \sqrt{\frac{1}{3}}$.

EUCL. XIII. 18.

III. Voor het ICOSAEDRUM.

Is $A = R. \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}}$.

dus $R = A. \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} = A \sqrt{\frac{(3 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}{(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}}$

$= A \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{20}} = A \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$.

Stel

Stel $AH = AB$: trek HC: uit T, TK loodrecht: en dan AT deeze is de ribbe van het Icosaedrum:

want $TK : KC = HA : AC$: dus $KC = \frac{1}{2} TK$

dus $TC^2 = 5 KC^2 = \frac{1}{4} AB^2$: en $KC = AB \sqrt{\frac{1}{20}}$.

Ook is $AT : AK = AB : AT$.

dus $AT^2 = AK \times AB$.

Maar $AK = AC - KC = \frac{1}{2} AB - AB \sqrt{\frac{1}{20}} = \frac{1}{2} AB \left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)$

dus $AT^2 = \frac{1}{2} AB \left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right) \times AB$

$$= AB^2 \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2\sqrt{5}} = AB^2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10.}\right)$$

dus $AT = AB \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10.}}$

V. Voor het DODECAEDRUM.

is $A = R \times \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1}$

$R = \frac{A}{2\sqrt{3}} \times (\sqrt{5} - 1)$.

Men snyde dus ZB in N in uiterste en middelste reeden: dan is NZ de ribbe van het Dodecaedrum:

want $NZ = \frac{1}{2} ZB (\sqrt{5} - 1)$ door IV. 7. Aanm. 7.

maar $ZB = AB \sqrt{\frac{1}{3}}$:

dus $NZ = \frac{AB}{2\sqrt{3}} \times (\sqrt{5} - 1)$

III. AANMERKING. Zie daar dan de grootte der ribben van de vyf lichaamen in den zelfden kloot beschreeven bepaald, en door lynen uitgedrukt. EUCLIDES heeft ook, zo als wy gezien hebben, de grootte van de ribben van het Tetraedrum, het Octaedrum, en den Cubus bepaaldelyk opgegeeven; doch niet van het *Icosaedrum* en het *Dodecaedrum*: en hier in zy wy dus verder. Hy geeft aan de ribbe van het *icosaedrum* den naam van de *kleine onmeetbaare* lyn: en aan die van het *dodecaedrum* den naam

van *apotome*, dat is de *afgesneedene*. Men zoude eene vry omslagtige verklaaring van veele stukken uit het zeer moeijelyke X. Boek van EUCLIDES moeten geeven om dit alles te verklaaren: genoeg zy het hier te melden, dat men ook *apotome* noemt, de stukken van eene lyn in uiterste en middelste reeden gesneeden, het geen hier voor de ribbe van het dodecaedrum plaats heeft: en dat men *kleine onmeetbaare* (*rationalis minor*) noemt, eene lyn wier vierkant of magt, gelyk is aan den rechthoek, (of het product,) van eene meetbaare lyn en de vierde *apotome*: (X. 95) en men noemt vierde *apotome* het verschil (byv. $5 - \sqrt{5}$) van twee grootheeden (5 en $\sqrt{5}$) dit alleen in magt (dat is 5^2 en 5) en niet in lengte meetbaar zyn: en verder zodanig gesteld zyn dat het verschil (20) hunner vierkanten (25 en 5) alleen in magt, en niet in lengte (dat is niet $\sqrt{20}$) meetbaar is met de grootste grootheid (5). Dit nu is het geval voor de ribbe van het icosaedrum: want $AT^2 = \frac{AB^2}{10} \times (5 - \sqrt{5}) = \frac{AB}{10} \times AB(5 - \sqrt{5})$: dat is het product van eene meetbaare lyn $\frac{AB}{10}$ en eene onmeetbaare $AB\,(5 - \sqrt{5})$ die een vierde apotome is.

IV. AANMERKING. Nu blyft er nog overig de inschryving zelve.

I. Voor het TETRAEDRUM.

AZ is de ribbe van het *Tetraedrum*: dus zullen de drie ribben, die het driehoekig grondvlak uitmaaken, in het vlak van den kleinen cirkel moeten staan, waarvan ZD de radius is. maar $ZD^2 : AB^2 = \frac{2}{9} AB^2 : AB^2 = 2 : 9$

en dus $ZD : AB = \sqrt{2} : 3$ of

$ZD : \frac{1}{2} AB = \sqrt{2} : \frac{3}{2} = 2\sqrt{2} : 3$. En dus zal men den cirkel hebben, in welken men eenen gelykzydigen driehoek beschryft, die met de lynen naar den top A getrokken het tetraedrum zal uitmaaken.

II. Voor

II. Voor het OCTAEDRUM.

Voor het *Octaedrum* is AE de ribbe: dus EC de radius van den cirkel, waarin het vierkant dat de beide pyramiden welke het vlak van het octaedrum uitmaaken vereenigt: en dus indien men eenen grooten cirkel loodrecht op den as ſtelt, beſchryft men ſlechts een vierkant in dien cirkel: en trekt lynen naar de beide uiteinden van den as.

EUCL. XIII. 14.

III. Voor het ICOSAEDRUM.

AT is de ribbe van het *Icoſaedrum*: men neemt vooreerst op den kloot eenen kleinen cirkel, loodrecht op den as, en waar van $TK = 2\,KC = 2\,AB\sqrt{\tfrac{1}{20}} = AB\sqrt{\tfrac{1}{5}}$ de halve middellyn is. Dit komt juist overeen met EUCLIDES XIII, 16, want hy ſtelt byv. in Fig. 75: AD de middellyn van den kloot; maakt $AF : FD = 4 : 1$; trekt BD en neemt die voor den radius van den cirkel;

nu is $AD : BD = BD : FD$

en dus $BD = \sqrt{AD \cdot FD} = \sqrt{AD \times \tfrac{1}{5} AD} = AD\sqrt{\tfrac{1}{5}}$.

Men beſchryve dan verder in dien cirkel een' vyfhoek, die de vyfhoek (DGHBC fig. 113) zyn zal, welken de vyf gelykzydige driehoeken, in den top vereenigd, uitmaaken.

Men beſchryft uit den anderen pool B eenen dergelyken cirkel: men laat door de poolen, en door twee hoeken van den reeds beſchreeven vyfhoek, twee halve cirkels gaan, die den tweeden kleinen cirkel in twee ſtippen ſnyden: men deelt den boog tusſchen die twee ſtippen in twee gelyke deelen: Men maakt van het ſtip van deeling af in dien kleinen cirkel een' vyfhoek, die gelyk zal zyn aan den reeds beſchreeven, doch zodanig geſteld dat zyne hoeken loodrecht over het midden der zyden van den anderen ſtaan. Men trekt lynen van de hoeken van den eenen vyfhoek naar de beide uiteinden van de tegenoverſtaande zyde van den anderen en van de hoeken van iederen vyfhoek naar den pool: en men heeft het *icoſaedrum*.

V. Voor den CUBUS.

Daar ZB de ribbe is van den *Cubus* beschryft men uit B met ZB op de oppervlakte van den kloot eenen cirkel waarvan ZD de radius is: dus is die cirkel de zelfde als voor het tetraedrum. Indien men in dien cirkel een' gelykzydigen *driehoek* beschryft, zyn dezelfs zyden de diagonaalen van *drie* vierkanten die den cubus uitmaaken; en dus uit B lynen trekkende naar de zyden van dien driehoek, heeft men drie ribben van den cubus.

Indien men door de poolen en de uiteinden van een der ribben een' grooten cirkel laat gaan, dan uit den tweeden pool, en om denzelven een' gelyken kleinen cirkel trekt als uit den eersten pool, en in denzelven, te beginnen met de plaats daar hy door den gemelden grooten cirkel gesneeden wordt, weder een' gelykzydigen driehoek maakt, en naar denzelven uit den tweeden pool lynen trekt, heeft men wederom drie ribben; dezelven met de anderen vereenigende verkrygt men de zes overigen, en dus den geheelen cubus.

V. Voor het DODECAEDRUM.

De beschryving van het *Dodecaedrum* hangt van den cubus af: de cubus ééns beschreeven zynde, zyn de acht stippen daar de acht hoeken van den cubus raaken, ook acht stippen daar acht der hoeken van het dodecaedrum rusten. Indien men de ribben van den cubus in twee gelyke deelen snydt, en de tegenovergestelde deelings-stippen met lynen vereenigt, zullen deezen zich op ieder vierkant of zyde van den cubus, in het middelpunt van dat vierkant vereenigen. Indien men dan op eene dier lynen, in een dier vierkanten genomen, ter wederzyde van het middelpunt, de helft stelt van het grootste der twee stukken van de zyde' des cubus wanneer die in uiterste en middelste reeden gesneeden is, en uit de uiteinden dier halve stukken loodlynen tot aan de holle oppervlakte van den kloot richt: zal de lyn die de uiteinden van deeze loodlynen bespant *de ribbe* zyn van het dodecaedrum: en dus de uiteinden van die ribbe

met de naastliggende hoeken van den cubus vereenigende, verkrygt men reeds vyf ribben van het dodecaedrum: men gaat op de zelfde wyze voort voor ieder vlak van den cubus: met dit onderscheid, dat men in de vier vlakken, die aan het vlak dat men voor het eerste genomen heeft grenzen, niet de lynen neemt welke met de gebruikte lyn evenwydig zyn, maar die welke met deezen rechte hoeken maaken. Men verkrygt dus voor ieder vlak, vyf ribben: en gevolglyk voor de zes, de dertig ribben van het dodecaedrum.

EUCL. XIII. 19.

V. AANMERKING. Indien men nu de vyf lichaamen in eenen en den zelfden kloot beschryven wil, moet de as van allen de zelfde zyn, de middellyn namelyk van den kloot: er blyft dan niets overig dan de ribben te vinden: en men verkrygt uit het geen hier boven gezegd is het volgende; noemende A den as van den kloot.

I. Voor het TETRAEDRUM.

Ribbe $= A \times \sqrt{\tfrac{2}{3}}$:

Oppervlakte: $= 2\, A^2 \times \sqrt{\tfrac{1}{3}}$

Inhoud $= \dfrac{A^3}{9\sqrt{3}}$

II. Voor het OCTAEDRUM.

Ribbe $= \dfrac{A}{\sqrt{2}}$

Oppervlakte: $A^2 \sqrt{3}$

Inhoud $= \dfrac{A^3}{6}$

III. Voor het ICOSAEDRUM.

Ribbe $= A \sqrt{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$

$$\text{Oppervlakte} = 5\,A^2 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right) \sqrt{3}$$

$$\text{Inhoud} = \tfrac{10}{12}\,A^3 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right) \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{2\,(5 - \sqrt{5})}}$$

$$= \tfrac{10}{12}\,A^3 \sqrt{\frac{2}{5\,(5 - \sqrt{5})}}$$

IV. Voor den CUBUS.

$$\text{Ribbe} = A \times \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

$$\text{Oppervlakte} = 2\,A^2$$

$$\text{Inhoud} = \frac{A^3}{3\sqrt{3}}$$

V. Voor het DODECAEDRUM.

$$\text{Ribbe} = A \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{Oppervlakte}\ 5\,A^2 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$$

$$\text{Inhoud} = A^3 \times \tfrac{5}{12} \sqrt{\frac{2\,(3 + \sqrt{5})}{15}}$$

I. GEVOLG.

Hier uit volgt 1° dat de oppervlakte van het dodecaedrum staat tot die van het icosaedrum

$$= 5\,A^2 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} : 5\,A^2 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right) \sqrt{3}$$

$$= 1 : \sqrt{3} \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$$

$= \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \sqrt{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$: dat is, de oppervlakte van het dodecaedrum staat tot die van het icosaedrum als de ribbe van den cubus tot die van het icosaedrum;

EUCL. XIV. 4.

II. GE-

II. GEVOLG.

Het dodecaedrum ſtaat tot het icoſaedrum

$$= A^3 \times \tfrac{5}{12} \sqrt{\frac{2(3+\sqrt{5})}{15}} : \tfrac{10}{12} A^3 \sqrt{\frac{2}{5(5-\sqrt{5})}}$$

$$= \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3}} : 2\sqrt{\frac{1}{5-\sqrt{5}}}$$

$$= 1 : 2\sqrt{\frac{3}{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}}$$

$$= 1 : 2\sqrt{\frac{3(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}}$$

$$= 1 : \sqrt{\frac{3(3-\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$$

En dus ſtaat het dodecaedrum tot het icoſaedrum zo als de ribbe van den cubus tot die van het icoſaedrum.

EUCL. XIV. 6.

III. GEVOLG.

Dus hebben de oppervlakten van het dodecaedrum en icoſaedrum de zelfde reeden tot elkander als de inhouden dier zelfde figuuren, namelyk die van de ribbe van den cubus tot de zyde van het icoſaedrum:

IV. GEVOLG.

Indien nu L eene lyn is in uiterſte en middelſte reeden geſneeden, zy G het grootſte, K het kleinſte ſtuk: zo is (IV, 7. Aanm. 6.) $G = \frac{L}{2}(\sqrt{5}-1)$

$K = \frac{L}{2}(3-\sqrt{5})$ en dus

$$\sqrt{L^2+G^2} : \sqrt{L^2+K^2} = \sqrt{L^2+\frac{L^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2} :$$

 $\sqrt{L^2}$

$\sqrt{L^2 + \frac{L^2}{4}(3 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} : \sqrt{18 - 6\sqrt{5}}$

$= 1 : \sqrt{\frac{3(3 - \sqrt{5})}{5 - \sqrt{5}}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$

= ribbe van den cubus tot die van het icosaedrum. Maar $\sqrt{L^2 + G^2}$, en $\sqrt{L^2 + K^2}$ zyn de zyden wier vierkanten, dat is de vierkanten op de zelven gemaakt, gelyk zyn aan de sommen der vierkanten op de geheele lyn en het grootste of kleinste stuk: en dus staat de ribbe van den cubus tot die van het icosaedrum, zo als de lyn wier vierkant gelyk is aan het vierkant van eene lyn in uiterste en middelste reeden gesneeden te samen met het vierkant van het grootste stuk, tot de lyn wier vierkant gelyk is aan het vierkant van de gemelde gesneeden lyn te samen met dat van het kleinste stuk.

EUCL. XIV. 5.

V. GEVOLG.

De driehoek van het icosaedrum, en de vyfhoek van het dodecaedrum, kunnen in den zelfden cirkel beschreeven worden.

Want de radius of straal des cirkels waar in een gelykzydige driehoek beschreeven is, is $S = R\sqrt{\tfrac{1}{3}}$:

doch hier $R = A\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}$: dus

$$S = A\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3(5 - \sqrt{5})}}$$

De radius van den cirkel waar in een vyfhoek beschreeven wordt, is $S = R\sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}}$ (Zie bl. 433. reg. 3.)

Maar $R = A\frac{(\sqrt{5} - 1)}{2\sqrt{3}}$:

dus $S = A\sqrt{\frac{2.(\sqrt{5} - 1)^2}{4 \times 3(5 - \sqrt{5})}} =$

$$= \sqrt{\frac{2(6 - 2\sqrt{5})}{4 \times 3(5 - \sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3(5 - \sqrt{5})}}$$

en dus die radius gelyk aan den radius van den cirkel waar in de driehoek van het icosaedrum kan beschreeven worden.

EUCL. XIV. 2.

AANHANGSEL

OVER DE WORTELTREKKING UIT GETALEN.

Wy hebben in de I. en II. Aanmerking op het II. Voorstel van het II. Boek, en in het II. Gevolg van het XIII. Voorstel van het XI. Boek de grondbeginsels opgegeeven, waarop de regels, die men tot de worteltrekking uit getalen gebruikt, gevestigd zyn: wy oordeelen het niet ondienstig thans aantetoonen hoe die regels in de daad uit de gemelde grondbeginselen worden afgeleid.

Den *Quadraat-* of den *Cubiek-wortel* uit een getal te trekken is, het getal te vinden dat, door zich zelf éêns of twee maalen vermeenigvuldigd, wederom het gegeeven getal opleevert.

Het getal, dat de wortel is, kan begreepen worden uit zo veele deelen te bestaan als het cyffer letters heeft: dus by voorbeeld bestaat 376 uit drie deelen 300, 70, en 6: of uit 3, 7, 6, wel verstaande dat in het laatste geval ieder cyffer eene tien-dubbelde waarde verkrygt wanneer men eene andere cyffer ter rechte zyde van dezelve plaatst.

De regel nu bestaat uit twee deelen: vooreerst het bepaalen van het getal der cyfferletters die den wortel uitmaaken: en dan het vinden van ieder dier cyffers in het byzonder.

I. Over den QUADRAAT WORTEL.

De Quadraat-wortels van alle de getalen *tusschen* 1 en 100 bestaan uit éêne cyfferletter: die van de ge-

ta-

talen tusschen 100 en 10,000 uit twee: die van de getalen tusschen 10,000 en 1,000,000 uit drie en zo voorts: zo dat men altoos weeten kan uit hoe veel letters de Quadraat-wortel van een gegeeven getal bestaan zal. Men behoeft slechts, van de rechter hand te beginnen, het gegeeven getal in sneeden, ieder van twee cyfferletters, te verdeelen; en dus, indien het getal der cyfferletters oneeven is, zal de laatste sneede slechts uit ééne bestaan. De wortel zal uit zo veele cyfferletters (en dus deelen) bestaan, als er sneeden gemaakt zyn.

Ieder paar cyfferletters in het gegeeven getal geeft dus ééne cyfferletter voor den wortel; en iedere sneede heeft in het getal eene honderd-dubbele waarde met betrekking tot de volgende, zo als ook iedere letter van den wortel eene tiendubbele waarde heeft met betrekking tot haare volgende. (*a*)

Om nu den wortel uit eén gegeeven getal te trekken, heeft men slechts te letten op de uitdrukking $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2 = a^2 + (2\,a + b)\,b$, en het gegeeven getal met dezelve te vergelyken.

Ik wil byv. den Quadraat wortel uit 1764 trekken: ik deel het getal in sneeden van twee letters aldus 17 | 64: waar door ik weet dat de wortel uit twee letters zal

(*a*) Byv. In het getal 17 | 64: is de eerste sneede, in zich zelve beschouwd 17, en de tweede 64: doch zo ik de eerste met de tweede vergelyk, is de eerste met betrekking tot de tweede niet 17, maar 1700, dus honderdmaal meer dan in het afgetrokkene. Insgelyks in den wortel 42 is de eerste cyffer in het afgetrokkene of op zich zelve beschouwd, 4: de tweede is 2: doch zo ik de eerste met de tweede vergelyk, wordt die eerste 40, of krygt eene tiendubbelde waarde,

... met a, de andere m... ...4 met $a^2 + 2ab + b^2$ e... ...), met a^2. Het vierkant da... ...0) komt is 16 (of 1600), waa... ...of 40): ik stel dus 4 (dat is 40)

OVER DE WORTELTR...

Wy hebben in ... ...rste gedeelte van den wortel: ik ...Voorstel van het ... 16 (of 1600) van 17|64 af, de het XIII. Voor... ...gelyk zyn aan $2ab + b^2 = (2a + b)$ fels opgegeev... ...dubbeld van 4 (of 40) dat is 8 (of 80) wortelirekkir... vergelyk met $2a$: ik deel door hetzelve 16 wy oordeele... ...t is $2ab$! en het quotient 2 is waarschyn- die regels ... ...de letter van de wortel of b, want $\frac{2ab}{2a} = b$. worden ...

Den ...jus de 2 naast de 8, dat is, ik voeg de 2 by de te tre... ...ik neem $2a + b$: ik multipliceer 82 door 2 één... ...$(2a + b)$ door b): ik verkryg 164 die ik ge... ...$2ab + b^2$ vergelyk: en daar dit product gelyk ...an de rest 164, blyft er na de aftrekking niets ...at: en dus is 42 de wortel van 1764. Zie hier de ...geele bewerking in orde gesteld.

getal wortel

17	64	42
16		82
		2
1	64	164
1	64	
	0	

Ik heb gezegd dat 2 waarschynlyk de tweede letter van den wortel is: want indien 82×2 grooter waare geweest dan de rest, 164, zoude men daaruit gezien hebben dat 2 te groot is, en men had dus voor 2 eene kleinere cyffer moeten gebruiken.

Wanneer de wortel uit drie of meerder cyfferlet-

ters

.. zelfde wyze te werk, en
..rde letter te vinden, de twee
eéne uitmaakende, volgens de
$+ c)^2 = \overline{a + b}^2 + 2(a + b)$ ..
..u de twee eersten gevonden zyn, is
..ehandeld, en de overige cyffers van
..al zyn gelyk aan $2(a + b) c + c^2$.
.. letter te vinden beschouwt men de
..als éène letter uitmaakende, en men gaat
..voort.

REGEL.

.. het gegeeven getal (by voorb. (488601) in
..needen ieder uit twee letters bestaande, beginnende aan de rechterhand (48 | 86 | 01).

.. Neem het quadraat (36) dat het naast aan het getal (48) van de eerste sneede komt: trek het van die sneede af, en teeken de rest (12) aan. De wortel (6) van dat quadraat is de gezochte cyffer van den wortel.

III. Stel de cyffers van de volgende sneede (86) naast de rest, en beschouw dit getal (1286) als één getal.

IV. Neem het dubbeld (12) van de gevonden letter (6) des wortels: divideer daar door het getal N° III. de laatste cyffer niet meede reekenende (dus hier 128): merk het quotient (9) aan als de nieuwe cyffer van den wortel.

V. Stel het zelfde quotient (9) naast het dubbeld getal N° IV: multipliceer dan dat getal (129), als één getal beschouwd, door dat quotient of die nieuwe cyffer van den wortel (9): trek het product (1161) van de rest N° III. af, en teeken de rest (125) aan.

VI.

VI. Zo er nog meerder letters in het gegeeven getal zyn, ſtelt men de volgende ſneede (hier 01) naast de gemelde rest (125), en men beſchouwt dit getal als één getal (12501)

VII. Vervolgens beſchouwt men de reeds gevonden letters (69) van den wortel als ééne letter, en men gaat volgens N° IV, V, en VI. voort, tot dat men alle de ſneeden van het gegeeven getal uitgewerkt heeft. Zo er dan geen *rest* over blyft, is het gegeeven getal een quadraat getal, waarvan het gevonden getal de wortel is.

VIII. Zo er een *rest* over blyft, ſtelt men zo veel paaren nullen naast die *rest* als men in den wortel decimaale letters tot nadering wil gebruiken, en men ziet ieder paar aan als eene nieuwe ſneede van het gegeeven getal, dat men uitwerkt volgens N° IV, V, en VI.

IX. Wanneer men eene breuk [illegible], (by v. $\frac{16}{81}$) neem[t] men afzonderlyk de wortels van den teller en van den noemer en maakt van deezen eene breuk (…) die de gevraagde wortel is: of men brengt (z[o] de teller en noemer geen quadraat getalen zyn) de breuk tot eene decimaale breuk, waaruit me[n] den wortel trekt.

Zie hier drie uitgewerkte voorbeelden.

I. Den wortel te trekken uit 488601.

```
48 | 86 | 01     ⎧ 699
36               ⎨ 12.9     138. 9
12 86            ⎩    9         9
11 61              1161     125 01
   125 01
   125 01
        0
```

De wortel is 699.

D[e]

II. Den wortel te trekken uit 300

```
3 | 00      { 17.3205
1           { 2·7 | 34·3 | 3462
200         { · 7 |    3 |   .2
189           189 | 1029 | 6924
 11·00                 3464.05
 10 29                       5
    71·00              1732025
    69 24
     176.00
     1760000
     1732025
       27975.
```

De wortel is ten naasten by 17. 32025

III. Den wortel te trekken uit 0.273: dat is uit $\frac{273}{1000}$: daar de noemer geen quadraat getal is; multipliceer ik door 10, en de breuk wordt $\frac{2730}{10000}$; dus zal de noemer van den wortel 100 zyn, dat is, men krygt honderdste gedeelten: trekkende den wortel uit 2730, heeft men

```
27 | 30     { 0.522 &c.
25 |        { 102 | 1042
 2 \ 30     {   2 |    2
 2  04        204 | 2084
    2600
    2084
     516
```

Dus is de wortel grooter dan 0,52, of dan 0,522; en men kan al verder voortgaande zo na komen als men wil

II. Over den CUBIEK-WORTEL.

De cubiekwortels van alle de getalen tusschen 1 en 1000 bestaan uit ééne cyfferletter: van de getalen tusschen 1,000 en 1,000,000 uit twee cyfferletters: van de getalen tusschen 1000,000 en 1,000,000,000 uit

cyfferletters, en zo voorts; zo dat men altoos weeten kan uit hoe veele letters de cubiek-wortel van een gegeeven getal bestaan zal: men moet slechts, van de rechterhand te beginnen, het getal in sneeden afdeelen ieder van 3 letters: en dus, indien het getal cyfferletters in het gegeeven getal niet door drie deelbaar is, zal de laatste sneede, die aan de linkerhand, maar éénе of twee cyffers bevatten.

Ieder drietal cyfferletters in het getal geeft dus ééne cyfferletter voor den wortel: en iedere sneede heeft in het getal eene duizenddubbele waarde met betrekking tot de volgende; zo als ieder letter van den wortel eene tiendubbele waarde heeft met betrekking tot de volgende cyffer.

Om nu den cubiek-wortel uit een gegeeven getal te trekken behoeft men slechts te letten op de uitdrukking (XI. 13. Gev. 2.) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$, en het gegeeven getal daar meede te vergelyken.

Ik begeer den cubiek-wortel uit 74 088 te trekken. Ik deel dat getal in sneeden, aldus 74 | 088, waar door ik weet dat de wortel uit twee letters zal bestaan, waar van ik de eene met a de andere met b zal vergelyken.

Ik vergelyk dus ook 74 | 088 met $a + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$: en wel 74 (of hier 74 000) met a^3. Het cubiek getal dat het naast aan 74 komt is 64 (*) (of

(*) Men dient een tafeltje voor oogen te hebben van de cubi der 10 eerste getalen: zie hier hetzelve

cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
wortels	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

(of hier 64 000), waarvan de wortel 4 (of 40) de eerste letter is van den gezochten wortel: ik trek dat cubiek-getal van 74 | 088 af: de rest is 10 088 die gelyk is aan $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Ik neem het quadraat van de reeds gevonden letter 4 (of 40), dat is 16 (of 1600): ik multipliceer het door 3, en kryg 48 (of 4800) welk getal ik dus vergelyk met $3a^2$: ik deel 100 door die 48 (of 10088 door 4800) en verkryg tot quotient 2, die *waarschynlyk* de tweede letter van den gezogten wortel is, om dat $\frac{3a^2b}{3a^2} = b$. Ik stel dus 2 naast de eerste letter en heb 42.

Ik multipliceer het drievoudig quadraat van de eerste letter, hier 48, door de tweede letter, het product is 96 (of 9600 $= 3a^2b$): ik multipliceer het drievoudig quadraat 12 van de tweede letter 2 door de eerste letter 4: het product is 48 (of 480 $= 3ab^2$): ik neem den cubus van de tweede letter 2: het product is 8 $= b^3$: ik addeer die drie producten (96, 48, 8) te samen, wel lettende van het tweede (beginnende aan de rechter hand,) eene letter verder naar (*n*) de rechterhand te plaatsen dan het eerste, het derde eene letter meer naar de rechterhand dan het tweede (*m*): de som 10088 is $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Ik

(*n*) Immers, is die 96 eigenlyk 9600, en de 48 maar 480: of, in het algemeen, daar de eerste letter eene tienvoudige waarde heeft van het geen zy in het afgetrokken schynt te hebben, zal het quadraat van die letter eene tienvoudige waarde bezitten ten opzichte van het product dier eerste letter door het quadraat van de tweede gemultipliceerd.

(*m*) Immers is die 48 eigenlyk 480: in het algemeen daar de eerste letter in de daad eene tienvoudige waarde bezit, heeft

Ik trek die som van de gegeeven rest af, en zie dat er niets overig blyft: waaruit ik besluit dat 42 de gezogte wortel is. Zie hier de bewerking

```
74 | 088  { 42
64 |      { 16     4 8
-----     {  3     3
10 | 088    48    12
10   088     2     4
--------    96    48
      0      48
               8
            -----
            10088
```

Ik heb gezegd dat 2 *waarschynlyk* de tweede letter van den wortel zyn moest: want indien de gemelde producten en cubus te samen grooter geweest waaren dan de rest 10 088, zoude het een teeken zyn dat 2 te groot is voor de tweede letter, en ik zoude een kleiner getal moeten gebruiken.

Indien de wortel uit drie of meerder letters *bestaat*, gaat men op den zelfden voet voort, en men beschouwt de reeds gevondene letters als één getal, volgens de uitdrukking $(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 \times c + 3(a+b)c^2 + c^3$ en insgelyks voor de vierde, vyfde letter enz.: waar uit deeze regel afgeleid wordt, welke wy teyens op een voorbeeld zullen toepassen.

REGEL.

1. Deel het gegeeven getal (5,268,024), beginnende aan de rechterhand in sneeden ieder van drie cyfferletters.

de

ook het product van die letter door het quadraat van de tweede eene tienvoudige waarde met betrekking tot het product van het zelfde quadraat door die tweede letter, dat is tot den cubus van de tweede letter.

II. Neem den Cubus (1) die het naast komt aan het getal (5) van de eerste sneede aan de linkerhand: trek dien van dat getal af: teeken de rest (4) aan. De wortel (1) van dien cubus is de gezochte cyffer van den wortel.

III. Stel de cyffers (2 6 8) van de volgende sneede naast die rest (4) en beschouw het als één getal (4268)

IV. Neem het quadraat (1) van die eerste cyffer: multipliceer het door 3: divideer door dat product (3) het gemelde getal N° III, de twee laatste cyffers niet meede rekenende: het quotient (hier 7) (*n*) is *waarschynlyk* de volgende letter van den wortel.

V. Multipliceer het drievoudig quadraat (3) van de reeds te vooren gevonden letter door de nu op nieuws gevonden (7) N° IV: multipliceer het quadraat (49) van die nieuwe letter door 3: en het product (147) door de te vooren gevonden letter (1): neem den cubus (343) van die nieuwe letter (7). Addeer de drie producten te samen, stellende het tweede, eene letter meer naar de rechterhand dan het eerste, en het derde dan het tweede: trek de som (3913) van de gemelde rest N° III. af: teeken de rest (355) aan.

VI. Zo er nog meerder letters in het gegeeven getal zyn, stelt men de volgende sneede (hier 024) naast de gevonden rest (355) en men beschouwt dit getal als één getal (355024) uitmaakende.

VII.

(*n*) Hier gaat wel is waar 3 veertien maalen in de 42: doch men kan niet meer dan 9 voor een quotient stellen: en indien men 9 stelde zoude men door de volgende bewerking N° V. vinden dat niet alleen 9 maar ook 8 te groot is: men moet hier het quotient bynaar altoos veel kleiner neemen als in den eersten opslag schynt.

VII. Men ziet de reeds gevonden letters (17) van den wortel als ééne letter aan en gaat voort volgens N° IV, V, VI, tot dat men alle de sneeden van het getal uitgewerkt heeft: zo er dan geen *rest* over blyft is het gegeeven getal een cubiek-*getal*, waar van het gevonden getal (174) de wortel is.

VIII. Zo er eene *rest* over blyft, stelt men zo veel maalen drie nullen agter het getal als men in den wortel decimaalen tot nadering wil gebruiken. Men ziet ieder drietal nullen aan als eene nieuwe sneede van het gegeeven getal die men uitwerkt volgens N°. IV, V, VI.

IX. Wanneer men eene breuk heeft (byv. $\frac{64}{125}$) neemt men afzonderlyk de cubiek-wortels (4 en 5) van den teller en van den noemer, en maakt van deezen eene nieuwe breuk ($\frac{4}{5}$) die de cubiek wortel van de gegeeven breuk is: of men brengt (zo de teller en de noemer geen cubiek-*getalen zyn*) de breuk tot eene decimaale *breuk*, *den* teller zo ver uitstrekkende, of, zo die bepaald is, er zo veele nullen byvoegende als nodig is op dat na die byvoeging de noemer een cubiek getal zy: als dan handelt men met den teller als met een geheel getal. Zie hier het voorbeeld uitgewerkt.

	174			
5 | 268 | 024	1	$7^2 = 49$	17	$4^2 = 16$
1	$1^2 = 1$	× 3	$17^2 = 289$	× 3
4 | 268	× 3	147	× 3	48
3 913	3	× 1	867	× 17
355.024	× 7	147	× 4	816
355.024	21	$7^3 = 343$	3468	$4^3 = 64$
0	147		816	
	343		64	
	3913		355024	

WERKSTUKKEN

UIT DE

GRONDBEGINSELEN

DER

MEETKUNDE.

WAARSCHOUWING.

Achter ieder Werkſtuk vindt men by het woord OPLOSSING, de aanwyzing van die Werkſtukken door welke het voorgeſtelde Werkſtuk opgelost wordt: en by het woord BEWYS, de aanwyzing der Voorſtellen uit de Grondbeginſelen door welken aangetoond wordt dat de Oplosſing indedaad aan het gevraagde voldoet.

WERK

WERKSTUKKEN

UIT

DE GRONDBEGINSELEN DER MEETKUNDE.

BEPAALING.

Men zegt, *in navolging der ouden*, dat een vraagstuk of werkstuk door de Meetkunde *in den strikſten zin* wordt opgelost, als men de oplosſing verricht enkel door middel van rechte lynen en cirkels, dat is, met behulp alleen van lineaal en pasſer.

AANMERKING. Ik zeg *in navolging der ouden*, en *in den strikſten zin*; doch federt den tyd van CARTESIUS neemt men het woord van *geometriſche oplosſing* in eenen ruimer' zin. Al wat niet alleen door cirkel en rechte lyn, maar ook door zogenaamde *geometriſche lynen*, zo als de *kegelſneeden*, wordt opgelost, wordt tot de *geometriſche* oplosſingen gebragt. Wy zullen hier alleen van geometriſche oplosſing in den zin der ouden ſpreeken.

Men vooronderſtelt dan deeze drie dingen.

I.

Dat men uit een gegeeven ſtip eene rechte lyn trekken kan, het zy onbepaaldelyk, het zy gelyk aan eene gegeeven lyn, het zy tot een ander gegeeven ſtip.

II.

Dat men eene lyn naar welgevallen kan verlengen.

III.

Dat men uit een gegeeven ſtip, met eenen gegeeven' radius, een' cirkel trekken kan.

EUCL. I. 12. —— W. g. §. 95. —— St. p. 28. pr. 10.
OPLOSSING. Eerst gaat men uit F volgens de 3 vooronderstelling te werk: dan insgelyks volgens dezelve, en uit het 6 *Axioma* van het I. Boek uit D en E: men trekt FHG die de gezogte lyn is.
BEREIDING tot het Bewys: men trekt FD, FE, GD, GE.
BEWYS. Uit het 3 gevolg van het XII. Voorstel van het I. Boek.

VI. WERKSTUK. Fig. 7.

Uit een gegeeven stip E eene lyn EG te trekken die evenwydig is aan eene gegeeven lyn *I M*.

EUCL. I. 31. — W. g. §. 91. —— St. p. 39. pr. 19.
I. OPLOSSING. Eerst uit E door het V. Werkstuk: dan uit eenig stip D door het III. en het I. Men trekt eindelyk, door E en K, de lyn EG die de gezochte lyn is.
BEREIDING tot het bewijs. Men trekt ED.
BEWYS. Uit het IV. en het VIII. Voorstel: of uit het XVIII. Voorstel, allen uit het I. Boek.
II. OPLOSSING. Men trekt ED *naar welgevallen*: en gaat uit D volgens het III. Werkstuk van het II. Boek te werk.
BEWYS. Uit het IV. Voorstel van het I. Boek.

II. AFDEELING.

OVER DE VERDEELING DER LYNEN.

VII. WERKSTUK. Fig. 6.

Eene gegeeven lyn DE in twee gelyke deelen EH, HD, te verdeelen.

EUCL. I. 10. — W. g. §. 120 —— St. p. 26. pr. [illegible]
OPLOSSING. Men gaat uit de beide uiteinden E en D volgens de 3 vooronderstelling, en het 6 *Axioma* van het

Bo

Boek tweemaal te werk, zo dat twee cirkelbogen zich in F, twee andere zich, het zy beneden het zy boven de lyn AB, in G snyden. Men trekt FG: die de gezochte lyn is.

BEREIDING tot het Bewys: men trekt FD, FE, DG, GE

BEWYS. Uit het 3 gevolg van het XII. Voorstel in het I. Boek.

VIII. WERKSTUK.

Eene gegeeven rechte lyn BA in zo veele gelyke deelen BR, RS, enz. te deelen als men wil.

CLAVIUS op de 10 prop. van het VI. Boek van EUCLIDES. — W. g. §. 90.

I. OPLOSSING *Fig.* 8. Door de 1 vooronderstelling, en, na HA getrokken te hebben. door het VI. Werkstuk. 9 Werkstuk

BEWYS: Uit het XX. Voorstel van het I. Boek: — of uit het I Voorstel van het IV. Boek.

II OPLOSSING. *Fig.* 9 Door het VI. Werkstuk, en dan door de 1 vooronderstelling.

BEWYS Uit het II. Voorstel van het IV. Boek.

AANMERKING. De bewerking door den proportionaal-passer, om dit Werkstuk op te losen, komt met deeze tweede oplossing over één.

IX. WERKSTUK. Fig. 10.

Van eene gegeeven lyn AB, een bepaald gedeelte AD aftesnyden.

EUCL. VI. 9.

OPLOSSING. Door het VIII. Werkstuk, 1 oplossing.

BEWYS. Door het XX. Voorstel van het I. Boek — of het I. van het IV. Boek.

AANMERKING. De proportionaal-passer is hier toe in de practyk zeer dienstig.

X. WERKSTUK. Fig. 11.

Eene gegeeven lyn AB in de zelfde reeden te snyden als

als eene andere gegeeven lyn AC, (in D, E), verdeeld is.

EUCL. VI. 10. — W. g. §. 191.

OPLOSSING. Door het VI. Werkstuk.

BEWYS. Door het I. Voorstel van het IV. Boek.

XI. WERKSTUK. Fig. 12.

Eene gegeeven rechte lyn FE zodanig (in I) te snyden, dat haare deelen EI, FI tot elkander staan in de zelfde reeden als twee gegeeven lynen *AB en CD.*

CLAVIUS op het X. Voorstel van EUCL. VI. Boek. p. 557.

OPLOSSING. Eerst uit F door het I. Werkstuk: uit E door het VI. en II.: trek GH: I. is het gezochte stip.

BEWYS. Uit het II. Voorstel van het IV. Boek.

XII. WERKSTUK. Fig. 13.

Eene gegeeven lyn AB zodanig in E te snyden, dat de rechthoek uit de geheele lyn AB en het kleinste deel AE gelyk zy aan het vierkant op het *grootste deel BE.*

Of wat, op het zelfde *uitkomt (IV. Boek,* 2 Bep.) Eene gegeeven lyn AB in uiterste en middelste reeden te deelen.

EUCL. II. 11. en VI. 30. — St. p. 89. pr. 11.

OPLOSSING. Men richt op B volgens het IV. Werkstuk de lyn CBD: men maakt door het VII. en I. CB $= \frac{1}{2}$ AB vervolgens werkt men eerst uit C, dan uit B, door de 3 vooronderstelling.

BEWYS. □ op AC = □ op AB + □ op BC (II. 7.)

= 4 □ op BC + □ op BC (II. 2. gev. 1.)

= 5 □ op BC.

□ op AC = □ op CD

= □ op BC + □ op BD + 2 Rechth. uit BC, BD (II. 2.)

=

= □ op B C + □ op B E + Rechth. uit
AB . BE.
dus 5 □ op B C = □ op B C + □ op B E + Rechth. uit
AB . BE.
en 4 □ op B C = □ op B E + Recht. uit AB . BE.
dus □ op A B — Rechth. uit A B . B E = □ op B E,
dus Rechth. uit A B, en [A B − B E] = □ op BE. (II. 1. gev. 3.)
of Rechth. uit A B . A E = □ op B E.

XIII. WERKSTUK. Fig. 14.

Indien 'er twee rechte lynen, AB en CD, gelyk of ongelyk, gegeeven zyn: eene derzelven CD, zodanig te verlengen, dat de Rechthoek uit die lyn te samen met het verlengde ſtuk (dat is uit CL) en uit het verlengde ſtuk DL, gelyk zy aan het vierkant op de andere lyn AB.

CLAVIUS op EUCL. III. 36. p. 312.

OPLOSSING. Trek CG volgens het IV. en I. Werkſtuk: werk dan door het VII., door de 3. vooronderſtelling; en maak eindlyk door het II. Werkſtuk DL = GI.

BEWYS. Door het 2 Gevolg van het XIII. Voorſtel van het V. Boek.

XIV. WERKSTUK. Fig. 15.

Eene rechte lyn ML gegeeven zynde, eene andere gegeeven lyn AB, doch die niet kleiner zy dan het dubbeld van de eerstgemelde ML, zodanig te ſnyden, dat die eerstgemelde midden-evenreedig zy tusſchen de deelen (AF, FB) van de andere.

CLAVIUS op XIII. Voorſtel van het VI. Boek van EUCL. p. 565.

OPLOSSING. Door het VII. Werkſtuk: door de 3. vooronderſtelling: door het IV. en het VI. Werkſtuk.

BEWYS. Uit het 3. Gevolg van het XII. Voorſtel van het V. Boek.

III. AFDEELING.

OVER DE EVENREEDIGE LYNEN.

XV. WERKSTUK. Fig. 16.

Eene lyn AE te vinden die derde evenreedige zy aan twee gegeeven lynen AB, en AC.

EUCL. VI. 11. — St. p. 257. pr. 9. — W. g. §. 186.

OPLOSSING. Door de 2. vooronderstelling, het II. en het VI. Werkstuk:

BEWYS. Uit het I. of II. Voorstel van het IV. Boek.

XVI. WERKSTUK. Fig. 17.

Eene lyn DH te vinden, die vierde evenreedige zy aan drie gegeeven lynen A, B, C:

EUCL. VI. 12. — W. g. §. 187. — St. p. 258. pr. 10.

OPLOSSING. Door de 2. vooronderstelling: het II. en het VI. Werkstuk:

BEWYS. Uit het I. of II. Voorstel van het IV. Boek.

XVII. WERKSTUK. Fig. 18.

Wanneer drie lynen A, B, C gegeeven zyn, eene vierde GH te vinden die tot de derde C zy, zo als de eerste A is tot de tweede B.

CLAVIUS op EUCL. VI. 12.

OPLOSSING. Door de 1. vooronderstelling, het II. en het VI. Werkstuk.

BEWYS. Uit het I. of II. Voorstel van het IV. Boek.

XVIII. WERKSTUK. Fig. 19.

Eene middelevenreedige DG te vinden tusschen twee gegeeven lynen A en B.

EUCL. VI. 13. — W. g. §. 210. — St. p. 258. pr. 1.

OPLOSSING. Door de 1. vooronderstelling, het II. en het VI. Werkstuk, de 3. vooronderstelling, en het III. Werkstuk

BEWYS. Uit het 3. Gevolg van het XII. Voorstel van het V. Boek.

XIX. WERKSTUK. Fig. 20.

Gegeeven zynde de middelste A, en de som AC der uitersten van drie evenreedige lynen, de uitersten (AF en CF) zelve te vinden.

TACQUET Cor. 2. op EUCL. VI. 13.

OPLOSSING. Door het VII. Werkstuk, de 3. vooronderstelling, het IV. Werkstuk, het II., het VI. tweemaal gebruikt.

BEWYS. Door het 3. Gevolg van het XII. Voorstel in het V. Boek.

XX. WERKSTUK.

Tusschen twee gegeeven lynen A en B, drie, of zeeven, of vyftien midden-evenreedigen te vinden, in één woord, zo veele als 'er door de geduurige optelling van de leden deezer geometrische progressie 1, 2, 4, 8, 16, 32. enz. ontstaan kunnen.

TACQUET Cor. 3. op EUCL. VI. 13.

OPLOSSING. Door het XVIII. Werkstuk.

I. AANMERKING. De reeden waarom men slechts 3, of 7, of 15 enz., midden-evenreedigen vinden kan, dat is, altoos onéêven in getal, is deeze. Men kan door de Meetkunde maar *ééne* midden-evenreedige tusschen twee lynen vinden: Indien 'er dan twee lynen A en B gegeeven zyn, vindt men 'er door het XVIII. Werkstuk eene derde (C) die tusschen deeze midden-evenreedig is: Men kan 'er wederom eene (D) vinden tusschen de eerste lyn A, en de eerste midden-evenreedige C, en eene (E) tusschen deeze C en de tweede gegeeven lyn B: dus in het geheel 3. Tusschen deeze vyf lynen, kan men 'er wederom 4 vinden, namelyk tusschen A en D, D en C, C en E, E en B, dat is in het geheel 7, enz.

II. AANMERKING. De ouden hebben reeds veel moeite aangewend ter oplossing van het vraagstuk, tusschen twee gegeeven lynen twee middelevenreedigen te vinden. Doch dit kan door de enkele Meetkunde, in den strikten zin namelyk, dien de ouden aan dat woord gaven, dat is door cirkel en rechte lyn alleen, niet geschieden. Wy hebben in de V. en VI. Aanmerking op het XII. Voorstel van het IV. Boek, de gronden aangeweezen waar op eenige oplossingen steunen, en aangetoond, wat men zoude behooren te kunnen doen, op dat die oplossingen *geometrisch* zouden worden: doch hier in is men in gebreeke: die stukken, welke ten grondslage dienen, kunnen niet dan door *toetsen* verricht worden; zo als bij voorb., indien men (Fig. 156.) de beide gegeeven lynen BD en DF loodrecht op elkander plaatst, en ze beiden, de eerste naar A, de tweede naar C verlengt, en twee winkelhaaken FAI en BCI neemt, waarvan men de eene FAI zo stelt dat het been AF altoos A raake, en de hoek altoos op de lyn BA valle, en de andere BCI op het been AI van de eerstgemelde zodanig schuift, dat CB altoos op het stip B, en de hoek op de lyn FC kome, zullen AD, en DC, de twee midden-evenreedigen zyn. Dit is de handelwyze van PLATO. Men zie hier over, en over die van CARTESIUS, TACQUET op EUCL. VI. 13.

Wy hebben ook in het VI. en VII. Gevolg van het XIII. Voorstel in het V. Boek de gronden aangeweezen. om het zelfde door middel van eenen cirkel te vinden. Zie insgelyks TACQUET ter aangehaalde plaatze.

XXI. WERKSTUK. Fig. 21.

De reeden die 'er tusschen twee gegeeven lynen AB, BC plaats heeft, doch waar van de eerste grooter is dan de tweede, zo ver men wil te verlengen, en de som van alle de leden aantewyzen.

TACQUET op EUCL. VI. 11.

OP-

OPLOSSING. Men richt (door het IV. Werkstuk) A D ⊥ op A B en door het III. B E ⊥ op A B: men maakt door het II. A D = A B, B E = B C: men trekt D E tot op A F verlengd: men trekt C G ⊥ op A F. maakt C N = C G: trekt H N ⊥ op A F enz. A B; B C, C N enz. zyn de leden, en A F de som van allen.

BEWYS. Door het II. Voorstel van het IV. Boek, en de eigenschappen der evenredigheeden; vooral III. 8.

AANMERKING. Hoewel men het getal der leden zo groot kan neemen als men wil, is hunne som eene bepaalde lyn A F, om dat de leden in eene bepaalde reeden (van A B : B C) afneemen. Zie het geen wy gezegd hebben III. Boek XIV. Voorstel 6. gevolg.

XXII. VOORSTEL. Fig. 149.

Eene lyn A D in harmonische evenredigheid te deelen: dat is, volgens de 1. Aanmerking op de 22. Bepaaling van het III. Boek, de lyn A D zodanig in drie deelen A B, B C, C D, te deelen, dat de geheele lyn A D tot eene der uitersten A B by v. staa, zo als de andere C D tot het middelste deel B C.

LA HIRE *Section. Con.* prop. 1.

OPLOSSING. Trek D G en A G naar willekeur.

Trek uit een stip B op de lyn A D, naar willekeur, B E evenwydig aan D G, door het VI. Werkstuk:

Verleng E B in F tot dat B F = E B door het II. Werkstuk.

Trek F G.

BEWYS. △ A D G ∽ △ A B E en △ D G C ∽ △ B F C: dus: IV. 2.

A D : A B = D G : B F of B E

Maar D G : B F = D C : B C:

dus A D : A B = D C : B C: (III. 11.)

II. BOEK.

TWEEDE BOEK.

OVER DE HOEKEN.

I. WERKSTUK. Fig. 22.

Eenen gegeeven hoek ACB in twee gelyke deelen (ACF, BCF) te deelen.

EUCL. I. 9. —— St. p. 26. pr. 7 —— W. g. §. 126.

OPLOSSING. Men gaat uit C te werk door de 3 vooronderstelling, en dan uit de beide stippen D en D, door dezelve en het 6 Axioma van het I. Boek. Men trekt CF die de vereischte verdeeling maakt.

BEWYS. Uit het 3. Gevolg van het XII. Voorstel van het I. Boek.

I. AANMERKING. Men kan op die wyze, door eene geduurige verdeeling in twee deelen, eenen hoek in vier, acht, zestien enz. gelyke hoeken verdeelen: in één woord in een getal deelen dat eenige magt van het getal 2 is.

II. AANMERKING. Men kan door de enkele *Meetkunde*, in den strikſten zin genomen, dat is, door cirkel en rechte lyn, geen' hoek in een oneeven getal deelen deelen, uitgenomen alleen den rechten hoek in drie deelen, of ook in vyf deelen: het geen het onderwerp is van het volgende II. Werkstuk, en van het VIII. en IX. in het IV. Boek.

III. AANMERKING. Eenen hoek in drie deelen door de enkele Meetkunde te verdeelen, is een beroemd vraagstuk by de ouden geweest: wy hebben reeds in het VIII. Gevolg van het XI. Voorstel van het I. Boek, en in het VIII. Gevolg van het VIII. Voorstel van het VIII. Boek aangetoond dat dit vraagstuk hierop uit komt, om wanneer een hoek DCE gegeeven is (Fig 165.) eene snylyn DGA zodanig te trekken, dat het stuk AG buiten den Cirkel gelyk zy aan de radius. Het geen geometrisch (in den strikſten zin) *niet* mogelyk is.

II. WERK-

II. WERKSTUK. Fig. 23.

Eenen rechten hoek BCA in drie gelyke deelen te deelen.

CLAVIUS op de 32. prop van EUCL. I. Boek p. 108.

OPLOSSING Men gaat uit C en A door de 3 Vooronderstelling en *Axioma* 6 van het I. Boek te werk: vervolgens door het I. Werkstuk van dit Boek.

BEWYS. Uit het II. Gevolg van het XI. Voorstel van het I. Boek.

III. WERKSTUK Fig. 24.

Uit een gegeeven stip A van eene gegeeven lyn AB, eene lyn AL te trekken die met de gegeeven lyn eenen hoek LAB gelyk aan eenen gegeeven hoek CDE maake.

EUCL. I. 23.—— St. p. 38. pr. 18. —— W. g. §. 69.

OPLOSSING. Men gaat uit D volgens de 3 Vooronderstelling te werk: dan uit A, en F volgens de zelfde en het 6 *Axioma* van het I. Boek.

AANMERKING Die oplossing is de zelfde als die van het I. Werkstuk in het III. Boek.

IV. WERKSTUK. Fig. 25.

Uit een gegeeven stip F buiten eene lyn (AB) eene lyn FA te trekken, welke met de gegeeven lyn AB eenen hoek FAB gelyk aan eenen gegeeven hoek maake.

OPLOSSING. Men gaat uit eenig stip D in de lyn volgens het III. Werkstuk te werk: en dan uit F door het VI. van het I. Boek.

BEWYS. Uit de 8. Bepaaling van het I. Boek.

III. BOEK.

DERDE BOEK.

OVER DE RECHTLYNIGE FIGUUREN.

I. AFDEELING.

OVER DE BESCHRYVING DER FIGUUREN.

I. WERKSTUK. Fig. 26.

Uit drie gegeeven lynen A, B, C, waar van altoos twee te famen grooter zyn dan de derde, eenen driehoek EHF te maaken.

EUCL. I. 22. —— St. p. 38. pr. 17. —— W. g. §. 76.

OPLOSSING. Door de 2. Vooronderftelling, het I. Werkftuk van het I. Boek, de 3. Vooronderftelling en het 6 *Axioma* van het I. Boek.

AANMERKING. De reeden waarom 'er deeze voorwaarde bygevoegd wordt; *waarvan altoos* 10°, blykt uit het XV. *Voorftel* van het I. Boek.

II. WERKSTUK. Fig. 27.

Op eene gegeeven lyn AB eenen gelykzydigen driehoek ABC te befchryven.

EUCL. I. 1. —— W. g. §. 74. —— St. p. 25. gevolg.

OPLOSSING. Door de 3. Vooronderftelling en het 6 *Axiom* van het I. Boek.

III. WERKSTUK. Fig. 28.

Op eene gegeeven lyn AB eenen gelykbeenigen driehoek ABC te befchryven.

CLAVIUS op EUCL. I. 1. —— W. g. §. 75. —— St. p. 25. pr. 6.

OPLOSSING. Door de 3. vooronderftelling en het 6 *Axioma* van het I. Boek.

AAN-

AANMERKING. Men beschryft op gelyke wyze, doch door cirkels wier straalen ongelyk zyn, eenen ongelykzydigen driehoek op eene rechte lyn. Zie CLAVIUS ter aangehaalde plaatse.

IV. WERKSTUK. Fig. 29.

Een vierkant DABC op eene gegeeven lyn AB te beschryven.

EUCL. I. 46. —— St. p. 49. pr. 31. —— W. g. §. 138.
OPLOSSING. Voor AD en BC uit het IV. en II. Werkstuk van het I. Boek: men trekt daar na DC.
BEWYS. Uit de 8. Bepaaling en het XVIII. Voorstel van het I. Boek. —— Of ook na BD getrokken te hebben, uit de 8. Bepaaling, het IV. en VIII. Voorstel van het I. Boek.
AANMERKING. De bewerking is dezelfde, indien men, niet een vierkant, maar eenen rechthoek op de lyn AB beschrijven wil, dan worden AD en BC niet aan AB maar aan de andere gegeeven lyn gelyk gemaakt. — W. g. §. 139.

V. WERKSTUK. Fig. 30.

De som AE der twee zyden van eenen Rechthoek, en de diagonaal AC van de zelfde gegeeven zynde, de zyden AB, BC te bepaalen.

OPLOSSING. 1°. Richt in C de loodlyn CF = AC: door het IV. en II. Werkstuk van het I. Boek.
2°. Trek AF, en deel AF in twee gelyke deelen in D door het VII. Werkstuk van het I. Boek.
3°. Trek uit D als middelpunt met DA als radius den halven Cirkel ACF die dus door den hoek C gaan zal: door het V. Voorstel van het V. Boek.
4°. Trek CD, die dus loodrecht staat op AF, door het 4 Gevolg van het XI. Voorstel van het I. Boek.
5°. Trek AG = AE (door het I. Werkstuk van het I. Boek.
6°. Trek FG, en deel FG in twee gelyke deelen in M

en

en insgelyks AE in K, door het VII. Werkstuk van het I. Boek, zo dat $AK = KE$:

7°. Maak $KL = MG = \frac{1}{2} FG$:

8°. Beschryf op AC den halven Cirkel ABC.

9°. Maak $BA = AL = AK - KL$.

10°. Trek BC: dan is ∠ ABC recht door het V. Voorstel van het V. Boek.

AB en BC zyn de gevraagde zyden: dat is, men moet bewyzen dat $AB + BC = AE$.

BEWYS. □ op AF — □ op AG = □ op FG. (II. 7. gev. 1)

= □ op AF — □ op AE.

insgelyks

□ op AF = □ op AC + □ op FC = 2 □ op AC (N°. 1.)

en □ op FG = 4 □ op LK (N°. 7. en II., 2 het 1 gevolg.)

= 4 □ op (AK — AL) = 4 □ op AK — 8 Recht. uit AK. AL

+ 4 □ op AL (II., 2. het 2 gevolg.)

= □ op AE — 4 Recht. uit AE. AB + 4 □ op AB (N°. 7. en 9.) en deeze waardyen in den eersten regel *stellende* heeft men 2 □ op AC — □ op AE = □ op AE — 4 Recht. uit AE. AB + 4 □ op AB:

en dus

□ op AC = □ op AE — 2 Recht. uit AE. AB + 2 □ op AB

en

□ op AC — □ op AB = □ op AE — 2 Rechth. uit AE. AB

+ □ op AB = □ op (AE — AB) door II. 2.

dus uit II., 7. het 1. gevolg.

□ op BC = □ op (AE — AB) en

$BC = AE - AB$: of

$BC + AB = AE$.

AANMERKING. Indien de lyn AC gelyk of grooter was dan AF, zoude de oplossing onmogelyk zyn: want dan was de lyn AC, die voor diagonaal gegeeven *wordt*, gelyk aan de som der zyden, of kleiner dan dezelve: dat onmogelyk is, door I. 15.

VI. WERK-

VI. WERKSTUK. Fig. 30*.

Wanneer de diagonaal AC van eenen rechthoek, en het verschil AE der zyden gegeeven is, de zyden AB, BC zelve te vinden.

OPLOSSING. Zy is de zelfde als in het voorgaande Werkstuk, behalven dat nu het stip E tusschen A en C en niet voorby C valt.

VII. WERKSTUK. Fig. 31.

Gegeeven zynde het verschil AB tusschen de diagonaal en de zyde van een vierkant, het vierkant zelve te vinden:

CLAVIUS op het 14. Voorstel van EUCLIDES II. Boek; p. 213.

I. OPLOSSING. 1°. Door het IV. Werkstuk van dit Boek: dan door de I. vooronderstelling en het H Werkstuk van het I Boek, maakende ED = DA: en dan 3°. door het IV. Werkstuk van dit Boek.

II. OPLOSSING. N°. 1. blyft: doch 2°. BA verlengende en dan, door het IV. Werkstuk van het I. Boek voor EF, BG en FG.

BEWYS *voor de 1. oplossing*. Men trekt EA: dan FA, en men moet bewyzen 1o. dat FA en AB ééne rechte lyn uitmaaken, dus dat BF de diagonaal is van het □ FEBG: en 2o dat FB — FE = AB en dus dat FE = FA.

Het eerste geschiedt door de waardy der hoeken *l*, *f*, *e*, uit I, 7. en I, 11. te ontleenen: en dan die van *o*, *p*: en daar uit te doen zien door I, 2, dat *L p* + *L f* + *L* DAB = 2 L.

Het tweede volgt door het geen in het 1. beweezen is dat *L o* = *L p* en I, 11.

BEWYS *voor de 2. oplossing*. Men trekt EA: en men bewyst 1. uit de waardy der hoeken *l*, *e*, *f*, *e*, en *p*, even

als in het eerste bewys dat *L o* = *L p*, en dus dat F E = F A. 2. Uit de waardy der hoeken F E B, E B F, dat *L* E F B = *L* E B F: en dus (I, 11) dat F E = E B. 3. Uit de beschouwing der △ △ F E B en F G B, door 1, 8. dat B G = F E: en dus dat F E B G een vierkant is.

VIII. WERKSTUK. (Fig. 32.)

Gegeeven zynde de schuinsche zyde A, (of C D) en eene der rechthoek-zyden B van eenen rechthoekigen driehoek, de andere zyde D E te vinden.

OPLOSSING. Door de 3. Vooronderstelling, het I. *Werkstuk* van het I. Boek, en de 1. Vooronderstelling.

BEWYS. Uit het 5. Voorstel van het V. Boek.

IX. WERKSTUK. Fig. 33.

Eenen gelykbeenigen driehoek F C D te beschryven, wiens grondlyn F D grooter zy dan een der beenen C D, C F.

OPLOSSING. Door de 3. Vooronderstelling.

BEWYS. Uit het 6. gevolg van het *IV. Voorstel in het* V. Boek.

X. WERKSTUK. (Fig. 34.)

Eenen gelykbeenigen driehoek C A B te beschryven: waar in de hoeken A B C, A C B op de grondlyn B C, het dubbeld zyn van den tophoek A.

EUCL. IV. 10. — St. p. 88. pr. 13.

I. OPLOSSING. Fig. 34. 1. Men trekt eene lyn A B naar willekeur, die men deelt volgens het XII. Werkstuk van het I. Boek. 2. Men beschryft uit A, met A B eenen cirkel. 3. Men maakt B C = A D: en trekt A C.

BEREIDING voor het Bewys. Men onderstelt dat 'er door A, D, C een cirkel gaa volgens V., 2.

BEWYS. Uit N°. 1., N°. 3., en het 2. gevolg van het XIII.

Voor-

Voorstel van het V. Boek bewyst men, dat B C eene raaklyn is van den kleinen cirkel, en dus door het IX Voorstel van het V. Boek ∠ D C B ≐ ∠ c.

2°. Uit I., 11. en I., 7. dat ∠ B D C ≐ B C A ≐ ∠ B en dus D C ≐ B C ≐ D A.

3°. En dus ∠ c ≐ ∠ d: en gevolglyk (I., 7.) ∠ B D C ≐ ∠ B ≐ 2 ∠ c.

I. AANMERKING. Dit is de oplossing door EUCLIDES gegeeven: die dus van de eigenschappen des cirkels afhangt. De volgende, die enkel de leere der driehoeken vereischt, is gemaklyker.

II. OPLOSSING. Fig. 141.

1°. Men trekt eene lyn A B naar welgevallen, en snydt dezelve volgens het XII. Werkstuk van het I. Boek.

2°. Men trekt uit C en B, met een' radius gelyk aan A C, cirkelbogen die elkander in D snyden, men trekt B D, en △ A B D is de gevraagde driehoek.

BEWYS. Uit het 1. en 4. gevolg van het X. Voorstel in het II. Boek.

II. AANMERKING. Indien 'er gevraagd wierd om eenen dergelyken driehoek op eene gegeeven lyn te beschryven: zoude men eerst eenen dergelyken driehoek naar willekeur maaken, en dan volgens het geen wy in het XXIX. Werkstuk leeren zullen, op de gegeeven lyn eenen driehoek, aan deezen gelykvormig, beschryven.

II. AFDEELING.

OVER DE BESCHRYVING DER FIGUUREN TEN OPZICHTE VAN DERZELVER INHOUD.

XI. WERKSTUK. Fig. 35.

Een parallelogram F H C G te beschryven, dat gelyk aan eenen gegeeven driehoek A B C zy, en eenen hoek F H C gelyk hebbe aan eenen gegeeven hoek D.

EUCL. I. 42. —— St. p. 47. pr. 29.

OPLOSSING. Door het VI. Werkstuk van het *I. Boek*, het III. van het II. Boek, het VII. van het I., het VI. van het I. twee *maalen* gebruikt.

BEWYS. *Uit* het 1. gevolg van het XIX. Voorstel uit het I. Boek en het 6. gevolg van het I. Voorstel van het II. Boek.

XII. WERKSTUK. Fig. 36.

Eenen driehoek A D E te maaken die gelyk zy aan een gegeeven parallelogram *B C F A*, en eenen hoek D A E gelyk aan een en gegeeven hoek hebbe.

CLAVIUS. Op de 42. propositie van het I. Boek van EUCL.

OPLOSSING. Door het III. Werkstuk van het II. Boek, het I. en VI. van het I. Boek.

BEWYS. Uit het I. Voorstel en deszelfs 6. gevolg van het II. Boek.

XIII. WERKSTUK.

Op eene gegeeven lyn H I, een parallelogram I H M K te beschryven, dat gelyk zy aan eenen gegeeven driehoek A C B, en eenen hoek I K M gelyk aan eenen gegeeven hoek A bezitte.

EUCL. I., 44.

I. OPLOSSING. Fig. 37. 1°. Men maakt ▭ D A F E volgens het

het XI. Werkstuk. 2°. Men verlengt IH tot dat HG = AF: 3°. Men maakt door het III. Werkstuk van het II. Boek ∠ HGN = ∠ A: 4°. Men maakt GL = HG. en LN = AD: en voltooit de parallelogrammen op alle de getrokken lynen.

BEWYS. Uit het 4. gevolg van het XIX. Voorstel in het I. Boek.

II. OPLOSSING. Fig. 38. N°. 1. is het zelfde als in de I. Oplossing: het overige steunt op het 4. gevolg van het VII. Voorstel des IV. Boeks: en wordt dus verricht door het XVII. Werkstuk van het I. Boek.

BEWYS. Uit IV., 7. het 4. gevolg.

AANMERKING. Het blykt dat men even gemaklyk op eene gegeeven lyn een parallelogram kan maaken, dat aan een gegeeven parallelogram gelyk zy, en eenen hoek gelyk aan eenen gegeeven hoek hebbe.

XIV. WERKSTUK.

Op eene gegeeven lyn HI eenen driehoek te maaken HIL, die aan een gegeeven parallelogram GB gelyk zy, en eenen hoek gelyk aan eenen gegeeven hoek hebbe.

CLAVIUS op EUCLIDES I. 44.

I. OPLOSSING. (Fig. 39.) Door het XII. en XIII. (1. oplossing) Werkstuk van dit Boek.

BEWYS. Door het 1. gevolg van het XIX. Voorstel in het I. Boek.

II. OPLOSSING. (Fig. 40.) Door het XII. en XIII. (2. Oplossing) Werkstuk van dit Boek.

BEWYS. Uit IV., 7. het 4. gevolg en I., 19. het 1. gevolg.

XV. WERKSTUK.

Op eene gegeeven lyn HG het vierkant DB van eene gegeeven lyn AB te stellen, of, wat op het zelfde uitkomt, op eene gegeeven lyn HG eenen rechthoek

EFGH te maaken, dat aan een gegeeven vierkant AC gelyk zy.

TACQUET op EUCLIDES VI., 16. Cor. 1., en 17. Cor. 2.

I. OPLOSSING. (Fig. 41.) Door de aanmerking op het XIII. Werkstuk van dit Boek.

BEWYS. Uit IV., 7. het 4. gevolg.

II. OPLOSSING. Door het XV. Werkstuk van het I. Boek.

BEWYS. Uit IV. 7. het 8. gevolg N°. 3. en 8.

III. OPLOSSING. (Fig. 45.) Richt op de gegeeven lyn FG, de loodlyn GL, gelyk aan de zyde van het gegeeven vierkant. Trek FL: richt op FL in L eene loodlyn LH. Verleng FG tot in H: en verleng LG tot dat GI = GH; KG zal de rechthoek zyn.

BEWYS. Uit IV., 12. het 3. gevolg en IV., 7. het 8 gevolg, N°. 3. en 8.

XVI. WERKSTUK. Fig. 42.

Een parallelogram IO te maaken dat aan een gegeeven rechtlynige Figuur (ABCDEF) gelyk zy, en eenen hoek KIP gelyk aan eenen gegeeven hoek hebbe.

EUCL. I. 45.

OPLOSSING. Men trekke uit eenigen hoek F de lynen FD, FC, FB; en dan door het XI., vervolgens zo veel maalen als nodig is door het XIII. Werkstuk van dit Boek.

XVII. WERKSTUK. Fig. 43.

Eenen driehoek LHI te maaken die gelyk zy aan eene gegeeven rechtlynige Figuur E, en eenen hoek gelyk aan eene gegeeven hoek hebbe.

OPLOSSING. Door het XVI., en dan door het XII. Werkstuk uit dit Boek.

XVIII. WERKSTUK Fig. 44.

Op eene gegeeven lyn KL, een parallelogram, of eenen driehoek KNL te maaken, die gelyk zy aan eene

eene gegeeven Figuur, en ook, zo men wil, eenen hoek hebbe, gelyk aan eenen gegeeven hoek.

CLAVIUS op EUCL. I. 45.

OPLOSSING. Men maakt eerst het parallelogram F H door het XVI. Werkstuk: dan op K L den △ K N L door het XIV. beide uit dit Boek.

XIX. WERKSTUK. Fig. 45.

Een vierkant te maaken dat gelyk zy aan eenen gegeeven rechthoek K G of aan eene rechtlynige Figuur.

EUCLIDES II. 14.

OPLOSSING. Door het XVIII. Werkstuk van dit en het XVIII. van het I. Boek: en dan op G L door het IV. Werkstuk van dit Boek.

BEWYS. Uit V. 12. het 3. gevolg en IV., 7. het 8. gevolg N°. 3.

XX. WERKSTUK. Fig. 46.

Een *trapezium* waarvan twee zyden evenwydig aan elkander zyn in zo veele gelyke deelen te verdeelen als men begeert.

I. OPLOSSING. Fig. 46. zy A B C D het Trapezium waar van de zyden A B, D C onderling evenwydig zyn: Men maakt B I = I C: trekt A I E: en gaat voor de lyn D E volgens het VIII Werkstuk van het I Boek te werk.

BEWYS. Men bewyst eerst door I, 9 dat △ A D E = *trapez.* A B C D: het overige volgt uit IV, 6.

II. OPLOSSING. Fig. 9. zy A B H P het trapezium waar van de zyden A B, P H onderling evenwydig zyn: men verlengt P A, H B tot dat zy in C samenkomen, en snyde P H, volgens het VIII Werkstuk van het I Boek: de trapezia A V I P, V U D I enz. zyn alle onderling gelyk.

BEWYS. Uit IV., 6.

GEVOLG.

De zelfde oplossingen hebben plaats voor een parallelogram, een vierkant, eenen Rechthoek.

W. g. §. 209.

AANMERKING. De tweede oplossing is ver boven de eerste te verkiezen.

XXI. WERKSTUK. Fig. 180.

Een trapezium ABID in twee gelyke deelen AFKD, BFKI te deelen.

OPLOSSING. Deel AB in twee gelyke deelen in F door het VI werkstuk van het I Boek.

Trekt de loodlynen AE, BI, door het V Werkstuk van het I Boek.

Deel de lyn DC in K, zodat DK : KC = BI : AE, door het XI Werkstuk van het I Boek.

Trek FK: en de deelen AFKD en BFKC zullen gelyk zyn.

BEREIDING voor het Bewys. Trek AK, BK.

BEWYS. Uit II, 6 en IV, 7, het 3 Gevolg.

III. AFDEELING.

OVER DE REEDENS, DE SOM, EN HET VERSCHIL VAN VERSCHEIDEN RECHTLYNIGE FIGUUREN.

XXII. WERKSTUK. Fig. 48.

De reeden van twee rechtlynige Figuuren A en B, door rechte lynen HG, GF, uittedrukken.

OPLOSSING, door het XVI en het XVIII Werkstuk van dit Boek.

BEWYS. door IV, 6.

XXIII. WERKSTUK. Fig. 48.

De som of het verschil van twee gegeeven rechtlynige figuuren A en B, te vinden.

CLAVIUS op EUCL. I, 45.

OPLOSSING. door het XVI en XVIII Werkstuk van dit Boek.
BEWYS. Uit II, 1: het 3 Gevolg.

XXIV. WERKSTUK. Fig. 48.

De som te vinden van zo veele rechtlynige Figuuren als men wil.

CLAVIUS op EUCLIDES I, 45.

OPLOSSING. Door het XVI en XVIII Werkstuk van dit Boek.
BEWYS. Uit II, 1: het 3 Gevolg.

XXV. WERKSTUK. Fig. 49.

Een vierkant te maaken dat gelyk zy aan de som van zo veele vierkanten als men wil.

CLAVIUS op EUCL. I, 47. pag. 154. N°. 6. — W. g. §. 174.

OPLOSSING. door het IV Werkstuk van het I Boek.
BEWYS. door II. 7.

XXVI. WERKSTUK. Fig. 50.

Een vierkant te vinden dat het verschil zy van de vierkanten, op de twee lynen A en B beschreeven.

CLAVIUS op EUCLIDES I, 47. pag. 153.

OPLOSSING. Uit het VII Werkstuk van het I Boek: de derde Vooronderstelling en de het I Werkstuk van het I Boek.
BEWYS. Uit het V Voorstel van het V Boek: en VII Voorstel van het II Boek, het 1. Gevolg.

GEVOLG.

Indien men het verschil van drie of meerder vierkanten vraagt, zal men op FD de zelfde bewerking doen als op CD.

XXVII. WERKSTUK. Fig. 51.

Gegeeven zynde twee vierkanten op de lynen A en B beschreeven: twee andere vierkanten te vinden die te saamen aan de som der twee gegeeven vierkanten gelyk zyn; het zy men die nieuwe vierkanten gelyk of ongelyk aan elkander begeere.

CLAVIUS op EUCLIDES I. 47. pag. 153. no. 4.

I. OPLOSSING. Door het IV Werkstuk van het I Boek: de I Vooronderstelling: het VII Werkstuk van het I Boek: de 3. Vooronderstelling, het III. Werkstuk van het I Boek, en de I Vooronderstelling.

BEWYS. Uit II, 7. V. 5. en I. 8.

II. OPLOSSING. Indien de vierkanten ongelyk gevraagd worden kan men te werk gaan alleen door de I Vooronderstelling het IV en het VII Werkstuk van het I Boek en de III Vooronderstelling: doch dan is het Voorstel voor zo veele Oplossingen als men wil vatbaar, daar men in den halven cirkel zo veele driehoeken als men wil beschryven kan, en de vierkanten op de zyden van die driehoeken gesteld aan het bedoelde voldoen zullen.

BEWYS. Uit II. 7.

XXVIII. (a) WERKSTUK Fig. 52.

Wanneer twee Vierkanten EG en AC gegeeven zyn, aan de kleinste derzelver eene Figuur te voegen, die aan het grootste vierkant gelyk zy, en zo dat de geheele Figuur wederom een vierkant zy.

CLAVIUS op EUCLIDES I. 47. p. 154. No. 7.

OPLOSSING. door het I Werkstuk van het I Boek: dan door de I Vooronderstelling, het I Werkstuk van het I en het IV van het III. Boek.

BEWYS. Uit II. 7.

XXVIII. (b) WERKSTUK. Fig. 53.

Indien er eene figuur van meerder dan drie zyden gegeeven is, dezelve in eene even groote figuur te veranderen, doch die eene zyde minder bezit.

H. g. §. 182.

OPLOSSING. Door de I. Vooronderstelling het VI. Werkstuk van het I. Boek, en de I. Vooronderstelling.

BEWYS. Uit II. 1.

IV. AF-

IV. AFDEELING,

OVER DE GELYKFORMIGE FIGUUREN.

XXIX. WERKSTUK. Fig. 54.

Op eene gegeeven lyn CD eene rechtlynige figuur te maaken die aan eene gegeeven rechtlynige figuur gelykformig zy.

EUCL. VI. 18. —— St. p. 262. pr. 15.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderstelling en het III Werkstuk van het II. Boek.

BEWYS. Uit IV, 14.

XXX. WERKSTUK. Fig. 55.

Eene Figuur N te vervaardigen, die aan eene gegeeven Figuur L gelykvormig, en aan eene andere M gelyk zy.

EUCL. VI. 25.

OPLOSSING. Voor ▭ AH uit het XVIII Werkstuk van dit Boek: insgelyks voor ▭ AD. Vervolgens voor FC door het XVIII Werkstuk van het I Boek: en dan voor N door het XXIX van dit Boek.

BEWYS. Uit IV, 7, het 1. Gevolg. IV, 15. en III., 10. en 9.

XXXI. WERKSTUK.

De eveneensstaande zyden *a*, *b* van twee gelykvormige Figuuren gegeeven zynde, de reeden van die Figuuren door rechte lynen uittedrukken.

OPLOSSING. Door het XV. Werkstuk van het I. Boek.

BEWYS. Uit IV., 15. IV., 7. het 5. gevolg, en III. het 4. *Axioma.*

XXXII. WERKSTUK.

Wanneer de reeden van twee gelykvormige Figuu-

ren

ren (A, B) door twee lynen (M, N) uitgedrukt is, de reeden van derzelver eveneensstaande zyden (*a*, *b*) te vinden.

OPLOSSING. Door het XVIII. Werkstuk van het I. Boek.

BEWYS. *Uit* IV., 15. en III., 14. en III., 10. het 1. gevolg.

XXXIII. WERKSTUK.

Eenen veelhoek N te maaken, die aan eenen anderen veelhoek M, waar in eene zyde A bekend is, gelykvormig, en tevens een bepaald veelvoud *m* van den zelven zy.

OPLOSSING. Door de I. vooronderstelling, het XVIII. Werkstuk van het I. Boek: en dan op die midden-evenreedigen door het XXIX. Werkstuk van dit Boek.

BEWYS. Uit IV, 15. IV, 7, het 5 Gevolg, en III, 14.

XXXIV. WERKSTUK.

Eenen veelhoek N te maaken, die aan den gegeeven veelhoek M, waarvan eene zyde (A) bekend is, gelykvormig, en tevens een bepaald gedeelte $\frac{1}{m}$ van den zelven zy.

OPLOSSING. Door het VIII. Werkstuk van het I. Boek: dan door het XVIII: en dan op die midden-evenreedigen door het XXIX. Werkstuk van dit Boek.

BEWYS. Uit het IV, 15. IV, 7. het 5 Gevolg, en III. 14.

GEVOLG.

Daar alle vierkanten gelykvormige figuuren of veelhoeken zyn (II. Boek, Gevolg van de 3 bep. en IV. Boek, XVII. Voorstel) geldt dit Werkstuk ook voor de vierkanten, en desselfs oplossing geeft ook de oplossing van dit Werkstuk, (Fig. 47.)

,, Een vierkant, te maaken, dat een bepaald ge-
,, deelte van een gegeeven vierkant ABCD zy."

Doch

Doch men kan dit ook rechtstreeks oplossen door het XX, het XI en het XIX Werkstuk van dit Boek, zo men de eerste oplossing van het XX Werkstuk gebruikt heeft: of anders door de tweede Oplossing van het XX. Werkstuk en het XIX.

XXXV. WERKSTUK. Fig. 56.

Eene Figuur M te maaken, die gelyk zy aan de som van zo veele gelykvormige Figuuren A, B, C, D, enz. als men wil, waarvan de eveneens geplaatste zyden, *a*, *b*, *c*, *d*, enz., bekend zyn, en die tevens gelykvormig aan allen zy.

OPLOSSING. Door het IV en I Werkstuk van het I. Boek; en het XXIX. van dit Boek.

BEWYS. uit IV, 20.

VIERDE

VIERDE BOEK,

OVER DEN CIRKEL.

I. AFDEELING,

OVER HET MIDDELPUNT VAN DEN CIRKEL, EN DE LYNEN DIE TOT DEN CIRKEL GETROKKEN WORDEN.

I. WERKSTUK.

Het middelpunt C van eenen gegeeven *Cirkel te* bepaalen.

EUCL. III, 1: —— S. p. 92. pr. 2.

I. OPLOSSING. Fig. 56*. door de eerste vooronderstelling het VII. en III. en wederom het VII. Werkstuk van het I. Boek.

BEWYS. Uit V, 6.

II. OPLOSSING. Fig. 57. *Uit de eerste vooronderstelling*: het IV Werkstuk van het I Boek: de 1 vooronderstelling, het VII. Werkstuk van het I. Boek.

BEWYS. Uit V, 5.

II. WERKSTUK. Fig. 58.

Gegeeven zynde een Boog ADE, of een Cirkelstuk ADEA, het middelpunt daarvan te vinden, en den geheelen Cirkel te voltooijen.

EUCL. III. 25. —— S. p. 92. pr. 2.

OPLOSSING. Door de eerste vooronderstelling: het VII en III. Werkstuk van het I. Boek.

BEWYS: Uit V, 6, het Gevolg.

III. WERKSTUK. Fig. 59.

In den Cirkel ABC eene lyn AB te trekken die ge-

gelyk zy aan eene gegeeven lyn N, doch welke kleiner is dan de middellyn.

EUCL. IV. I.

OPLOSSING. Door het I. Werkftuk van het I. B. en de III vooronderftelling.

BEWYS Uit V, II. het I Gevolg.

AANMERKING. Het blykt dat men altoos twee dergelyke gelyke lynen in den Cirkel trekken kan.

IV. WERKSTUK. Fig. 60.

In den Cirkel DKF eene rechte lyne IK te trekken, die gelyk zy aan eene gegeeven lyn AB, doch kleiner dan de middellyn, en tevens aan eene andere gegeeven lyn C evenwydig.

CLAVIUS op EUCLIDES IV. I.

OPLOSSING. Door het V. Werkftuk, het VII. twee maalen, het III twee maalen, allen uit het I Boek: en de 3 Vooronderftelling.

BEWYS. Uit VI. II. het I Gevolg.

II. AFDEELING,

OVER DE CIRKELSTUKKEN EN CIRKELBOGEN.

V. WERKSTUK. Fig. 61.

Op eene gegeeven lyn AB een Cirkelftuk te befchryven, dat eenen gegeeven hoek N bevatten kan.

EUCL. III. 33. — S. p. 115. pr. 21.

OPLOSSING. Door het III Werkftuk van het II. Boek: het IV, het VII, het IV van het I. Boek: de 3 Vooronderftelling: Het Cirkelftuk AOB is het gezogte.

BEWYS: Uit V, 9.

VI. WERKSTUK. Fig. 62.

Van een gegeeven Cirkel ABC een stuk BCA aftesnyden, dat eenen gegeeven hoek N bevatten kan.

EUCL. III. 34. —— S. p. 115. pr. 22.

I. OPLOSSING. Door de 1 Vooronderstelling: het IV. Werkstuk van het I. Boek en het III. van het II.

BEWYS. Door V, 7 en 9.

II. OPLOSSING. Door het XI. Werkstuk van dit Boek en het III. van het II Boek.

BEWYS. Uit V, 9.

VII. WERKSTUK. Fig. 63.

Eenen Cirkelboog ADB, of een Cirkelstuk, in twee gelyke deelen te snyden.

EUCL. III. 30. —— S. p. 111. pr. 17.

OPLOSSING. Door het VII. en het III. Werkstuk van het I. Boek.

BEREIDING TOT HET BEWYS: trek AD, DB.

BEWYS. Uit I, 8: en V, 4. het 5 Gevolg.

AANMERKING. Op die wyze kan men door eene gedaurige verdeeling in twee gelyke deelen eenen hoek in een even getal deelen, dat of 2, of eenige magt van 2 is, verdeelen. Doch men kan *Geometrisch*, in den strikften zin, geenen boog in drie of in een oneven getal deelen snyden, op die uitzonderingen na welke wy in de volgende Vraagstukken melden zullen. De Aanmerking die wy op het I. Werkstuk van het II. Boek gemaakt hebben, geldt hier ten vollen: want eenen boog of eenen hoek te deelen is het zelfde, daar de een de maat van den ander is.

VIII. WERKSTUK. Fig. 64.

Eenen Boog die het vierde deel van den omtrek is in drie gelyke deelen te verdeelen.

OP-

OPLOSSING. Door het II. Werkstuk van het III. Boek, en het VII. van dit, of het I. van het II Boek.

BEWYS. Uit I., 11. het 2. Gevolg en V, 4. het 3. Gev.

IX. WERKSTUK. Fig. 65.

Eenen Boog, die het vierde deel van den omtrek is, in vyf gelyke deelen te verdeelen.

OPLOSSING. Door het X. Werkstuk van het III., en het III. van het II. Boek.

BEWYS. Uit I., 7. I., 11. en V., 4. het 3. Gev.

X. WERKSTUK. Fig. 66.

Eenen Cirkel te beschryven, die door drie gegeeven stippen gaat.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderstelling, het VII. en III. Werkstuk van het I. Boek, en de 1. en 3. Vooronderstelling.

BEWYS. Uit V., 6.

AANMERKING. Het blykt dat de oplossing juist op het zelfde uitkomt als de bereiding van het II. Voorstel in het V. Boek.

III. AFDEELING.

OVER DE RAAKLYNEN VAN DEN CIRKEL.

XI. WERKSTUK. Fig. 67.

Uit een gegeeven stip A in den omtrek eene raaklyn DAE aan den cirkel te trekken.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderstelling en het IV. Werkstuk van het I. Boek.

BEWYS. Uit V., 7.

XII. WERKSTUK.

Uit een gegeeven ſtip buiten den cirkel eene raaklyn aan den zelven te trekken.

EUCL. III. 17. — 6. p. 113. pr. 19.

I. OPLOSSING. *Fig.* 68. Door de 1. Vooronderſtelling; het VII. Werkſtuk van het I. Boek, de 3. en 1. Vooronderſtelling.

BEREIDING. Trek CD, CB.

BEWYS. Uit V., 5. en 7.

II. OPLOSSING. Fig. 69. Door de 1. en 3. Vooronderſtelling; het III. Werkſtuk van het I. Boek, en de 1. Vooronderſtelling.

BEWYS. Uit I., 8. en V., 7.

AANMERKING. Het blykt uit beide de oplosſingen, dat men uit het ſtip A altoos twee raaklynen zal kunnen trekken, die elkander gelyk zullen zyn: het geen reeds uit V., 11. het 4. Gev. bekend is.

XIII. WERKSTUK. *Fig.* 70.

Eene lyn KG, die den cirkel raakt, gegeeven zynde, het ſtip E van aanraaking te bepaalen.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderſtelling, het VII. Werkſtuk van het I. Boek, en de 1. Vooronderſtelling.

BEREIDING. Trek EH.

BEWYS. Uit V., 5. en V., 7.

XIV. WERKSTUK. Fig. 70*.

Eene lyn EG te trekken, die den cirkel raake, en evenwydig zy aan eene lyn AB, die den cirkel ſnydt.

CLAVIUS OP EUCL. III., 17. p. 273.

OPLOSSING. Door het V. en IV. Werkſtuk van het I. Boek.

BEWYS. Uit V., 7. en de VIII. Bep. van het I. Boek.

XV. WERK-

XV. WERKSTUK.

Twee cirkels gegeeven zynde, doch die elkander niet geheel influiten, eene lyn te trekken, die ze beiden raakt.

CLAVIUS op EUCL. III, 17. p. 267.

'Er zyn twee gevallen: want de Cirkels zyn of gelyk, of ongelyk in grootte.

I. GEVAL. Fig. 71. *a. b. c.*

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderftelling, het IV. Werkftuk van het I. Boek, en de 1. Vooronderftelling.

BEWYS. Uit de VIII. Bep. en het XVIII. Voorftel van het I. Boek en het VII. van het VI.

II. GEVAL. Fig. 72. *a. b. c.*

OPLOSSING. Door de 3. Vooronderftelling. Uit G met eenen radius = GC — EK: verder door het XI. Werkftuk van dit Boek: het V. en IV. van het I. en de 1. Vooronderftelling.

BEWYS. Uit de VIII. Bep. en het XVIII. Voorftel van het I. Boek, en het VII. van het V.

XVI. WERKSTUK. Fig. 73.

Eenen cirkel te trekken, die eene gegeeven lyn AC in een gegeeven ftip B raakt, en door eén gegeeven ftip E gaat.

OPLOSSING. Door het III. Werkftuk van het I. Boek, de 1. Vooronderftelling, het III. Werkftuk van het I. Boek, en de 3. Vooronderftelling.

BEWYS. Uit II., 10. en V., 7.

XVII. WERKSTUK. Fig. 74., *a. b. c.*

Eenen cirkel te trekken, die door eén gegeeven ftip A gaat, en eenen anderen gegeeven cirkel innerlyk of uiterlyk raakt.

CLAVIUS op EUCL. III., 17. p. 269.

'Er zyn drie gevallen, naar maate het ſtip A op den omtrek, buiten den omtrek, of binnen den omtrek valt.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderſtelling, het VII. Werkſtuk van het I. Boek, en de 3. Vooronderſtelling.

AANMERKING Het blykt 1°., dat men in het eerſte geval op de lyn AD zo veele ſtippen als men wil neemen kan, die de middelpunten van even zo veele cirkels zyn zullen, welke allen aan het gevraagde zullen voldoen.

2°. Dat in beide de andere gevallen, zo dra men door het gegeeven ſtip A en het middenpunt des gegeeven cirkels de lyn AB getrokken heeft, 'er altoos twee cirkels zyn zullen die aan het gevraagde voldoen.

XVIII. WERKSTUK. Fig. 74*.

Een ſtip A buiten den cirkel BCD gegeeven zynde, eenen cirkel te trekken die door dat ſtip gaat, en den gegeeven cirkel uiterlyk zodanig raakt, dat geen van beide de cirkels binnen den anderen valt.

CLAVIUS op EUCL. III., 17. p. 270.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderſtelling, het VII. Werkſtuk van het I. Boek, en de 3. Vooronderſtelling.

XIX. WERKSTUK. Fig. 74**.

Twee cirkels gegeeven zynde, eenen derden te trekken die ze beiden raakt, en wiens middelpunt in dezelfde rechte lyn is met de middelpunten der gegeeven cirkels.

CLAVIUS op EUCL. III., 17. p. 271.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderſtelling, het VII. Werkſtuk van het I. Boek, en de 3. Vooronderſtelling.

BEWYS. Uit V., 15.

I. AANMERKING. Het blykt dat wanneer de cirkels geheel buiten, of geheel binnen elkander vallen, men altoos vier

vier cirkels vinden kan die aan het gevraagde voldoen: doch slechts twee, wanneer de cirkels elkander snyden.

II. AANMERKING. Wanneer men uit elk der middelpunten van de twee gegeeven cirkels, met eene opening gelyk aan de som van den radius aan dien cirkel, en van den radius des cirkels dien men voor den rakenden cirkel neemen wil, bogen beschryft, zal het stip daar die bogen elkander snyden, altoos het middelpunt zyn van den cirkel die beide de gegeeven raaken zal.

VYFDE BOEK,

OVER DE BESCHRYVING DER FIGUUREN IN EN OM DEN CIRKEL.

I. WERKSTUK. Fig. 75.

In eenen gegeeven cirkel ABHC, eenen driehoek BAC te beschryven, die gelykhoekig zy aan eenen gegeeven driehoek DFE.

EUCL. IV., 2. —— S. p. 123. pr. 1.

OPLOSSING. Door het XI. Werkstuk van het IV., het III. van het II. Boek, en de 1. Vooronderstelling.

BEWYS. Uit V., 9.

II. WERKSTUK. Fig. 75*.

Om eenen gegeeven cirkel eenen driehoek MKI te beschryven, die met eenen gegeeven driehoek CAB gelykhoekig zy.

EUCL. IV, 3. —— S. p. 123. pr. 2.

OPLOSSING. Men verlengt eene zyde CB van den driehoek. Vervolgens gaat men te werk door de 1. Vooronderstelling: door het IV. Werkstuk van het I. Boek, door het III. van het II. Boek, twee maalen: door het IV. van het I. Boek, twee maalen.

BEWYS. Dat de driehoek GLH om den cirkel beschreeven is, blykt uit de Oplossing en VI., 2. Dat hy met den gegeeven gelykhoekig is, blykt uit II., 11. I., 1.

III. WERKSTUK. Fig. 76.

In eenen cirkel eenen gelykzydigen driehoek te beschryven.

OPLOSSING. Door de 1., 3. en 1. Vooronderstelling.

BEWYS. Uit I., 8. en I., 10. het 2. Gevolg. —— Of nog korter uit VI., 8. het 2. Gev. en VI., 8. N°. 5.

IV. WERKSTUK. Fig. 77.

Eenen cirkel in eenen gegeeven driehoek ABD te beschryven.

EUCL. IV., 4. —— S. p. 124. pr. 3.

OPLOSSING. Door het I. Werkstuk van het II. Boek, en het V. van het I.

BEWYS. Uit VI., 4. het Gevolg.

V. WERKSTUK. Fig. 78.

Eenen cirkel om eenen gegeeven driehoek BAC te beschryven.

EUCL. IV., 5. —— S. p. 125. pr. 4.

OPLOSSING. Door het VII. en III. Werkstuk van het I. Boek, en de 3. Vooronderstelling.

BEWYS. Uit V., 2. het Gevolg.

VI. WERKSTUK. Fig. 79.

Een vierkant in eenen gegeeven cirkel te beschryven.

EUCL. IV., 6. —— S. p. 126. pr. 5.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderstelling, het III. Werkstuk van het I. Boek, en de 1. Vooronderstelling.

BEWYS. Uit I., 8. en V., 5.

VII. WERKSTUK. Fig. 80.

Een vierkant om eenen gegeeven cirkel te beschryven.

EUCL. IV., 7. —— S. p. 128. pr. 6.

OPLOSSING. Door de 1. Vooronderstelling, het III. en IV. Werkstuk uit het I. Boek.

BEWYS. Uit I., 18. en 19.

VIII. WERKSTUK. Fig. 81.

Eenen cirkel in een gegeeven vierkant te beschryven.

EUCL. IV., 9.

OPLOSSING. Uit het VII. Werkstuk van het I. Boek, de 1. en 3. Vooronderstelling.

BEWYS. Uit I., 8. en VI., 2.

IX. WERKSTUK. Fig. 82.

Eenen cirkel om een gegeeven vierkant te beschryven.

EUCL. IV., 9.

OPLOSSING. Door de 1. en 3. Vooronderstelling.

BEWYS. Uit I., 19. het 5. Gevolg en VI., 1.

X. WERKSTUK. Fig. 83.

Om een gegeeven vierhoek ABCD, waar in de tegenovergestelde hoeken B en D, en A en C, gelyk aan twee rechte zyn, eenen cirkel te beschryven.

OPLOSSING. Trek AC: en dan door het V. Werkstuk van dit Boek.

BEWYS. Uit VI., 6.

XI. WERKSTUK. Fig. 84.

In eenen gegeeven cirkel eenen regelmatigen vyfhoek te beschryven.

EUCL. IV., 11. — S. p. 128. pr. 7.

I. OPLOSSING. Van EUCLIDES Door het X. Werkstuk van het III. Boek, het I. van het V., het I. van het II. Boek en de 1. Vooronderstelling. — Of door het X van het III. Boek, het I. van het V. en het VII. Werkstuk van het IV. Boek.

BEWYS. Uit VI., 10.

II. OPLOSSING Van PTOLEMEUS. Fig. 163. Richt uit C de loodlyn CD op (door het III Werkstuk van het I. Boek) deel CB in twee gelyke deelen in E, (door het VII. van het I Boek) beschryf uit E met den radius ED den boog DF: trek de lyn DF: het is de zyde van den vyfhoek.

BEWYS. Uit VI., 14. het 3. Gevolg.

XII. WERK-

XII. WERKSTUK. Fig. 85.

Eenen regelmatigen vyfhoek om den cirkel te beschryven.

EUCL. IV., 12. — S. p. 129 pr. 8.

OPLOSSING. Door het XI. Werkstuk van dit Boek en het IV. van het I.

BEWYS. Uit VI., 21.

XIII. WERKSTUK. Fig. 86.

Eenen cirkel in eenen vyfhoek, of in het algemeen in eenen gegeeven regelmatigen veelhoek te beschryven.

EUCL. IV., 13. — S. p. 134 pr 12.

OPLOSSING. Door het I. Werkstuk van het II. Boek, het V. van het I. Boek, en de 3. Vooronderstelling.

BEWYS. Uit II., 14 en VI., 2.

XIV. WERKSTUK. Fig. 87.

Eenen cirkel om eenen vyfhoek, of in het algemeen om eenen gegeeven regelmatigen veelhoek te beschryven.

EUCL. IV., 14. —— S. p 132. pr. 11.

OPLOSSING. Door het I. Werkstuk van het II. Boek, en de 3. Vooronderstelling.

BEWYS. Uit II., 14. en VI., 1.

XV. WERKSTUK.

Eenen regelmatigen zeshoek in den cirkel te beschryven.

EUCL. IV., 15. —— S. p. 130 pr. 9.

OPLOSSING. Door de 3. en 1. Vooronderstelling.

BEWYS. Uit VI., 8. het 2. Gevolg.

XVI WERKSTUK.

Te bepaalen welke veelhoeken men geometrisch in den

den cirkel beschryven kan, en hoe men ze beschryven moet.

OPLOSSING. De driehoek, het vierkant, de vyfhoek, en de zeshoek, zyn de eenige oorspronkelyke Figuuren, die men geometrisch in den cirkel beschryven kan. Men heeft tot nu toe geene geometrische manier voor de zeevenhoek, negenhoek, enz. en voor de overige veelhoeken, waar in het getal der zyden een *eerste getal* is.

Maar door middel van de vier gemelde veelhoeken, kan men een aantal anderen beschryven, en wel op tweederleie wyze.

Voor eerst, door het VII. Werkstuk van het IV. Boek, door eene geduurige verdeeling der boogen in twee gelyke deelen: op die wyze beschryft men door middel van den driehoek, veelhoeken van 6, 12, 24, 48 zyden enz.; door middel van het vierkant, veelhoeken van 8, 16, 32 zyden enz.; door middel van den vyfhoek, veelhoeken van 10, 20, 40 zyden enz.

Ten tweeden, door de *inschryving van twee oorspronkelyke veelhoeken*: want, zo AD, AB, Fig. 89., de zyden zyn van twee veelhoeken, wier zyden g en G in getal zyn; zal de boog DB, $G - g$ zyden behelzen van eenen veelhoek waar in het getal zyden $G \times g$ is: en dus, zo $G - g = 1$, of $G \times g$ een veelvond is van $G - g$, of zo $G - g = 2$, of eenige magt van 2 is, zal men den veelhoek van $G \times g$ zyden kunnen beschryven. By voorbeeld, zy AD de zyde van eenen driehoek; AB die van eenen vyfhoek; zal de boog DB 2 zyden van eenen *vyftien-hoek* behelzen: en dus is de choorde van den halven boog BD, de zyde van eenen vyftien-hoek. (Zie EUCL. IV, het 16 Voorst.)

BEWYS. Uit VI., 11., Gevolg, en VI., 12. het 1. Gevolg.

AANMERKING. Somtyds kunnen 'er byzondere manieren

plaats

plaats hebben: zo als, by voorbeeld, voor den tienhoek, waarvoor twee oplossingen voorhanden zyn.

I. OPLOSSING. Van EUCLIDES. Fig. 34. Men snyde den radius AB in uiterste en middelste reeden. (I. Boek, XII. Werkstuk.) Men maake BC = AD: en BC is de zyde van den tienhoek.

BEWYS. Uit VI., 13.

II. OPLOSSING. Van PTOLEMEUS. Fig. 163. Richt uit C de loodlyn CD op, (I. Boek III. Werkstuk) deel CB in twee gelyke deelen in E: (I. Boek VII. Werkstuk). Beschryf uit E met den radius ED den boog DF: FC is de zyde van den tienhoek.

BEWYS. Uit VI., 14. het 3. Gevolg.

XVII. WERKSTUK.

Te bepaalen welke regelmatige veelhoeken men om den cirkel beschryven kan, en hoe men ze beschryven moet.

OPLOSSING. Allen, die men in den cirkel beschryven kan, kan men ook om den cirkel beschryven: men gaat te werk zo als in het XII. Werkstuk.

BEWYS. Uit VI., 21. het 2. Gevolg.

XVIII. WERKSTUK.

Eenigen veelhoek op eene gegeeven rechte lyn te beschryven.

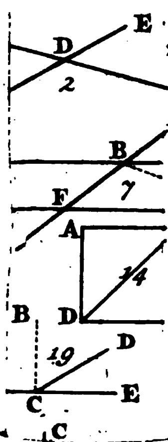
OPLOSSING. Fig. 92. Men beschryft eerst in eenen cirkel naar welgevallen eenen veelhoek aan den gevraagden gelykvormig. Vervolgens maakt men op de gegeeven lyn AB eenen driehoek ADB gelykvormig aan den middelpunts-driehoek ECF van den gemaakten veelhoek. Dan beschryft men uit D met den radius DA eenen cirkel:

in

in welken men de lynen B G, G H &c. gelyk aan A B stelt: deeze zullen de gegeeven veelhoek uitmaaken.

I. AANMERKING. Hier op steunt het gebruik van den proportionaal passer, om dit Werkstuk door denzelven optelossen.

II. AANMERKING. 'Er zyn voor sommige veelhoeken korter handelwyzen: zo als voor den drieboek en het vierkant. Zie het II. en IV. Werkstuk van het III. Boek.


E
D
2
B
7
F
A
14
D
B
D
19
C
E
C

